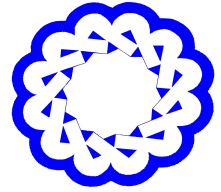


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)  
رفسنجان

### تحلیل و تعمیم تبدیل موجک پیوسته بر پایه قیچک‌های پیوسته چندمتغیره فاطمه اسماعیل‌زاده<sup>آ</sup>

گروه ریاضی، واحد بجنورد، دانشگاه آزاد اسلامی، بجنورد، ایران

#### چکیده

در این مقاله ابتدا مروری جامع بر مفاهیم پایه‌ای و تعاریف مربوط به تبدیل قیچک پیوسته چندمتغیره و همچنین تبدیل موجک پیوسته ارائه می‌شود. سپس با بهره‌گیری از چارچوب نظری موجک‌ها، به تحلیل دقیق‌تر و عمیق‌تری از تبدیلات قیچک پیوسته چندمتغیره پرداخته می‌شود. هدف این مطالعه، بررسی روابط ساختاری و شباهت‌های مفهومی میان این دو نوع تبدیل و تحلیل ویژگی‌های مشترک آن‌ها در حوزه آنالیز هارمونیک است.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۴) ©

#### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۱ مرداد ۱۴۰۴

پذیرفته شده: ۱۰ آذر ۱۴۰۴

دسترسی آنلاین: ۱۰ دی ۱۴۰۴

کلمات کلیدی:

تبدیل قیچک پیوسته

چندمتغیره، تبدیل موجک

پیوسته، شرط پذیرفتنی،

ماتریس برش، نمایش

انتگرال‌پذیر مربعی.

#### ۱. مقدمه

تحلیل هارمونیک مدرن به شدت بر نظریه نمایش گروه‌ها، به ویژه برای ساخت و تعمیم تبدیلات حالت همدوس، تکیه دارد. بسیاری از ابزارهای اساسی و پرکاربرد در پردازش سیگنال، مانند تبدیل گابور، تبدیل موجک و تبدیل زک، می‌توانند به شکلی یکپارچه به عنوان تبدیلات حالت همدوس مرتبط با ساختار جبری گروه‌های ضرب نیم مستقیم فرمول‌بندی شوند. این چارچوب یکپارچه، که ساختار این حوزه تحقیقاتی را تشکیل می‌دهد، به طور گسترده در مقالات مختلف مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [۲، ۳]. به طور خاص، ساختار تبدیل گابور، تبدیل زک و تعمیمات آن‌ها مانند تبدیل بسته‌های موجی در این بستر نظری تحلیل شده‌اند [۶، ۷]. در میان این تبدیلات، تبدیل موجک پیوسته که خود نمونه‌ی بارزی از یک تبدیل همدوس روی گروه آفین به عنوان یک گروه ضرب نیم مستقیم است [۴، ۵] — به دلیل توانایی بالای خود در تحلیل سیگنال‌های تک‌متغیره و ارائه تحلیل‌های چندمقیاسی، در زمینه‌های مختلفی مانند پردازش صوت، فشرده‌سازی داده‌ها، حذف نویز و بازسازی سیگنال‌ها به طور گسترده به کار گرفته شد. با این حال، هنگامی که با داده‌های چندبعدی و به ویژه سیگنال‌های

\* نویسنده مسئول

آدرس ایمیل: [esmaeelzadeh@iau.ac.ir](mailto:esmaeelzadeh@iau.ac.ir)

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۴) ©

<http://doi.org/10.22072/wala.2025.2066297.1474>

دوبعدی مانند تصاویر روبرو می‌شویم، محدودیت‌های تبدیل موجک کلاسیک در تشخیص ویژگی‌های جهت‌دار و ساختارهای پیچیده هندسی به وضوح آشکار می‌شود. این محدودیت‌ها، منجر به ظهور نسل جدیدی از تبدیلات چندمقیاسی ناهمسانگرد با توانایی بالاتر در مدل‌سازی ساختارهای جهت‌دار، از جمله خمک‌ها و قیچک‌ها گردید. این تبدیلات با در نظر گرفتن ویژگی‌های چندبعدی و جهت‌دار سیگنال‌ها، ابزارهای قوی‌تری برای تحلیل، فشرده‌سازی و پردازش تصاویر فراهم می‌کنند. تبدیل قیچک که برای نخستین بار در سال ۲۰۰۵ توسط گوئو، کوتینیوک، لاباته، لیم و وایس معرفی شد، از این دست تبدیلات است و ساختار نظری آن مبتنی بر فضای پیوسته و هندسه چندبعدی می‌باشد. برخلاف خمک‌ها که از دوران و مختصات قطبی استفاده می‌کنند، تبدیل قیچک از عملگر برش در فضای کارترین بهره می‌گیرد؛ این ویژگی امکان نمایش دقیق‌تر و کارآمدتر جهت‌ها و ویژگی‌های لبه‌ای در داده‌های چندبعدی را فراهم می‌کند. به علاوه، قیچک‌ها به دلیل ماهیت کارترینی خود، سازگاری بهتری با داده‌های دیجیتالی و الگوریتم‌های عددی دارند. در این مقاله، با اتکا بر مبانی نظری ذکر شده، به بررسی و تحلیل رابطه ساختاری میان تبدیل قیچک پیوسته چندمتغیره و تبدیل موجک پیوسته پرداخته می‌شود.

## ۲. پیش‌نیازها

برای  $a > 0$  و  $s \in \mathbb{R}$ ، فرض کنید:

$$A_a := \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & \sqrt{a} \end{bmatrix}, \quad S_s := \begin{bmatrix} 1 & s \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

به ترتیب ماتریس‌های اتساع و برش باشند که روی صفحه عمل می‌کنند. یک نمایش یکانی  $\pi$  از گروه قیچک  $\mathbb{S} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  به عملگرهای یکانی  $L^2(\mathbb{R}^2)$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$[\pi(a, s, t)\psi](x) = a^{-\frac{1}{2}} \psi(A_a^{-1} S_s^{-1}(x - t)).$$

برای  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ، تبدیل قیچک پیوسته به صورت زیر است:

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle,$$

که  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  و  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ضرب داخلی روی  $L^2(\mathbb{R}^2)$  است. یعنی این تبدیل می‌تواند از یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از یک گروه  $\mathbb{S}$  به دست آید. بنابراین تبدیل قیچک را می‌توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد. اولین مرحله برای تعمیم تبدیلات قیچک به بعد بالاتر ( $\mathbb{R}^d, d \geq 3$ )، تعیین ماتریس برش مناسب می‌باشد. فرض کنید فضای برداری  $V$  با بعد  $d$  و زیر فضای  $W$  از آن با بعد  $k$  داده شده باشند. برش فضای  $W$  و انتقال همه بردارها موازی با  $W$  باید ثابت باشند. یعنی برای  $V = W \oplus W'$  و  $v = w + w'$ ، عملگر برش  $S$  به صورت  $S(v) = w + (w' + s(w'))$  توصیف می‌شود که  $s$  یک نگاشت خطی از  $W'$  به  $W$  است. در این صورت نسبت به یک پایه مناسب از  $V$ ، عملگر برش  $S$  متناظر با یک ماتریس بلوکی از فرم  $\begin{bmatrix} I_k & s^T \\ \cdot & I_{d-k} \end{bmatrix}$  به دست می‌آید که  $s \in \mathbb{R}^{d-k, k}$ . لذا چگونگی انتخاب بلوک  $s$  مشکل پیش رو است. زیرا هدف این است که یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی داشته باشیم. معمولاً تعداد پارامترها باید با بعد فضا متناسب باشند، در غیر این صورت گروه یا خیلی بزرگ یا خیلی کوچک نسبت به این نمایش می‌شود. بنابراین یک انتخاب طبیعی می‌تواند  $s \in \mathbb{R}^{d-1, 1}$  باشد یعنی  $k = 1$ . در واقع نشان داده می‌شود که با این انتخاب، تبدیل قیچک چندمتغیره به عنوان یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از یک گروه  $2d$ -پارامتر است. (برای جزئیات بیشتر [۹، ۱] را ببینید.)

## ۳. نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از گروه قیچک چند متغیره

در این بخش نمایش انتگرال‌پذیر مربعی روی گروه قیچک در بعد بالاتر توصیف می‌گردد و تبدیل قیچک پیوسته چند متغیره روی فضای  $L^2(\mathbb{R}^d)$  معرفی می‌شود. در ادامه  $I_d$  را یک ماتریس همانی  $d \times d$  و  $o_d$  ماتریس  $d \times d$  با درایه‌های صفر در نظر می‌گیریم.

ماتریس اتساع متناظر با یک پارامتر  $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$  را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$A_a := \text{diag}(a_1(a), \dots, a_d(a)),$$

که  $a_1(a) = a, a_j(a) = a^{\alpha_j}$  با  $\alpha_j \in (0, 1)$  و  $j = 2, \dots, d$ . توجه شود که فاکتورهای اتساع در ماتریس قطری  $A_a$  در یک روش غیرایزوتوپ انتخاب می‌شوند و بدین جهت انتخاب مناسب  $A_a$  به صورت زیر خواهد بود:

$$A_a := \begin{bmatrix} a & \cdot_{d-1}^T \\ \cdot_{d-1} & \text{sgn}(a)|a|^{1/d} I_{d-1} \end{bmatrix}$$

و برای  $s \in \mathbb{R}^{d-1}$  ماتریس برش نیز به صورت زیر است:

$$S_s := \begin{bmatrix} 1 & s^T \\ \cdot_{d-1} & I_{d-1} \end{bmatrix}$$

به سادگی می‌توان دید که

$$S_s^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -s^T \\ \cdot_{d-1} & I_{d-1} \end{bmatrix}$$

و همچنین

$$S_s A_a S_{s'} A_{a'} = S_{s+|a|^{1-1/d} s'} A_{aa'}.$$

مجموعه  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{d-k,k} \times \mathbb{R}^d$  با عمل دوتایی

$$(a, s, t) \circ (a', s', t') = (aa', s + A_{a,1}^{-1} s' A_{a,1}, t + S_s A_a t'),$$

یک گروه موضعا فشرده است که در آن

$$A_{a,1} := \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_k), \quad A_{a,2} := \text{diag}(a_{k+1}, \dots, a_d).$$

هم‌چنین اندازه‌ها چپ و راست روی این گروه به ترتیب برابر است با:

$$d\mu_l(a, s, t) = \frac{|\det A_{a,2}|^{k-1}}{|a| |\det A_{a,1}|^{d-k+1}} da ds dt,$$

و

$$d\mu_r(a, s, t) = \frac{1}{|a|} da ds dt.$$

برای اطلاعات بیشتر [۸] را ببینید.

قابل ذکر است که  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^d$  را گروه قیچک تعمیم یافته نامیم و آن را با  $\mathbb{S}$  نمایش می‌دهیم و اندازه‌ها چپ و

راست آن به ترتیب برابر است با:

$$d\mu_l(a, s, t) = \frac{1}{|a|^{d+1}} dadsdt, \quad d\mu_r(a, s, t) = \frac{1}{|a|} dadsdt.$$

برای  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  نگاشت  $\pi$  از گروه  $\mathbb{S}$  به گروه عملگرهای یکانی روی  $L^2(\mathbb{R}^d)$  تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi(a, s, t)f(x) = |\det A_a|^{-1/2} f(A_a^{-1} S_s^{-1}(x - t)).$$

می‌توان دید که  $\pi$  یک نمایش یکانی از گروه قیچک تعمیم‌یافته  $\mathbb{S}$  است (برای اثبات می‌توانید به [۱] مراجعه کنید). یک تابع غیرصفر  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  را برای نمایش  $\pi$  پذیرفتنی نامیم هرگاه

$$\int_{\mathbb{S}} |\langle \psi, \pi(a, s, t)\psi \rangle|^2 d\mu_l(a, s, t) < \infty. \quad (۱.۳)$$

اگر نمایش  $\pi$  تحویل‌ناپذیر باشد و حداقل یک تابع پذیرفتنی  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  برای آن وجود داشته باشد، در این صورت  $\pi$  را انتگرال‌پذیر مربعی نامیم.

**قضیه ۱.۳.** یک تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  برای نمایش  $\pi$  ذکر شده در بالا پذیرفتنی است اگر و فقط اگر در شرط پذیرفتنی زیر صدق کند:

$$c_\psi := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^{2d}} d\xi < \infty. \quad (۲.۳)$$

اگر  $\psi$  پذیرفتنی باشد آنگاه برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  داریم:

$$\int_{\mathbb{S}} |\langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle|^2 d\mu_l(a, s, t) = c_\psi \|f\|^2. \quad (۳.۳)$$

اثبات. با استفاده از قضیه پلانچرل داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}} |\langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle|^2 d\mu_l(a, s, t) \\ &= \int_{\mathbb{S}} |f * [\pi(a, s, \cdot)\psi^*](t)|^2 dt ds \frac{da}{|a|^{d+1}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\pi(a, s, \cdot)\psi^*}(\xi)|^2 d\xi ds \frac{da}{|a|^{d+1}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\det A_a| |\widehat{\psi}(A_a^T S_s^T \xi)|^2 d\xi ds \frac{da}{|a|^{d+1}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{|\det A_{a, \nu}|}{|a|^d} |\widehat{\psi} \left[ A_{a, \nu} \begin{pmatrix} a\xi_1 \\ \xi + \xi_1 s \end{pmatrix} \right]|^2 ds d\xi da \end{aligned}$$

که  $\pi(a, s, \cdot)\psi^*(x) = \overline{\pi(a, s, \cdot)\psi(-x)}$  قرار دهید:  $\tilde{\omega} := A_{a, \nu}(\xi + \xi_1 s)$ . در این صورت داریم:  $d\tilde{\omega} = |\det A_{a, \nu}| |\xi_1|^{d-1} ds$  بنابراین

$$\int_{\mathbb{S}} |\langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle|^2 d\mu_t(a, s, t) \\ = |a|^{-d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\xi_1|^{-(d-1)} |\widehat{\psi} \left[ \begin{smallmatrix} a\xi_1 \\ \tilde{\omega} \end{smallmatrix} \right]|^2 d\xi d\tilde{\omega} da,$$

که  $\xi = \xi^T$ . حالا قرار دهید  $a\xi_1 = \omega_1$  و  $\omega_1 da = d\omega_1$  بنابراین

$$\int_{\mathbb{S}} |\langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle|^2 d\mu_t(a, s, t) \\ = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{|\xi_1|^d}{|\omega_1|^d |\xi_1|^d} |\widehat{\psi} \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \tilde{\omega} \end{smallmatrix} \right]|^2 d\tilde{\omega} d\xi d\omega_1 \\ = c_\psi \|f\|^2.$$

با قرار دادن  $f = \psi$  نتیجه می‌شود که  $\psi$  پذیرفتنی است اگر و فقط اگر  $c_\psi$  متناهی باشد.  $\square$

یک تابع پذیرفتنی  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  را در نظر بگیرید. تبدیل قیچک پیوسته چند متغیره از  $L^2(\mathbb{R}^d)$  به توی  $L^2(\mathbb{S})$  با  $\mathcal{SH}_\psi$  نمایش می‌دهیم و برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \frac{1}{c_\psi} \langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle$$

که  $c_\psi$  تعریف شده در (۲.۳) است.

بنا به قضیه ۱.۳ تبدیل قیچک پیوسته چند متغیره  $\mathcal{SH}_\psi : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{S})$  طولیاست.

#### ۴. رابطه بین تبدیل قیچک پیوسته چندمتغیره و تبدیل موجک پیوسته

قیچک‌ها همانند با موجک‌ها مجهز به یک ساختار ریاضی غنی می‌باشند. در حقیقت قیچک‌ها می‌توانند به عنوان یک برش مناسب دیده شوند و معکوس عملگر برش به عنوان یک تبدیل موجک غیرایزوتوپ به کار برده می‌شود. بنابراین نظریه و الگوریتم‌های تبدیل موجک پیوسته می‌تواند در مورد آن‌ها به کار رود [۸]. تبدیل قیچک پیوسته مانند تبدیل موجک پیوسته می‌تواند به عنوان حالت خاصی از مفهوم کلی سیستم‌های آفین در نظر گرفته شود. در [۸] تبدیلات قیچک پیوسته در صفحه از دیدگاه موجک مورد بررسی قرار گرفته است. ما در این جا تبدیلات قیچک پیوسته چندمتغیره را از دیدگاه موجک مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا تبدیل موجک پیوسته در  $\mathbb{R}^d$  را مرور می‌کنیم و سپس به رابطه بین تبدیل قیچک پیوسته چندمتغیره و تبدیل موجک پیوسته در  $\mathbb{R}^d$  می‌پردازیم.

مجموعه  $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  با عمل دوتایی در زیر یک گروه موضعا فشرده را تشکیل می‌دهد که گروه آفین نامیده می‌شود و با  $G_{aff}$  نمایش می‌دهیم:

$$(A, t) \circ (A', t') = (AA', t + At').$$

نگاشت  $\sigma$  از گروه آفین  $G_{aff}$  به  $U(L^2(\mathbb{R}^d))$  با ضابطه زیر یک نمایش یکانی است:

$$\sigma(A, t)\psi(x) = |\det A|^{-1/2}\psi(A^{-1}(x - t)).$$

فرض کنید  $A \in GL(d, \mathbb{R})$  یک ماتریس توسیع باشد، یعنی قدرمطلق مقادیر ویژه  $A$  بزرگتر از یک هستند. از این که معکوس چنین ماتریسی انقباضی است، لذا خانواده  $\{M_a = A^{-\log a}, a > 1\}$  یک زیرگروه اختصار از  $GL(d, \mathbb{R})$  است. هم‌چنین انتخاب استاندارد  $A$ ، برای برخی  $\lambda > 1$ ،  $\lambda I$  است. بنابراین  $M_a = \text{diag}(a^{-\log \lambda})$ . تبدیل موجک پیوسته برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  روی  $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$  به صورت زیر است:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = |\det M_a|^{-1/2} \langle f, \psi(M_a^{-1}(\cdot - t)) \rangle.$$

تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  را برای  $\sigma$  پذیرفتنی گوئیم هرگاه

$$\int_{G_{aff}} |\langle \psi, \sigma(a, t)\psi \rangle|^2 d\lambda_1(a, t) < \infty$$

که در آن  $\lambda_1$  اندازه هارچپ روی گروه آفین است. در [۱] نشان داده شده است که  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  را پذیرفتنی است اگر و تنها اگر  $\psi$  در شرط پذیرفتنی

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^d} d\xi < \infty$$

صدق کند.

در زیر قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که ارتباط بین تبدیل قیچک پیوسته چندمتغیره و تبدیل موجک پیوسته در  $\mathbb{R}^d$  را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱.۴.** با نمادهای ذکر شده در بالا، فرض کنید  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  باشد. در این صورت برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  و  $(a, s, t) \in \mathbb{S}$  داریم:

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \mathcal{W}_{\psi \circ S_s^{-1}} f(a, t),$$

و

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \mathcal{W}_\psi (f \circ S_s)(a, S_s^{-1}t).$$

**اثبات.** با محاسبات ساده می‌توان دید  $S_s^{-1}A_a^{-1} = A_a^{-1}S_s^{-1}$ . بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) &= |\det A|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\psi(A_a^{-1}S_s^{-1}(x - t))} dx \\ &= |\det A|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\psi S_s^{-1}(A_a^{-1}(x - t))} dx \\ &= \mathcal{W}_{\psi \circ S_s^{-1}} f(a, t). \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) &= |\det A|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\psi(A_a^{-1} S_a^{-1}(x-t))} dx \\
&= |\det A|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(S_s x) \overline{\psi(A_a^{-1}(x - S_a^{-1}t))} dx \\
&= \mathcal{W}_\psi(f \circ S_s)(a, S_s^{-1}t).
\end{aligned}$$

□

مثال ۲.۴. برای گروه قیچک  $\mathbb{S} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  و  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ، تبدیل قیچک پیوسته

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \langle f, a^{-\frac{t}{s}} \psi(A_a^{-1} S_s^{-1}(\cdot - t)) \rangle,$$

را در نظر بگیرید که در آن  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  و  $S_s, A_a$  ماتریس‌های تعریف شده در (۱.۲) می‌باشند. در این صورت داریم:

$$\mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \mathcal{W}_{\psi \circ S_s^{-1}} f(a, t),$$

که  $\mathcal{W}_\psi$  تبدیل پیوسته موجک آفین دوبعدی می‌باشد.

مراجع

- [1] S.T. Ali, J-P. Antoine, J-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] A. Arefijamaal and R.A. Kamyabi-Gol, On construction of coherent states associated with semidirect products, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.* **6** (5) (2008) 749-759.
- [3] A. Arefijamaal and R.A. Kamyabi-Gol, On the square integrability of quasi regular representation on semidirect product groups, *J. Geom. Anal.* **19**(3) (2009) 541-552.
- [4] A. Arefijamaal, A. Ghaani Farashahi, Zak transform for semidirect product of locally compact groups, *Anal. Math. Phys.* **3** (3)(2013) 263-276.
- [5] A. Ghaani Farashahi, Multivariate wave-packet transforms, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Journal of Analysis and its Applications)*, **36**,(4)(2017), 481-500.
- [6] A. Ghaani Farashahi, Continuous partial Gabor transform for semi-direct product of locally compact groups. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **38** (2) (2015) 779-803.
- [7] A. Ghaani Farashahi, Abstract harmonic analysis of wave packet transforms over locally compact Abelian groups, *Banach J. Math. Anal.* **11** (1) (2017) 50-71.
- [8] S. Dahlke, G. Kutyniok, G. Steidl, G. Teschke, *Multivariate shearlet transform, shearlet coorbit spaces and their structural properties*, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **27** (2)(2009), 195-214
- [9] R. A. Kamyabi Gol, V. Atayi, *Abstract shearlet transform*, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon. Stevin.* 669-681, 2015.
- [10] G. Kutyniok, T. Sauer, *From wavelets to shearlets and back again*, In M Neamtu and L.L. Schumaker, editors, *Approximation Theory XII*, 2007.