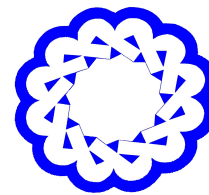


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

توابع برنشتاین لگاریتمی برای معادله کسری رزنو با مشتق کاپوتو- هادامارد

* محمد حسین حیدری آ، فاطمه حیدری آ، معصومه حسینی نیا آ
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، استان فارس، ایران

چکیده

در این مقاله، یک روش دورگه برای حل معادله رزنو کسری شامل مشتق کسری کاپوتو- هادامارد ارائه می‌شود. برای حل این معادله، توابع برنشتاین لگاریتمی به عنوان توابع پایه‌ای مناسب برای کار کردن این نوع مشتق طراحی شده‌اند. مزیت اصلی این توابع سادگی محاسبه انتگرال و مشتق کسری هادامارد آن‌ها می‌باشد. توابع برنشتاین لگاریتمی به همراه چند جمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین، به طور هم‌زمان برای حل معادله مذکور به کار گرفته می‌شوند. به طور دقیق‌تر، از توابع برنشتاین لگاریتمی برای تقریب جواب در بعد زمانی و از چند جمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین برای تقریب جواب در بعد مکانی استفاده می‌شود. علاوه بر این، یک ماتریس برای محاسبه انتگرال کسری هادامارد توابع برنشتاین لگاریتمی استخراج شده است. در روش پیشنهادی، با بسط عبارت کسری مساله با استفاده از تقریب دورگه، به کارگیری ماتریس‌های عملگر انتگرال کسری هادامارد و مشتقات معمولی و همچنین به کارگیری روش هم‌محلی، حل مساله مورد بررسی به حل دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌شود که به راحتی قابل حل می‌باشد. در پایان، کارایی این روش با حل دو مثال ارزیابی می‌شود. نتایج بدست آمده از این دو مثال عددی نشان دهنده توانایی و دقت بالای روش مورد نظر برای حل این نوع مسایل می‌باشد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۴) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۳ مهر ۱۴۰۳
پذیرفته شده: ۳۱ فروردین ۱۴۰۴
دسترسی آنلاین: ۳۱ فروردین ۱۴۰۴

کلمات کلیدی:

معادله دیفرانسیل زمان کسری
رزنو، مشتق کسری
کاپوتو- هادامارد، توابع
برنشتاین لگاریتمی،
چند جمله‌ای‌های متعامد یکه
برنشتاین، انتگرال کسری
هادامارد.

* نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: Heydari@sutech.ac.ir (محمد حسین حیدری)، ft.heydari@sutech.ac.ir (فاطمه حیدری)،
M.Hosseiniinia@sutech.ac.ir (معصومه حسینی نیا).

<http://doi.org/10.22072/wala.2025.2043383.1459>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۴) ©

۱. مقدمه

مشتقات و انتگرال‌های کسری به دلیل انعطاف‌پذیری و قابلیت‌های گسترده خود، به‌طور وسیعی در مدل‌سازی مسایل پیچیده کاربرد دارند. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این عملگرهای کسری (انتگرال و مشتق)، درجه آزادی بیشتر آن‌ها نسبت به تعریف معمولی است که امکان تحلیل دقیق‌تری از سیستم‌های پیچیده و غیرخطی را فراهم می‌کند. این ویژگی‌ها موجب گسترش تحقیقات متعددی در زمینه کاربردهای آن‌ها در علوم و مهندسی شده است. به‌عنوان نمونه، مطالعات اخیر کاربردهای مشتقات کسری را در مدل‌های اپیدمی [۱۷]، نانوسیال مکسول^۱ [۱۱]، انتقال ویروس زیکا^۲ [۱۵]، واکنش‌های آنزیمی برگشت‌پذیر [۱۶] و غیره گزارش کرده‌اند.

در میان طیف گسترده‌ای از عملگرهای کسری، عملگرهای هادامارد^۳ جایگاه ویژه‌ای دارند. در انتگرال هادامارد، تابع هسته به صورت لگاریتمی است و زمانی که مرتبه انتگرال کمتر از یک باشد، منجر به انتگرال کسری منفرد می‌شود. علاوه بر این، مشتق کسری کاپوتو-هادامارد^۴، تعمیم عملگر $\left(t \frac{d}{dt}\right)^m$ به کمک انتگرال کسری هادامارد است. [۶، ۱۲]. پژوهشگران نشان داده‌اند که این نوع مشتق کسری دارای ویژگی‌های تنظیم‌پذیری بهتری در مقایسه با سایر مشتقات کسری است. به عنوان مثال، این مشتق به‌ویژه برای مدل‌سازی فرایندهای بسیار کند مناسب است [۵]. یافتن جواب تحلیلی برای معادلات کسری با این نوع مشتق غالباً دشوار و گاهی غیرممکن است.

معادله رزنو^۵ یک مساله غیرخطی است که تعاملات دو موج با یکدیگر یا یک موج و یک دیوار را توصیف می‌کند [۱۸]. این معادله هم‌چنین برای توصیف دینامیک سیستم مترامک گسسته و مدل‌سازی انتقال خطوط توسط مدارهای L-C مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۹]. در سال‌های اخیر به دلیل اهمیت این معادله غیرخطی در مدل‌سازی مسایل مختلف، محققان بسیاری به حل و بررسی آن پرداخته‌اند. به عنوان مثال می‌توان به روش المان محدود گالرکین [۴]، روش توابع چلیشکوف^۶ لگاریتمی [۸]، روش گالرکین ناپیوسته [۳]، روش توابع پایه‌ای شعاعی [۲۰]، روش ترکیبی اجزای محدود [۱] و روش تفاضل متناهی [۲۱] اشاره کرد.

کاربردهای متعدد معادله کسری رزنو، همراه با ویژگی‌های مفید مشتق کسری کاپوتو-هادامارد، ما را بر آن داشت تا کلاسی دیگر از این معادله را با استفاده از مشتق کسری کاپوتو-هادامارد در این مقاله معرفی کنیم. علاوه بر این، برای حل این معادله، یک روش عددی موثر را ارائه می‌دهیم. در ادامه، تمرکز اصلی ما بر روی مساله زیر است

$${}^{\text{CH}}D_t^\alpha u(x, t) - \frac{\partial^f u(x, t)}{\partial x^f} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t), \quad (1.1)$$

که در آن $(x, t) \in [0, X] \times [a, b]$ و $0 < \alpha \leq 1$ می‌باشد. شرط اولیه

$$u(x, a) = u_0(x), \quad x \in [0, X], \quad (2.1)$$

¹Maxwell

²Zika

³Hadamard

⁴Caputo-Hadamard

⁵Rosenau

⁶Chelyshkov

و شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(\cdot, t) = u_1(t), & t \in [a, b], \\ u(X, t) = u_2(t), \quad u(X, t) = u_2(t), & t \in [a, b], \\ u_{xx}(\cdot, t) = u_3(t), \quad u_{xx}(X, t) = u_3(t) & t \in [a, b]. \end{cases} \quad (3.1)$$

این معادله را همراهی می‌کنند.

چندجمله‌ای‌ها معمولاً برای طراحی روش‌های عددی برای اکثر مسایل کسری استفاده می‌شوند زیرا دارای دو ویژگی مهم هستند: اول اینکه مشتق‌های کسری آنها به راحتی قابل محاسبه است. ثانیاً، تحت شرایط خاص، نتایج به دست آمده با استفاده از الگوریتم‌های عددی مبتنی بر آنها دارای دقت طیفی هستند. در مساله‌های کسری که دارای مشتق یا انتگرال لگاریتمی می‌باشند، استفاده از توابع پایه‌ای لگاریتمی مناسب می‌باشد زیرا محاسبه ماتریس‌های عملگر مربوطه به سادگی امکان‌پذیر می‌باشد. از توابع پایه‌ای لگاریتمی می‌توان توابع پایه‌ای لگاریتمی چلیشکف [۸]، ژاکوبی^۷ [۲۲] و غیره نام برد. در این مقاله، بخاطر وجود مشتق کسری کاپوتو-هادامارد و استفاده از انتگرال هادامارد، خانواده جدیدی از توابع پایه لگاریتمی، تحت عنوان توابع برنشتاین لگاریتمی^۸، را برای حل عددی معادله مذکور معرفی کنیم. این توابع دارای خاصیت تعامد و دقت طیفی می‌باشند. همچنین، این توابع می‌توانند در تسهیل محاسبات و افزایش دقت نتایج نقش موثری ایفا کنند. با این وجود از این توابع برای هر مساله کسری نمی‌توانیم استفاده نماییم. در واقع فقط برای مسایلی کاربرد دارند که دارای مشتق یا انتگرال لگاریتمی باشند.

در این مقاله، به حل عددی معادله دیفرانسیل کسری رزنو با مشتق کاپوتو-هادامارد به وسیله چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین و توابع برنشتاین لگاریتمی پرداخته می‌شود. در حقیقت با تقریب جواب معادله کسری مورد بررسی بر حسب این توابع پایه‌ای و به‌کارگیری ماتریس‌های مشتقات معمولی این چندجمله‌ای‌ها و ماتریس انتگرال کسری توابع لگاریتمی، مساله مورد مطالعه به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌شود که به راحتی جواب آن بدست می‌آید. چارچوب کلی این مقاله به این شرح است: در بخش ۲ مقدماتی از حسابان کسری هادامارد ارائه می‌شود. در بخش ۳ چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین تعریف و سپس ماتریس‌های عملگر مشتقات معمولی مرتبه‌های اول، دوم و بالاتر چندجمله‌ای‌های برنشتاین محاسبه می‌گردد. بخش ۴ به بررسی توابع برنشتاین لگاریتمی پرداخته می‌شود و سپس ماتریس عملگر انتگرال کسری آن‌ها بدست می‌آید. روش عددی موردنظر برای حل معادله کسری زمانی رزنو با استفاده از مشتق کسری کاپوتو-هادامارد در بخش ۵ ارائه می‌شود. آنالیز همگرایی مساله کسری مورد نظر در بخش ۶ پیشنهاد می‌شود. دقت و کارایی روش پیشنهادی با ذکر دو مثال عددی در بخش ۷ بررسی می‌شود. در نهایت مقاله با نتیجه‌گیری در بخش ۸ خاتمه می‌یابد.

۲. حسابان کسری هادامارد

در این بخش به برخی از مقدمات حسابان کسری که در این مقاله مورد نیاز است می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. ([۱۴]) تابع f را روی بازه $[a, b] \subset \mathbb{R}$ به طور مطلق پیوسته گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ چنان

یافت شود که برای هر مجموعه متناهی از زیر بازه‌های دو به دو بدون اشتراک $[a_k, b_k] \subset [a, b]$ اگر $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$

⁷Jacobi

⁸Logarithmic Bernstein

باشد، آنگاه نامساوی $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ برقرار باشد. فضای توابع به طور مطلق پیوسته روی بازه $[a, b]$ را با $AC([a, b])$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲. ([۱۳]) فرض کنید $[a, b]$ یک بازه متناهی روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} و $AC([a, b])$ فضای توابع به طور مطلق پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد. برای هر $m \in \mathbb{Z}^+$ فضای $AC_\delta^m([a, b])$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$AC_\delta^m([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid (\delta_x^{m-1} f) \in AC([a, b]) \right\},$$

که در آن $\delta_x = x \frac{d}{dx}$ می‌باشد.

تعریف ۳.۲. ([۱۳، ۱۲]) فرض کنید $f \in AC([a, b])$ باشد. در این صورت عملگر انتگرال کسری هادامارد از مرتبه $\alpha > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^H I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \left(\frac{x}{t} \right) \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad 0 < a \leq x \leq b. \quad (۱.۲)$$

خاصیت ۴.۲. ([۱۳، ۱۲]) اگر α, β و a اعدادی حقیقی و نامنفی باشند، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$${}_a^H I_x^\alpha \left(\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} \left(\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right)^{\beta + \alpha - 1}. \quad (۲.۲)$$

تعریف ۵.۲. ([۹]) فرض کنید $0 < a < b < \infty$ و $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{Z}^+$ و $f \in AC_\delta^m([a, b])$ حقیقی و f باشد. در این صورت عملگر مشتق کسری هادامارد در فرم کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^{CH} D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \left(\frac{x}{t} \right) \right)^{m-\alpha-1} (\delta_t^m f)(t) \frac{dt}{t}, & m-1 < \alpha < m, \\ (\delta_x^m f)(x), & \alpha = m. \end{cases} \quad (۳.۲)$$

خاصیت ۶.۲. ([۲، ۹]) اگر $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+$ و $\beta > 0$ و $0 < a < b < \infty$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$${}_a^{CH} D_x^\alpha \left(\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \left(\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right)^{\beta - \alpha - 1}. \quad (۴.۲)$$

قضیه ۷.۲. ([۲، ۹]) فرض کنید $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+$ عددی حقیقی و $f \in AC_\delta^m([a, b])$ باشد. در این صورت داریم

$${}_a^H I_x^\alpha ({}_a^{CH} D_x^\alpha f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\delta_x^k f)(a)}{k!} \left(\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right)^k, \quad 0 < a < b. \quad (۵.۲)$$

۳. چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین

چندجمله‌ای‌های برنشتاین اولین بار توسط سرگئی ناتانویچ برنشتاین^۹ در سال ۱۹۱۲ معرفی شدند. این چندجمله‌ای‌ها به دلیل سادگی در محاسبه ضرایب، در تقریب توابع بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجه m روی بازه $[0, X]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰]

$$\begin{aligned} B_{m,i}(x) &= \binom{m}{i} \frac{x^i (X-x)^{m-i}}{X^m} \\ &= \sum_{k=0}^{m-i} (-1)^k \binom{m}{i} \binom{m-i}{k} \left(\frac{x}{X}\right)^{i+k}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین از درجه m روی بازه $[0, X]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]

$$\psi_{m,i}(x) = \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{m-i} c_{ikr} x^{i-k+r}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

که در آن

$$c_{ikr} = \frac{(-1)^k}{X^{i-k+r}} \sqrt{\frac{\gamma(m-i)+1}{X}} \binom{\gamma(m-k)+1}{i-k} \binom{i}{k} \binom{m-i}{r}.$$

هر تابع $u(x) \in L^2([0, X])$ را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین به صورت زیر تقریب زد

$$u(x) \simeq \sum_{i=0}^m u_i \psi_{m,i}(x) \triangleq \widehat{U}^T \Psi_m(x). \quad (3.3)$$

به طوری‌که

$$\widehat{U} = [u_0, u_1, \dots, u_m]^T,$$

با مولفه‌های

$$u_i = \int_0^X u(x) \psi_{m,i}(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

و

$$\Psi_m(x) = [\psi_{m,0}(x), \psi_{m,1}(x), \dots, \psi_{m,m}(x)]^T. \quad (4.3)$$

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\Psi_m(x)$ بردار تعریف شده در رابطه (۴.۳) باشد. در این صورت مشتق مرتبه اول از بردار $\Psi_m(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{d}{dx} \Psi_m(x) = \mathbf{D}^{(1)} \Psi_m(x), \quad (5.3)$$

⁹Sergei Natanovich Bernstein

که در آن $\mathbf{D}^{(1)} = [d_{ij}^{(1)}]$ یک ماتریس مربعی از مرتبه $(m+1)$ می‌باشد که درایه‌های آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$d_{ij}^{(1)} = \sum_{k=0}^i \sum_{r=\sigma_{ki}}^{m-i} \sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{m-j} c_{ikr} c_{j\hat{k}\hat{r}} \left(\frac{i-k+r}{i-k+r+j-\hat{k}+\hat{r}} \right) X^{i-k+r+j-\hat{k}+\hat{r}}, \quad (6.3)$$

برای $i, j = 0, 1, \dots, m$ و

$$\sigma_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

اثبات. با توجه به رابطه (۲.۳)، بدست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \psi_{m,i}(x) = \sum_{k=0}^i \sum_{r=\sigma_{ki}}^{m-i} c_{ikr} (i-k+r) x^{i-k+r-1}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (7.3)$$

بنابراین، از رابطه (۷.۳)، و بردار $\Psi_m(x)$ تعریف شده در رابطه (۴.۳)، داریم

$$\frac{d}{dx} \Psi_m(x) = \left[\frac{d}{dx} \psi_{m,0}(x), \frac{d}{dx} \psi_{m,1}(x), \dots, \frac{d}{dx} \psi_{m,m}(x) \right]^T. \quad (8.3)$$

مولفه‌های بردار به‌دست آمده در رابطه بالا را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد یکه به صورت زیر بسط داد

$$\frac{d}{dx} \psi_{m,i}(x) = \sum_{j=0}^m d_{ij}^{(1)} \psi_{m,j}(x),$$

که در آن

$$d_{ij}^{(1)} = \int_0^X \left(\frac{d}{dx} \psi_{m,i}(x) \right) \psi_{m,j}(x) dx.$$

با جایگذاری روابط (۲.۳) و (۷.۳) در رابطه بالا، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(1)} &= \sum_{k=0}^i \sum_{r=\sigma_{ki}}^{m-i} \sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{m-j} c_{ikr} c_{j\hat{k}\hat{r}} (i-k+r) \int_0^X x^{i-k+r-1} x^{j-\hat{k}+\hat{r}} dx \\ &= \sum_{k=0}^i \sum_{r=\sigma_{ki}}^{m-i} \sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{m-j} c_{ikr} c_{j\hat{k}\hat{r}} \left(\frac{i-k+r}{i-k+r+j-\hat{k}+\hat{r}} \right) X^{i-k+r+j-\hat{k}+\hat{r}}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\frac{d}{dx} \Psi_m(x) \simeq \begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} & \cdots & d_{1m}^{(1)} \\ d_{21}^{(1)} & d_{22}^{(1)} & \cdots & d_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}^{(1)} & d_{m2}^{(1)} & \cdots & d_{mm}^{(1)} \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{D}^{(1)} \Psi_m(x). \quad (۹.۳)$$

□

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۲.۳. به طور کلی برای مشتق مرتبه r بردار $\Psi_m(x)$ ، داریم

$$\frac{d^r}{dx^r} \Psi_m(x) = \mathbf{D}^{(r)} \Psi_m(x), \quad (۱۰.۳)$$

که در آن r -مین توان $\mathbf{D}^{(1)}$ می‌باشد.

۴. توابع برنشتاین لگاریتمی

در این بخش از چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین بیان شده در رابطه (۲.۳) برای تعریف توابع برنشتاین لگاریتمی استفاده می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید $0 < a < b$ اعدادی حقیقی باشند. نگاشت زیر را تعریف کنید

$$s(t) = \kappa \ln\left(\frac{t}{a}\right), \quad \kappa = \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{-1}, \quad t \in [a, b]. \quad (۱.۴)$$

این نگاشت بازه $[a, b]$ را به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهد. یک مجموعه شامل $(n+1)$ تابع برنشتاین لگاریتمی بر بازه $[a, b]$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\phi_{n,i}(t) = \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{n-i} \hat{c}_{ikr} \left(\kappa \ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{i-k+r}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (۲.۴)$$

که در آن

$$\hat{c}_{ikr} = (-1)^k \sqrt{2(n-i)+1} \binom{2n-k+1}{i-k} \binom{i}{k} \binom{n-i}{r}.$$

توابع برنشتاین لگاریتمی نسبت به تابع وزن $w(t) = \frac{\kappa}{t}$ روی بازه $[a, b]$ متعامد یکه هستند. بنابراین هر تابع $g \in L_w^2([a, b])$ را می‌توان بر حسب توابع برنشتاین لگاریتمی به صورت زیر تقریب زد

$$g(t) \simeq \sum_{i=0}^n g_i \phi_{n,i}(t) \triangleq \widehat{G}^T \Phi_n(t). \quad (۳.۴)$$

به طوری که

$$\widehat{G} = [g_0, g_1, \dots, g_n]^T,$$

که در آن

$$g_i = \int_a^b g(t) \phi_{n,i}(t) \kappa \frac{dt}{t}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

و

$$\Phi_n(t) = [\phi_{n,0}(t) \quad \phi_{n,1}(t) \quad \dots \quad \phi_{n,n}(t)]^T. \quad (۴.۴)$$

۱.۴. تقریب دورگ

تقریب دورگ به تقریبی گفته می‌شود که در آن بیشتر از یک کلاس از توابع پایه‌ای استفاده می‌شود. این روش معمولاً در تحلیل عددی، بهینه‌سازی و یادگیری ماشین استفاده می‌شود، جایی که راه‌حل‌های دقیق ممکن است از نظر محاسباتی گران یا غیرقابل اجرا باشند.

با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد یک برنشتاین و توابع برنشتاین لگاریتمی می‌توان هر تابع $h \in L_w^\infty([0, X] \times [a, b])$ را به صورت زیر بر حسب این توابع پایه‌ای متعامد یک تقریب زد

$$h(x, t) \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n h_{ij} \psi_{m,i}(x) \phi_{n,j}(t) \triangleq \Psi_m^T(x) \mathbf{H} \Phi_n(t),$$

که در آن $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ ماتریسی $(m+1) \times (n+1)$ بعدی با مولفه‌های زیر است

$$h_{ij} = \int_a^b \int_0^X h(x, t) \psi_{m,i}(x) \phi_{n,j}(t) \kappa dx \frac{dt}{t}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

۲.۴. ماتریس عملگر انتگرال کسری

در این بخش، روش محاسبه ماتریس عملگر انتگرال کسری هادامارد، توضیح داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که استفاده از ماتریس‌های عملگرهای مشتق و انتگرال کسری می‌تواند به بهبود کارایی، دقت و سرعت در حل مسائل کسری کمک کند و ابزارهای قدرتمندی برای تحلیل و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده فراهم آورد.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی معین باشد. در این صورت انتگرال کسری هادامارد مرتبه α از بردار $\Phi_n(t)$ ، تعریف شده در رابطه (۴.۴) به صورت زیر قابل بیان می‌باشد

$${}^H I_t^\alpha \Phi_n(t) \approx \mathbf{P}_n^{(\alpha)} \Phi_n(t), \quad (۵.۴)$$

که در آن $\mathbf{P}_n^{(\alpha)} = [p_{ij}^{(\alpha)}]$ ماتریسی $(n+1) \times (n+1)$ بعدی با مولفه‌های

$$p_{ij}^{(\alpha)} = \kappa^{-\alpha} \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{n-i} \sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{n-j} \frac{\hat{c}_{ikr} \hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}} \Gamma(i-k+r+1)}{(i+j+r+\hat{r}+\alpha-k-\hat{k}+1) \Gamma(i-k+r+\alpha+1)},$$

برای $0 \leq i, j \leq n$ است. ماتریس $\mathbf{P}_n^{(\alpha)}$ را ماتریس عملگر انتگرال کسری هادامارد از مرتبه α می‌گویند.

اثبات. با توجه به رابطه (۲.۴) و خاصیت ۴.۲، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} {}_a^H I_t^\alpha \phi_{n,i}(t) &= \sum_{k=\cdot}^i \sum_{r=\cdot}^{n-i} \hat{c}_{ikr} \kappa^{i-k+r} {}_a^H I_t^\alpha \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r} \\ &= \sum_{k=\cdot}^i \sum_{r=\cdot}^{n-i} \hat{c}_{ikr} \kappa^{i-k+r} \frac{\Gamma(i-k+r+1)}{\Gamma(i-k+r+\alpha+1)} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r+\alpha}. \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

عبارت $\left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r+\alpha}$ بیان شده در رابطه بالا را می‌توان بر حسب توابع برنشتاین لگاریتمی به صورت زیر تقریب زد

$$\left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r+\alpha} \simeq \sum_{j=\cdot}^n p_{ij}^{(\alpha)} \phi_{n,j}(t), \quad (۷.۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(\alpha)} &= \int_a^b \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r+\alpha} \phi_{n,j}(t) \kappa \frac{dt}{t} \\ &= \int_a^b \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i-k+r+\alpha} \left(\sum_{\hat{k}=\cdot}^j \sum_{\hat{r}=\cdot}^{n-j} \hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}} \left(\kappa \ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{j-\hat{k}+\hat{r}} \right) \kappa \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{\hat{k}=\cdot}^j \sum_{\hat{r}=\cdot}^{n-j} \hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}} \kappa^{j-\hat{k}+\hat{r}+1} \int_a^b \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{i+j+r+\hat{r}+\alpha-k-\hat{k}} \frac{dt}{t} \\ &= \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{i+r+\alpha-k} \sum_{\hat{k}=\cdot}^j \sum_{\hat{r}=\cdot}^{n-j} \frac{\hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}}}{i+j+r+\hat{r}+\alpha-k-\hat{k}+1}. \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

با جایگذاری روابط (۷.۴) و (۸.۴) در رابطه (۶.۴)، داریم

$$\begin{aligned} {}_a^H I_t^\alpha \phi_{n,i}(t) &\simeq \left\{ \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{n-i} \hat{c}_{ikr} \kappa^{i-k+r} \frac{\Gamma(i-k+r+1)}{\Gamma(i-k+r+\alpha+1)} \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{i+r+\alpha-k} \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^n \left(\sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{n-j} \frac{\hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}}}{i+j+r+\hat{r}+\alpha-k-\hat{k}+1} \right) \phi_{n,j}(t) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{n-i} \sum_{\hat{k}=0}^j \sum_{\hat{r}=0}^{n-j} \\ &\quad \frac{\kappa^{-\alpha} \hat{c}_{ikr} \hat{c}_{j\hat{k}\hat{r}} \Gamma(i-k+r+1)}{(i+j+r+\hat{r}+\alpha-k-\hat{k}+1) \Gamma(i-k+r+\alpha+1)} \phi_{n,j}(t) \\ &\triangleq \sum_{j=0}^n p_{ij}^{(\alpha)} \phi_{n,j}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$${}_a^H I_t^\alpha \Phi_n(t) \simeq \begin{pmatrix} p_{\cdot 0}^{(\alpha)} & p_{\cdot 1}^{(\alpha)} & \cdots & p_{\cdot n}^{(\alpha)} \\ p_{1 \cdot}^{(\alpha)} & p_{1 1}^{(\alpha)} & \cdots & p_{1 n}^{(\alpha)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n \cdot}^{(\alpha)} & p_{n 1}^{(\alpha)} & \cdots & p_{nn}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \Phi_n(t) \triangleq \mathbf{P}_n^{(\alpha)} \Phi_n(t).$$

□

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۵. روش عددی پیشنهاد شده

در این بخش، با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین و توابع برنشتاین لگاریتمی یک روش عددی برای حل مساله تعریف شده در روابط (۳.۱)-(۱.۱) پیشنهاد می‌دهیم. برای این منظور عبارت کسری ${}_a^{CH} D_t^\alpha u(x, t)$ بیان شده در رابطه (۱.۱) را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$${}_a^{CH} D_t^\alpha u(x, t) \simeq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij} \psi_{m,i}(x) \phi_{n,j}(t) \triangleq \Psi_m^T(x) \mathbf{U} \Phi_n(t), \quad (1.5)$$

که در آن

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{\cdot 0} & u_{\cdot 1} & \cdots & u_{\cdot n} \\ u_{1 \cdot} & u_{1 1} & \cdots & u_{1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m \cdot} & u_{m 1} & \cdots & u_{m n} \end{pmatrix},$$

ماتریس ضرایب مجهول، $\Psi_m(x)$ بردار چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین تعریف شده در رابطه (۴.۳) و $\Phi_n(t)$ بردار توابع برنشتاین لگاریتمی تعریف شده در رابطه (۴.۴) می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه (۱.۵) و استفاده از قضیه‌های ۷.۲

و ۱.۴، رابطه زیر حاصل می‌شود

$$u(x, t) \simeq u(x, a) + \Psi_m^T(x) \mathbf{UP}_n^{(\alpha)} \Phi_n(t). \quad (۲.۵)$$

حال چون $u(x, a)$ تابعی معلوم بر حسب x می‌باشد، می‌توان فرض کرد که تابعی بر حسب (x, t) است. بنابراین تقریب زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(x, a) \simeq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n v_{ij} \psi_{m,i}(x) \phi_{n,j}(t) \triangleq \Psi_m^T(x) \mathbf{V} \Phi_n(t), \quad (۳.۵)$$

که در آن

$$v_{ij} = \int_a^b \int_a^x u(x) \psi_{m,i}(x) \phi_{n,j}(t) \kappa dx \frac{dt}{t}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

با جایگذاری رابطه (۳.۵) در رابطه (۲.۵)، بدست می‌آوریم

$$u(x, t) \simeq \Psi_m^T(x) \mathbf{V} \Phi_n(t) + \Psi_m^T(x) \mathbf{UP}_n^{(\alpha)} \Phi_n(t) \triangleq \Psi_m^T(x) \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t), \quad (۴.۵)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴.۵) و استفاده از قضیه ۱.۳، روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &\simeq \Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(1)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t), \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\simeq \Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(2)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t), \\ \frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} &\simeq \Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(r)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t). \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

اکنون شرایط مرزی بیان شده در رابطه (۳.۱) را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$\begin{cases} u_{\setminus}(t) \simeq \sum_{j=0}^n \bar{u}_{\setminus j} \phi_{n,j}(t) \triangleq U_{\setminus}^T \Phi_n(t), \\ u_{\surd}(t) \simeq \sum_{j=0}^n \bar{u}_{\surd j} \phi_{n,j}(t) \triangleq U_{\surd}^T \Phi_n(t), \\ u_{\surd}(t) \simeq \sum_{j=0}^n \bar{u}_{\surd j} \phi_{n,j}(t) \triangleq U_{\surd}^T \Phi_n(t), \\ u_{\surd}(t) \simeq \sum_{j=0}^n \bar{u}_{\surd j} \phi_{n,j}(t) \triangleq U_{\surd}^T \Phi_n(t), \end{cases} \quad (۶.۵)$$

که در آن

$$U_i = [\bar{u}_{i\cdot}, \bar{u}_{i\setminus}, \dots, \bar{u}_{in}]^T,$$

و

$$\bar{u}_{ij} = \int_a^b u_i(t) \phi_{n,j}(t) \kappa \frac{dt}{t}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

علاوه بر این، از شرایط مرزی بیان شده در رابطه (۳.۱) و تقریب‌های بیان شده در روابط (۴.۵) و (۵.۵)، داریم

$$\begin{cases} \Psi_m^T(\cdot) \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) - U_{\Psi}^T \Phi_n(t) = [\Psi_m^T(\cdot) \widehat{\mathbf{U}} - U_{\Psi}^T] \Phi_n(t) \triangleq \widetilde{U}_{\Psi}^T \Phi_n(t), \\ \Psi_m^T(X) \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) - U_{\Psi}^T \Phi_n(t) = [\Psi_m^T(X) \widehat{\mathbf{U}} - U_{\Psi}^T] \Phi_n(t) \triangleq \widetilde{U}_{\Psi}^T \Phi_n(t), \\ \Psi_m^T(\cdot) (\mathbf{D}^{(\nu)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) - U_{\Psi}^T \Phi_n(t) = [\Psi_m^T(\cdot) (\mathbf{D}^{(\nu)})^T \widehat{\mathbf{U}} - U_{\Psi}^T] \Phi_n(t) \triangleq \widetilde{U}_{\Psi}^T \Phi_n(t), \\ \Psi_m^T(X) (\mathbf{D}^{(\nu)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) - U_{\Psi}^T \Phi_n(t) = [\Psi_m^T(X) (\mathbf{D}^{(\nu)})^T \widehat{\mathbf{U}} - U_{\Psi}^T] \Phi_n(t) \triangleq \widetilde{U}_{\Psi}^T \Phi_n(t). \end{cases} \quad (۷.۵)$$

که در آن $\widetilde{U}_i = [\widetilde{u}_{i,1}, \widetilde{u}_{i,2}, \dots, \widetilde{u}_{i,n}]^T$ برای $i = 1, 2, 3, 4$ با جایگذاری روابط (۱.۵)، (۴.۵) و (۵.۵) در رابطه (۱.۱)، تابع باقی‌مانده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} R(x, t) \triangleq & \Psi_m^T(x) \mathbf{U} \Phi_n(t) - \Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(\nu)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) + \Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(1)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) \\ & + \Psi_m^T(x) \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t) [\Psi_m^T(x) (\mathbf{D}^{(1)})^T \widehat{\mathbf{U}} \Phi_n(t)] - f(x, t) \simeq 0. \end{aligned} \quad (۸.۵)$$

برای انتقال بازه $[0, 1]$ به $[0, X]$ و $[a, b]$ به ترتیب از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$x_i = \frac{X}{\Psi} \left(1 - \cos \left(\frac{(\Psi i + 1)\pi}{\Psi(m + 1)} \right) \right), \quad t_j = \frac{1}{\Psi} \left(b + a - (b - a) \cos \left(\frac{(\Psi j + 1)\pi}{\Psi(n + 1)} \right) \right), \quad (۹.۵)$$

و آن‌ها را به عنوان نقاط هم محلی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن رابطه‌های بیان شده در (۷.۵) و (۸.۵) به همراه نقاط هم محلی بیان شده در (۹.۵)، دستگاه معادلات جبری زیر از مرتبه $(n + 1) \times (m + 1)$ حاصل می‌شود

$$\begin{cases} R(x_i, t_j) = 0, & i = 2, 3, \dots, m - 2, \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ \widetilde{u}_{ij} = 0, & i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق و مشخص شدن درایه‌های ماتریس ضرایب مجهول \mathbf{U} و جایگذاری کردن آن در رابطه (۴.۵)، جواب تقریبی مساله بدست می‌آید. قابل ذکر است که برای حل سیستم بالا از دستور "fsolve" در نرم افزار میپل ۱۸ استفاده شده است.

۶. آنالیز همگرایی

این بخش به بررسی آنالیز همگرایی روش بیان شده در بخش قبلی اختصاص دارد. ابتدا با در نظر گرفتن تغییر متغیر ${}_a^{CH} D_t^\alpha u(x, t) = v(x, t)$ و قضیه بیان شده در ۷.۲، به دست می‌آوریم

$$u(x, t) = {}_a^H I_t^\beta v(x, t) + u_0(x) \triangleq \eta(x, t). \quad (۱۰.۶)$$

بنابراین، مساله کسری کاپوتو-هادامارد (۱۰.۱) می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$v(x, t) - \frac{\partial^\nu \eta(x, t)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \eta(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = f(x, t). \quad (۲.۶)$$

لم ۱.۶ ([۸]). هر تابع به اندازه کافی مشتق‌پذیر ϑ تعریف شده روی بازه $[a, b]$ را می‌توان با استفاده از سری تیلور^{۱۰} لگاریتمی به صورت زیر بسط داد

$$\vartheta(t) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \ln\left(\frac{t}{a}\right)^k, \quad (۳.۶)$$

$$\text{که در آن } \lambda_k = \frac{1}{k!} \delta_t^k \vartheta(t) \Big|_{t=a} \text{ و } \delta_t^k \vartheta(t) = \left(t \frac{d}{dt}\right)^k \vartheta(t)$$

فرضیه ۱. در ادامه، فرض بر این است که $F : [0, X] \times [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته با شرط لیپ شیتز^{۱۱} زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} & |F(x, t, \eta(x, t), \eta_x(x, t)) - F(x, t, \widehat{\eta}(x, t), \widehat{\eta}_x(x, t))| \\ & \leq \mathcal{F} \left(|\eta(x, t) - \widehat{\eta}(x, t)| + |\eta_x(x, t) - \widehat{\eta}_x(x, t)| \right), \end{aligned} \quad (۴.۶)$$

برای هر $x, t \in [0, X] \times [a, b]$ و $\eta, \widehat{\eta}, \eta_x, \widehat{\eta}_x \in \mathbb{R}$ که در آن \mathcal{F} یک ثابت مثبت می‌باشد. نکته ۲.۶ ([۸]) برای تابع دو متغیره $f : [0, X] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ نرم زیر را تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \left(\int_a^b \int_0^X f^{\mathcal{F}}(x, t) dx \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\mathcal{F}}}. \quad (۵.۶)$$

قضیه ۳.۶. فرض کنید

$$\mathbb{X} = \text{span} \{ \psi_{m, \cdot}(x), \psi_{m, 1}(x), \dots, \psi_{m, m}(x) \},$$

و

$$\mathbb{T} = \text{span} \{ \phi_{n, \cdot}(t), \phi_{n, 1}(t), \dots, \phi_{n, n}(t) \}.$$

اگر $v(x, t) \in C^{\bar{m}+1}([0, X] \times [a, b])$ که در آن $\bar{m} = \min(m, n)$ و $v^*(x, t)$ بهترین تقریب از $v(x, t)$ در فضای $\mathbb{X} \times \mathbb{T}$ باشد. بنابراین، کران خطای زیر را داریم

$$\|v(x, t) - v^*(x, t)\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{NM_1}{(\bar{m} + 1)!}, \quad (۶.۶)$$

و در مورد $u(x) \in C^{m+1}([0, X])$ و $u^*(x)$ بهترین تقریب از $u(x)$ در فضای \mathbb{X} باشد. بنابراین، داریم

$$\|\eta(x, t) - \eta^*(x, t)\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{NM_1}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 2)} + \frac{N_1 M_{\mathcal{F}}}{(m + 1)!}, \quad (۷.۶)$$

¹⁰Taylor

¹¹Lipschitz

$$M_1 = \sqrt{\frac{\kappa \left[\left(X + \ln \left(\frac{b}{\alpha} \right) \right)^{\gamma \bar{m} + \gamma} - \left(\ln \left(\frac{b}{\alpha} \right) \right)^{\gamma \bar{m} + \gamma} - X^{\gamma \bar{m} + \gamma} \right]}{(\gamma \bar{m} + \gamma)(\gamma \bar{m} + \gamma)}},$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{\kappa \left[\left(X + \ln \left(\frac{b}{\alpha} \right) \right)^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} - \left(\ln \left(\frac{b}{\alpha} \right) \right)^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} - X^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} \right]}{(\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma)(\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma)}},$$

$$M_3 = \sqrt{\frac{X^{\gamma m + \gamma}}{\gamma m + \gamma}},$$

که در آن $\eta^*(x, t)$ به عنوان بهترین تقریب از $\eta(x, t)$ می‌باشد و $N = \max_{r=0,1,\dots,\bar{m}+1} |v^{(r)}(x, t)|$ با

$$v^{(r)}(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} (\delta_t^r v(x, t)),$$

به طوری که $r_1 + r_2 = r$.

اثبات. به دلیل اینکه $v(x, t) \in C^{\bar{m}+1}([0, X] \times [a, b])$ داریم

$$\exists N > 0 : \forall (x, t) \in [0, X] \times [a, b], |v^{(r)}(x, t)| \leq N, \quad r = 0, 1, \dots, \bar{m} + 1. \quad (8.6)$$

با استفاده از بسط سری تیلور معمولی و بسط سری تیلور لگاریتمی بیان شده در لم ۱.۶ می‌توانیم $v(x, t)$ به صورت زیر بسط دهیم

$$v(x, t) = \sum_{r=0}^{\bar{m}} \frac{1}{r!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \ln \left(\frac{t}{a} \right) \delta_t \right)^r v(x, t) \Big|_{(x,t)=(\cdot, a)}$$

$$+ \frac{1}{(\bar{m} + 1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \ln \left(\frac{t}{a} \right) \delta_t \right)^{\bar{m}+1} v(x, t) \Big|_{(x,t)=(\widehat{x}, \widehat{t})}, \quad (9.6)$$

به طوری که $\widehat{t} \in [a, b]$ و $\widehat{x} \in [0, X]$ فرض کنید

$$\widehat{v}(x, t) = \sum_{r=0}^{\bar{m}} \frac{1}{r!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \ln \left(\frac{t}{a} \right) \delta_t \right)^r v(x, t) \Big|_{(x,t)=(\cdot, a)}. \quad (10.6)$$

پس یک تابع $v^*(x, t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{T}$ وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند

$$v(x, t) - v^*(x, t) = v(x, t) - \widehat{v}(x, t) = \frac{1}{(\bar{m} + 1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \ln \left(\frac{t}{a} \right) \delta_t \right)^{\bar{m}+1} v(\widehat{x}, \widehat{t}). \quad (11.6)$$

همچنین، داریم

$$\begin{aligned}
 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \ln\left(\frac{t}{a}\right) \delta_t\right)^{\bar{m}+1} v(\widehat{x}, \widehat{t}) &= a_{\bar{m}+1}^{\cdot} x^{\bar{m}+1} \frac{\partial^{\bar{m}+1}}{\partial x^{\bar{m}+1}} v(\widehat{x}, \widehat{t}) + a_{\bar{m}+1}^{\cdot} x^{\bar{m}} \ln\left(\frac{t}{a}\right) \\
 &\frac{\partial^{\bar{m}}}{\partial x^{\bar{m}}} (\delta_t v(\widehat{x}, \widehat{t})) + a_{\bar{m}+1}^{\cdot} x^{\bar{m}-1} \ln\left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{\partial^{\bar{m}-1}}{\partial x^{\bar{m}-1}} (\delta_t^2 v(\widehat{x}, \widehat{t})) \\
 &+ \dots + a_{\bar{m}+1}^{\cdot} \ln\left(\frac{t}{a}\right)^{\bar{m}+1} \delta_t^{\bar{m}+1} v(\widehat{x}, \widehat{t}) \leq N \left(x + \ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\bar{m}+1}.
 \end{aligned} \tag{۱۲.۶}$$

بنابراین از رابطه‌های (۱۱.۶) و (۱۲.۶)، دو رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$v(x, t) - v^*(x, t) \leq \frac{N}{(\bar{m} + 1)!} \left(x + \ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\bar{m}+1}, \tag{۱۳.۶}$$

و

$$\begin{aligned}
 \|v(x, t) - v^*(x, t)\|_{\infty} &\leq \frac{N}{(\bar{m} + 1)!} \sqrt{\underbrace{\frac{\kappa \left[\left(X + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{\bar{m}+4} - \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{\bar{m}+4} - X^{\bar{m}+4} \right]}{(\bar{m} + 3)(\bar{m} + 4)}}_{M}} \\
 &= \frac{NM}{(\bar{m} + 1)!}.
 \end{aligned} \tag{۱۴.۶}$$

نهایتاً، با استفاده از خاصیت ۴.۲ و رابطه (۱۳.۶) به دست می‌آوریم

$${}^H I_t^{\beta} v(x, t) - {}^H I_t^{\beta} v^*(x, t) \leq \frac{N}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 2)} \left(x + \ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\bar{m}+\beta+1}. \tag{۱۵.۶}$$

بر اساس اینکه $u_{\cdot}(x) \in C^{m+1}([0, X])$ ، به دست می‌آوریم

$$\exists N_1 > 0 : \forall x \in [0, X], |u_{\cdot}^{(k)}(x)| \leq N_1, \quad k = 0, 1, \dots, m+1. \tag{۱۶.۶}$$

با استفاده از بسط تیلور معمولی، می‌توانیم $u_{\cdot}(x)$ به صورت زیر بسط دهیم

$$u_{\cdot}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(x \frac{d}{dx}\right)^k u_{\cdot}(x)|_{x=0} + \frac{1}{(m+1)!} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{m+1} u_{\cdot}(x)|_{x=\widehat{x}}, \tag{۱۷.۶}$$

به طوری که $\widehat{x} \in [0, X]$ فرض کنید

$$\widehat{u}_{\cdot}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(x \frac{d}{dx}\right)^k u_{\cdot}(x)|_{x=0}. \tag{۱۸.۶}$$

بنابراین، از رابطه‌های (۱۷.۶)-(۱۸.۶)، به دست می‌آوریم

$$u.(x) - u^*(x) = u.(x) - \widehat{u}.(x) = \frac{1}{(m+1)!} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{m+1} u.(\widehat{x}) \leq \frac{N_1}{(m+1)!} x^{m+1}, \quad (19.6)$$

که در آن $u^*(x)$ بهترین تقریب از $u.(x)$ می‌باشد. با کمک رابطه‌های (۱۳.۶) و (۱۹.۶) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|\eta(x, t) - \eta^*(x, t)\|_{\gamma} &= \|\eta(x, t) - \widehat{\eta}(x, t)\|_{\gamma} \\ &\leq \| {}^H I_t^{\beta} v(x, t) - {}^H I_t^{\beta} \widehat{v}(x, t) \|_{\gamma} + \|u.(x) - \widehat{u}.(x)\|_{\gamma} \\ &= \frac{N}{\Gamma(\bar{m} + \beta + \gamma)} \left(\int_a^b \int. \left(\left(x + \ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\bar{m} + \beta + 1} \right)^{\gamma} w(t) dx dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad + \frac{N_1}{(m+1)!} \left(\int. x^{m+1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \frac{N}{\Gamma(\bar{m} + \beta + \gamma)} \sqrt[{\gamma}]{ \underbrace{\kappa \left[\left(X + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} - \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} - X^{\gamma \bar{m} + \gamma \beta + \gamma} \right]}_{M_{\gamma}} } \\ &\quad + \frac{N_1}{(m+1)!} \sqrt[{\gamma}]{ \underbrace{X^{\gamma m + \gamma}}_{M_{\gamma}} } = \frac{N M_{\gamma}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + \gamma)} + \frac{N_1 M_{\gamma}}{(m+1)!}, \end{aligned}$$

□

که اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۴.۶. از قضیه بالا، داریم

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \eta^*(x, t)}{\partial x} \right\|_{\gamma} &\leq \frac{N M_{\gamma}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 1)} + \frac{N_1 M_{\delta}}{m!}, \\ \left\| \frac{\partial^{\gamma} \eta(x, t)}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^{\gamma} \eta^*(x, t)}{\partial x^{\gamma}} \right\|_{\gamma} &\leq \frac{N M_{\gamma}}{\Gamma(\bar{m} + \beta - \gamma)} + \frac{N_1 M_{\gamma}}{(m - \gamma)!}, \end{aligned} \quad (20.6)$$

که در آن

$$M_{\varphi} = \sqrt{\frac{\kappa \left[\left(X + \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta + \varphi} - \ln \left(\frac{b}{a} \right)^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta + \varphi} - X^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta + \varphi} \right]}{(\varphi \bar{m} + \varphi \beta + 1)(\varphi \bar{m} + \varphi \beta + 2)}},$$

$$M_{\delta} = \sqrt{\frac{X^{\varphi m + 1}}{(\varphi m + 1)}},$$

$$M_{\psi} = \sqrt{\frac{\kappa \left[\left(X + \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta - \varphi} - \ln \left(\frac{b}{a} \right)^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta - \varphi} - X^{\varphi \bar{m} + \varphi \beta - \varphi} \right]}{(\varphi \bar{m} + \varphi \beta - 5)(\varphi \bar{m} + \varphi \beta - 4)}},$$

$$M_{\gamma} = \sqrt{\frac{X^{\varphi m - 5}}{(\varphi m - 5)}}.$$

□

اثبات. اثبات شبیه به اثبات قضیه فوق است. بنابراین، از نوشتن اثبات صرف نظر می‌کنیم.

نکته ۵.۶. در ادامه، مساله بیان شده در (۲.۶) به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$v(x, t) - \frac{\partial^{\varphi} \eta(x, t)}{\partial x^{\varphi}} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \underbrace{\eta(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}}_{F(x, t, \eta(x, t), \eta_x(x, t))} - f(x, t) \simeq 0, \quad (21.6)$$

که در آن تابع $F(., ., ., .)$ شرایط داده شده در فرض ۱ را پردازش می‌کند.

قضیه ۶.۶. فرض کنید $v(x, t)$ جواب دقیقی از مساله (۲۱.۶) باشد و $\widehat{v}(x, t)$ جواب تقریبی به دست آمده توسط روش پیشنهادی باشد. بنابراین داریم

$$\|ER(x, t)\|_{\varphi} \leq NM_{\lambda} + \frac{N_1 M_{\varphi}}{(\bar{m} - 3)!}, \quad (22.6)$$

که در آن $ER(x, t)$ تابع باقی‌مانده می‌باشد و

$$M_{\lambda} = \frac{M_{\gamma}}{(\bar{m} + 1)!} + \frac{M_{\psi}}{\Gamma(\bar{m} + \beta - 2)} + \frac{(1 + \mathcal{F})M_{\varphi}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 1)} + \frac{\mathcal{F}M_{\varphi}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 2)},$$

$$M_{\varphi} = M_{\gamma} + \frac{(1 + \mathcal{F})M_{\delta}}{\bar{m}(\bar{m} - 1)(\bar{m} - 2)} + \frac{\mathcal{F}M_{\varphi}}{(\bar{m} + 1)\bar{m}(\bar{m} - 1)(\bar{m} - 2)}.$$

اثبات. با جایگذاری $\widehat{v}(x, t)$ داخل مساله (۲۱.۶) به دست می‌آوریم

$$\widehat{v}(x, t) - \frac{\partial^{\varphi} \widehat{\eta}(x, t)}{\partial x^{\varphi}} + \frac{\partial \widehat{\eta}(x, t)}{\partial x} + F(x, t, \widehat{\eta}(x, t), \widehat{\eta}_x(x, t)) + ER(x, t) \simeq 0. \quad (23.6)$$

از رابطه‌های (۲۱.۶) و (۲۳.۶)، عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \|\text{ER}(x, t)\|_{\gamma} &\leq \|v(x, t) - \widehat{v}(x, t)\|_{\gamma} + \|\eta_{xxxx}(x, t) - \widehat{\eta}_{xxxx}(x, t)\|_{\gamma} \\ &+ \|\eta_x(x, t) - \widehat{\eta}_x(x, t)\|_{\gamma} + \|F(x, t, \eta(x, t), \eta_x(x, t)) - F(x, t, \widehat{\eta}(x, t), \widehat{\eta}_x(x, t))\|_{\gamma}. \end{aligned} \quad (24.6)$$

در نهایت، با استفاده از فرض ۱، قضیه ۳.۶، رابطه (۲۳.۶) و نتیجه ۴.۶، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|\text{ER}(x, t)\|_{\gamma} &\leq \frac{NM_{\lambda}}{(\bar{m} + 1)!} + \frac{NM_{\xi}}{\Gamma(\bar{m} + \beta - 2)} + \frac{N_{\lambda} M_{\gamma}}{(\bar{m} - 3)!} + \frac{NM_{\zeta}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 1)} + \frac{N_{\lambda} M_{\delta}}{\bar{m}!} \\ &+ \mathcal{F} \left(\frac{NM_{\gamma}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 2)} + \frac{N_{\lambda} M_{\gamma}}{(\bar{m} + 1)!} + \frac{NM_{\zeta}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 1)} + \frac{N_{\lambda} M_{\delta}}{\bar{m}!} \right) \\ &= N \underbrace{\left(\frac{M_{\lambda}}{(\bar{m} + 1)!} + \frac{M_{\xi}}{\Gamma(\bar{m} + \beta - 2)} + \frac{(\lambda + \mathcal{F})M_{\zeta}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 1)} + \frac{\mathcal{F}M_{\gamma}}{\Gamma(\bar{m} + \beta + 2)} \right)}_{M_{\lambda}} \\ &+ \frac{N_{\lambda}}{(\bar{m} - 3)!} \underbrace{\left(M_{\gamma} + \frac{(\lambda + \mathcal{F})M_{\delta}}{\bar{m}(\bar{m} - 1)(\bar{m} - 2)} + \frac{\mathcal{F}M_{\zeta}}{(\bar{m} + 1)\bar{m}(\bar{m} - 1)(\bar{m} - 2)} \right)}_{M_{\lambda}} \\ &= NM_{\lambda} + \frac{N_{\lambda} M_{\lambda}}{(\bar{m} - 3)!}, \end{aligned}$$

□

که اثبات را کامل می‌کند.

۷. مثال‌های عددی

در این بخش، برای بررسی میزان دقت و کارایی روش پیشنهادی برای مساله تعریف شده در رابطه (۱.۱)، دو مثال عددی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای ارزیابی خطا از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$\Lambda_u = \left(\int_a^b \int_{\cdot}^x (u(x, t) - \tilde{u}(x, t))^2 \kappa dx \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

که در آن u و \tilde{u} به ترتیب جواب‌های تقریبی و دقیق می‌باشند. هم‌چنین برای محاسبه مرتبه همگرایی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$CO = \left| \frac{\ln \left(\frac{\Lambda_u(\hat{m}_2)}{\Lambda_u(\hat{m}_1)} \right)}{\ln \left(\frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \right)} \right|, \quad (2.7)$$

که در آن $\hat{m}_1 = m_1 n_1$ و $\hat{m}_2 = m_2 n_2$ به ترتیب مقادیر mn استفاده شده در پیاده‌سازی اول و دوم می‌باشند.

مثال ۱.۷. معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه (۱.۱) را به گونه‌ای در نظر بگیرید که در آن $(x, t) \in [0, 1] \times [2, 3]$ ، $0 < \alpha \leq 1$

$$f(x, t) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^{4-\alpha} \sin(x) + \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^3 \sin(x) + \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^3 \cos(x) + \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^6 \sin(x) \cos(x),$$

و

$$\begin{cases} u_1(x) = 0, & x \in [0, 1], \\ u_1(t) = u_2(t) = 0, & t \in [2, 3], \\ u_2(t) = \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^3 \sin(1), & t \in [2, 3], \\ u_4(t) = - \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^3 \sin(1), & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

جواب دقیق این مساله به صورت زیر است

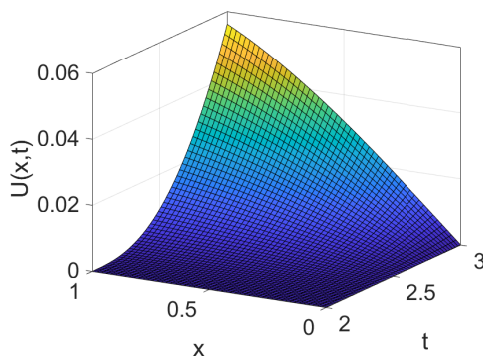
$$u(x, t) = \left(\ln\left(\frac{t}{\gamma}\right) \right)^3 \sin(x). \quad (3.7)$$

مساله کسری مورد نظر با استفاده از روش ترکیبی ارائه شده در قسمت قبل حل گردیده است. خطای مطلق و مرتبه همگرایی مربوط به مقدارهای مختلف (m, n) و α در جدول ۱ گزارش شده است. با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۱، می‌توان به راحتی مشاهده کرد که با افزایش تعداد پایه‌ها دقت نتایج به دست آمده بهتر می‌شود. جواب تقریبی مساله به ازای $(m, n) = (7, 8)$ و $\alpha = 0.25$ در شکل ۱ ارائه شده است. همچنین، به ازای مقادیر مختلف (m, n) با $\alpha = 0.25$ نمودارهای خطای مطلق در شکل ۲ می‌توان مشاهده کرد. با توجه به جدول و شکل‌های گزارش شده می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی برای این مثال، روشی کافی با دقت بالا می‌باشد.

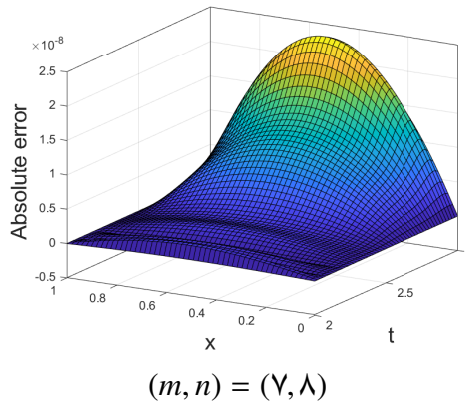
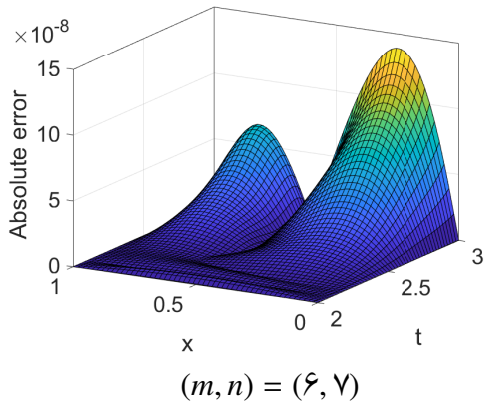
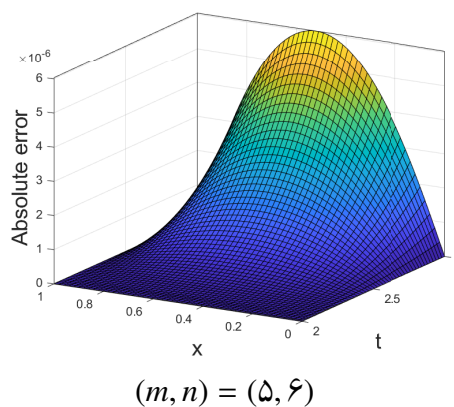
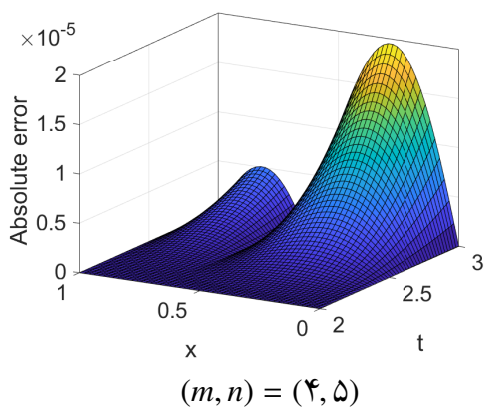
جدول ۱: نتایج بدست آمده برای مثال ۱.۷ با استفاده از روش پیشنهادی به ازای چند مقدار α و چند انتخاب (m, n) .

$\alpha = 0.95$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 0.50$		$\alpha = 0.25$		n	m
CO	Λ_u	CO	Λ_u	CO	Λ_u	CO	Λ_u		
-	$1/0.906 \times 10^{-4}$	-	$1/0.906 \times 10^{-4}$	-	$1/0.906 \times 10^{-4}$	-	$1/0.906 \times 10^{-4}$	4	3
6/4333	$4/0.778 \times 10^{-6}$	6/4090	$4/1288 \times 10^{-6}$	6/3849	$4/1800 \times 10^{-6}$	6/3696	$4/2128 \times 10^{-6}$	5	4
2/4005	$1/5407 \times 10^{-6}$	2/3523	$1/5907 \times 10^{-6}$	2/3257	$1/6279 \times 10^{-6}$	2/3104	$1/6509 \times 10^{-6}$	6	5
11/6939	$3/0.123 \times 10^{-8}$	11/5442	$3/2708 \times 10^{-8}$	11/8077	$3/0.633 \times 10^{-8}$	11/9167	$2/9947 \times 10^{-8}$	7	6
5/0.214	$7/10.43 \times 10^{-9}$	4/5305	$8/8841 \times 10^{-9}$	4/9657	$7/3414 \times 10^{-9}$	5/0.389	$7/0.273 \times 10^{-9}$	8	7

مثال ۲.۷. معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه (۱.۱)، را به گونه‌ای در نظر بگیرید که در آن $(x, t) \in [0, \frac{3}{4}] \times [1, 2]$



شکل ۱: نمودار جواب تقریبی برای $u(x, t)$ به ازای $\alpha = 0.25$ و $(m, n) = (7, 8)$ در مثال ۱.۷.



شکل ۲: نتایج خطای مطلق به ازای $\alpha = 0.25$ برای m و n های مختلف در مثال ۱.۷.

$$0 < \alpha \leq 1$$

$$f(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma\left(\left(\frac{9}{2}\right) - \alpha\right)} \ln(t) \frac{5}{2}^{-\alpha} \sinh(x) + \ln(t) \frac{5}{2} \sinh(x) + \ln(t) \frac{5}{2} \cosh(x) + \ln(t)^{\frac{5}{2}} \sinh(x) \cosh(x),$$

و

$$\begin{cases} u_0(x) = 0, & x \in \left[0, \frac{3}{4}\right], \\ u_1(t) = u_2(t) = 0, & t \in [1, 2], \\ u_3(t) = (\ln(t))^{\frac{5}{2}} \sinh\left(\frac{3}{4}\right), & t \in [1, 2], \\ u_4(t) = (\ln(t))^{\frac{5}{2}} \sinh\left(\frac{3}{4}\right), & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

جواب دقیق این مساله به صورت زیر است

$$u(x, t) = (\ln(t))^{\frac{5}{2}} \sinh(x). \quad (4.7)$$

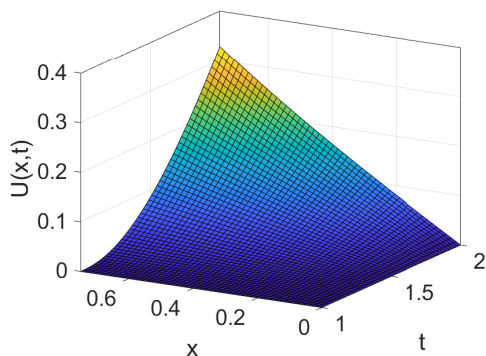
مساله کسری مورد نظر با استفاده از روش ترکیبی ارایه شده در قسمت قبل حل گردیده است. خطای مطلق و مرتبه همگرایی مربوط به مقدارهای مختلف (m, n) و α در جدول ۲ گزارش شده است. با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۲، می‌توان به راحتی مشاهده کرد که با افزایش تعداد پایه‌ها دقت نتایج به دست آمده بهتر می‌شود. جواب تقریبی مساله به ازای $(m, n) = (8, 8)$ و $\alpha = 0.75$ در شکل ۳ ارایه شده است. هم‌چنین، به ازای مقادیر مختلف (m, n) با $\alpha = 0.75$ نمودارهای خطای مطلق در شکل ۴ می‌توان مشاهده کرد. با توجه به جدول و شکل‌های گزارش شده می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی برای این مثال، روشی کافی با دقت بالا می‌باشد.

جدول ۲: نتایج بدست آمده برای مثال ۲.۷ با استفاده از روش پیشنهادی به ازای چند مقدار α و چند انتخاب (m, n) .

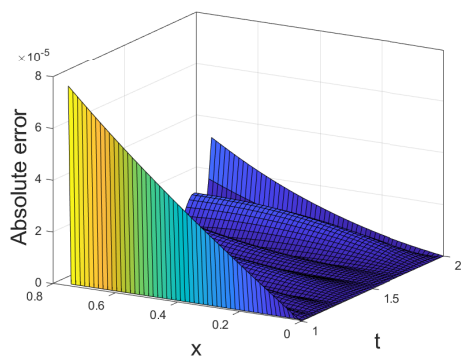
$\alpha = 0.95$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 0.50$		$\alpha = 0.25$		n	m
CO	Λ_u	CO	Λ_u	CO	Λ_u	CO	Λ_u		
-	$2/2318 \times 10^{-5}$	-	$2/2286 \times 10^{-5}$	-	$2/2279 \times 10^{-5}$	-	$2/2280 \times 10^{-5}$	4	4
2/7723	$6/4762 \times 10^{-6}$	2/7617	$6/4822 \times 10^{-6}$	2/7639	$6/4891 \times 10^{-6}$	2/7635	$6/4905 \times 10^{-6}$	5	5
2/7818	$2/3484 \times 10^{-6}$	2/7966	$2/3380 \times 10^{-6}$	2/8002	$2/3374 \times 10^{-6}$	2/8005	$2/3376 \times 10^{-6}$	6	6
2/7365	$1/0101 \times 10^{-6}$	2/7479	$1/0021 \times 10^{-6}$	2/7484	$1/0017 \times 10^{-6}$	2/7483	$1/0018 \times 10^{-6}$	7	7
2/7408	$4/8582 \times 10^{-7}$	2/7603	$4/7946 \times 10^{-7}$	2/7617	$4/7909 \times 10^{-7}$	2/7617	$4/7914 \times 10^{-7}$	8	8

۸. نتیجه‌گیری

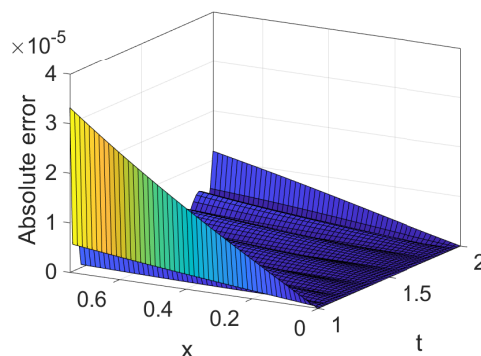
در این مقاله، از مشتق کاپوتو-هادامارد برای تعریف معادله دیفرانسیل کسری رزنو استفاده شد. یک روش عددی براساس چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین و توابع برنشتاین لگاریتمی برای حل این مساله ارایه شد. در روش پیشنهادی، با بسط عبارت کسری مساله مورد نظر با استفاده از یک تقریب دورگه، به کارگیری ماتریس انتگرال کسری توابع برنشتاین لگاریتمی و ماتریس‌های مشتقات معمولی مرتبه‌های اول، دوم و چهارم چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برنشتاین و استفاده از روش هم‌محلی، حل مساله مورد بررسی به حل یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی تبدیل شد. یک جواب تقریبی برای مساله اصلی با حل کردن دستگاه جبری تولید شده بدست آمد. در نهایت، با ارایه دو مثال عددی اعتبار و کارایی روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج بدست آمده نشان دهنده توانایی و دقت بالای روش پیشنهاد شده برای حل این گونه مسایل می‌باشد. به عنوان کارهای تحقیقاتی آینده، ایده مورد استفاده در این مطالعه برای ساخت توابع لگاریتمی برنشتاین را می‌توان برای سایر چند



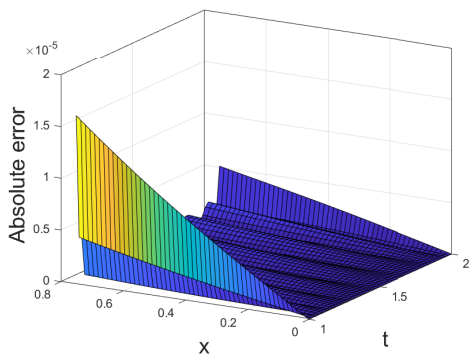
شکل ۳: نمودار جواب تقریبی برای $u(x, t)$ به ازای $\alpha = 0.75$ و $(m, n) = (8, 8)$ در مثال ۲.۷.



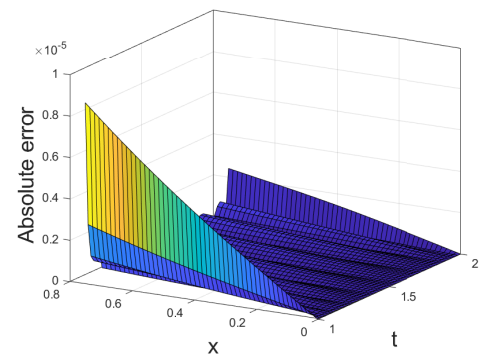
$(m, n) = (5, 5)$



$(m, n) = (6, 6)$



$(m, n) = (7, 7)$



$(m, n) = (8, 8)$

شکل ۴: نتایج خطای مطلق به ازای $\alpha = 0.75$ برای چند مقدار مختلف $m = n$ در مثال ۲.۷.

جمله‌ای‌های متعامد به کار برد. همچنین می‌توان شکل کسری زمان هادامارد معادلاتی مانند شرودینگر، هلمهولتز، سوپولف و غیره را معرفی کرد و روش عددی ارائه شده در این تحقیق را برای آنها گسترش داد.

مراجع

- [1] Atouani N. and Omrani K., Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation, *Computers and Mathematics with Applications*.(2013),**66**(3): 289-303.
- [2] Almeida R., A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.(2017), **44**: 460-481.
- [3] Choo S. M., Chung S. K. and Kim K. I., A discontinuous Galerkin method for the Rosenau equation, *Applied Numerical Mathematics*.(2008), **58**(6): 783-799.
- [4] Danumjaya P. and Balaje K., Discontinuous Galerkin finite element methods for one-dimensional Rosenau equation, *The Journal of Analysis*.(2022), **30**(4): 1407-1426.
- [5] Garra R., Mainardi F. and Spada G., A generalization of the Lomnitz logarithmic creep law via Hadamard fractional calculus, *Chaos, Solitons and Fractals*.(2017), **102**: 333-338.
- [6] Hadamard J., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *Journal de mathématiques pures et appliquées*.(1892), **8**: 101-186.
- [7] Heydari M. H. and Avazzadeh Z., Orthonormal Bernstein polynomials for solving nonlinear variable-order time fractional fourth-order diffusion-wave equation with nonsingular fractional derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.(2021), **44**(4): 3098-3110.
- [8] Heydari M. H., Hosseininia M. and Razzaghi M., Logarithmic Chelyshkov functions for one-and two-dimensional nonlinear Caputo–Hadamard fractional Rosenau equation, *Chaos, Solitons and Fractals*.(2024), 185.
- [9] Jarad F., Abdeljawad T. and Baleanu D., Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Advances in Difference Equations*.(2012), 1-8.
- [10] Joy K. I., Bernstein polynomials, *On-Line Geometric Modeling Notes*.(2000),**13**(4).
- [11] Khan N., Ali F., Ahmad Z., Murtaza S., Ganie A. H., Khan I. and Eldin S. M., A time fractional model of a Maxwell nanofluid through a channel flow with applications in grease, *Scientific Reports*.(2023), **13**(1): 4428.
- [12] Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, 2006.
- [13] Kilbas A. A., Hadamard-type fractional calculus, *Journal of the Korean Mathematical Society*.(2001), **38**(6): 1191-1204.
- [14] Li C. and Cai M., Theory and Numerical Approximations of Fractional and Integral Derivatives, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2019.
- [15] Maamar M. H., Ehrhardt M. and Tabharit L., A nonstandard finite difference scheme for a time-fractional model of Zika virus transmission, *Mathematical Biosciences and Engineering*.(2024), **21**(1): 924-962.
- [16] Naik P. A., Zehra A., Farman M., Shehzad A., Shahzeen S. and Huang Z., Forecasting and dynamical modeling of reversible enzymatic reactions with a hybrid proportional fractional derivative, *Frontiers in Physics*.(2024), **11**: 1307307.
- [17] Nisar K. S., Farman M., Abdel-Aty M. and Cao J., A review on epidemic models in sight of fractional calculus, *Alexandria Engineering Journal*.(2023), **75**: 81-113.
- [18] Rosenau, Ph., A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line, *Physica Scripta*.(1986), **34**(6B): 827.
- [19] Rosenau, Ph., Dynamics of dense discrete systems: high order effects, *Progress of Theoretical Physics*.(1988), **79**(5): 1028–1042.
- [20] Safdari-Vaighani A., Larsson E. and Heryudono A., Radial basis function methods for the Rosenau equation and other higher order PDEs, *Journal of Scientific Computing*.(2018),**75**: 1555-1580.
- [21] Omrani K., Abidi F., Achouri T. and Khiari N., A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation, *Applied Mathematics and Computation*.(2008), **201**(1-2): 35-43.
- [22] Zaky, M. A., and Hendy, A. S. and Suragan, D., Logarithmic Jacobi collocation method for Caputo–Hadamard fractional differential equations, *Applied Numerical Mathematics*.(2022), **181**: 326–346.