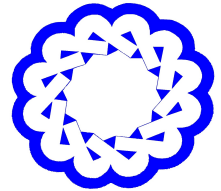


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)  
رفسنجان

# حل عددی معادله انتگرال ولترای کوردیال با استفاده از موجک چلیشکف سعیده طیبی نژاد<sup>\*</sup>، فخرالدین محمدی<sup>\*</sup>

آگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

### چکیده

این مقاله به حل عددی دسته‌ای از معادلات انتگرال ولترای کوردیال می‌پردازد که در مطالعه برخی از مسائل هدایت گرما با شرایط مرزی آمیخته پدیدار می‌شوند. ابتدا خانواده توابع موجک‌های چلیشکف به عنوان یک پایه متعامد معرفی و برای آن ماتریس عملگر انتگرال تعریف می‌شود. سپس با استفاده از این پایه‌های موجکی و روش گالرکین، جواب تقریبی معادلات انتگرال مورد نظر محاسبه می‌شود. آنالیز خطای تقریب توسط پایه‌های موجک چلیشکف و همگرایی روش گالرکین معرفی شده نیز ارائه می‌شود. در پایان، با ارائه چند مثال عددی دقت و کارایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۴) ©

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۲۳ آذر ۱۴۰۲  
پذیرفته شده: ۲۳ تیر ۱۴۰۳  
دسترسی آنلاین: ۲۳ تیر ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

معادله انتگرال ولترای  
کوردیال، موجک چلیشکف،  
روش گالرکین.

### ۱. مقدمه

معادله انتگرال ولترای زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) = f(t) + \int_0^t t^{-1} (s/t)^{\mu-1} u(s) ds, \quad \mu > 0, \quad t \in I := [0, T], \quad (1.1)$$

که در مطالعه مسائل هدایت گرما با شرایط مرزی آمیخته ایجاد می‌شود [۲]. به عنوان یک مثال ساده از چنین مسائلی، مسئله هدایت گرما به فرم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

با شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} u(x, -\infty) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - u(0, t) &= \phi_1(t), \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) - u(l, t) &= \phi_2(t), \end{aligned}$$

با بیان جواب معادله هدایت گرمای فوق بر حسب پتانسیل‌های تک لایه، دستگاهی شامل دو معادله انتگرال به دست می‌آید. تحت شرایط خاصی برای پارامتر مرزی  $l$ ، این دستگاه را می‌توان ساده کرد و به صورت دو معادله انتگرال ولترای مستقل به فرم زیر بیان کرد:

$$F(t) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\ln(t/s)}} \left(\frac{s}{t}\right)^\mu \frac{1}{s} F(s) ds = f(t), \quad t \in [0, T].$$

با استفاده از رویکرد معرفی شده در مرجع [۲۱، ۱۰]، معادله فوق را می‌توان به یک معادله انتگرال از نوع (۱.۱) تبدیل کرد. عملگر انتگرال موجود در معادله انتگرال (۱.۱) حالت خاصی از یک عملگر انتگرال به فرم زیر است:

$$(\mathcal{V}_\varphi u)(t) := \int_0^t t^{-1} \varphi(s/t) q(t, s) u(s) ds, \quad \varphi \in L^1(0, 1), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

که عملگر انتگرال ولترای کوردیال نام دارد. هر معادله انتگرال که شامل چنین عملگری باشد یک معادله انتگرال ولترای کوردیال نامیده می‌شود. عملگر انتگرال (۲.۱) برای اولین بار توسط شخصی به نام گنادی واینیکو<sup>۱</sup> معرفی شد و خواص آن مورد بررسی قرار گرفت [۳۳، ۳۲]. علاوه بر وی، مؤلفان دیگری نیز به بررسی خواص این عملگر و مطالعه روش‌هایی برای حل انواع معادلات انتگرال ولترای کوردیال پرداختند [۳، ۸، ۱۱، ۳۴، ۳۵، ۳۶]. در حالت کلی، اگر  $q(0, 0) = 0$ ، عملگر (۲.۱) فشرده، در غیراین صورت، یک عملگر غیرفشرده است. بنابراین معادله (۱.۱) شامل یک عملگر انتگرال ولترای کوردیال غیرفشرده است. اثبات وجود، یکتایی و خواص همواری جواب این معادله در حالت‌های  $0 < \mu \leq 1$  و  $\mu > 1$  مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۹]. ثابت می‌شود که برای  $\mu > 1$ ، اگر  $f \in C^m[0, T]$ ، معادله (۱.۱) دارای یک جواب یکتا در  $C^m[0, T]$  است؛ و وقتی  $0 < \mu \leq 1$ ، این معادله خانواده‌ای از جواب‌ها در  $C[0, T]$  دارد که تنها یکی از آنها در  $C^1[0, T]$  قرار دارد. از جمله روش‌هایی که برای حل معادله (۱.۱) به کار برده شده است می‌توان به روش هم‌محلی-درونیاب اسپلاین [۳۵]، روش اویلر [۲۰، ۲۱] و قانون انتگرال‌گیری عددی [۲۳، ۲۴] اشاره کرد. همچنین، دیگو و لیما خواص ابرهمگرایی روش‌های هم‌محلی اسپلاین را برای حل این معادله در حالت  $\mu > 1$  بررسی کردند [۱۴]. در مرجع [۱۲]، دیگو برای حل این معادله در حالت  $\mu > 1$ ، از روش‌های هم‌محلی اسپلاین روی شبکه‌های یکنواخت استفاده کرده است.

موجک‌ها کاربردهای وسیعی در زمینه علوم و مهندسی دارند. استفاده موفقیت آمیز از موجک‌ها در پردازش تصویر و سیگنال در دهه هشتاد میلادی موجب شد تا تجزیه و تحلیل آنها از اهمیت بیشتری برخوردار شود. استفاده از موجک در فشرده‌سازی داده‌هایی مانند اثر انگشت، عکس‌های ماهواره‌ای آب و هوا و اشعه ایکس در پزشکی، حذف نویز از داده‌های پرسروصدا، تشخیص رفتارهای خود متشابه در یک سری زمانی و آهنگ‌های موسیقی تنها نمونه کوچکی از کاربرد موجک‌ها است [۹، ۱۶]. همچنین، تحقیقات زیادی بر روی پایه‌های متعارف هموار به کار برده شده در الگوریتم فشرده‌سازی در پردازش تصویر و سیگنال انجام شد تا از این ویژگی توابع موجک در زمینه‌های دیگری مانند آنالیز عددی از جمله در نظریه تقریب و تحلیل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل استفاده شود [۴، ۵، ۶، ۲۵]. تاکنون انواع موجک‌ها از جمله موجک‌های لژاندر، چبیشف و بی-اسپلاین برای حل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۸، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۳۰].

<sup>1</sup>Gennadi Vainikko

توابع متعامد موجک چلیشکف یکی از جدیدترین انواع موجک‌های معرفی شده در مقالات هستند [۲۹]. در این تحقیق، با بهره‌گیری از پایه‌های موجک‌های چلیشکف، روشی عددی برای حل معادله (۱.۱) در حالت‌های  $0 < \mu < 1$  و  $\mu > 1$  ارائه می‌دهیم.

ساختار کلی این مقاله به صورت زیر خواهد بود: مروری اجمالی بر خواص چندجمله‌ای‌ها و موجک‌های چلیشکف در بخش ۲ ارائه می‌شود. در بخش ۳ با استفاده از این پایه‌های متعامد موجک روشی عددی برای حل دسته خاصی از معادلات انتگرال ولترای کوردیال معرفی می‌کنیم. آنالیز خطا و همگرایی روش معرفی شده را در بخش ۴ بررسی می‌کنیم. در بخش ۵ دقت و کارایی روش ارائه شده را با چند مثال عددی نشان می‌دهیم. در پایان، نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارائه می‌شود.

## ۲. موجک چلیشکف و خواص آن

در این بخش، ابتدا چندجمله‌ای‌های چلیشکف معرفی و سپس با استفاده از خواص آنها موجک‌های چلیشکف ساخته می‌شوند. همچنین، ماتریس‌های عملگر و تبدیل برای پایه‌های موجک چلیشکف محاسبه می‌شوند.

از جمله مهمترین چندجمله‌ای‌های متعامدی که اخیراً معرفی شده است می‌توان به چندجمله‌ای‌های چلیشکف اشاره کرد که توسط شخصی به نام ولادیمیر چلیشکف<sup>۲</sup> معرفی شدند [۷، ۱۵]. این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{p}_n(t) = \sum_{j=0}^{M-n} \alpha_{j,n} t^{n+j}, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (1.2)$$

که در آن

$$\alpha_{j,n} = \sqrt{2n+1} (-1)^j \binom{M-n}{j} \binom{M+n+j+1}{M-n}. \quad (2.2)$$

چندجمله‌ای‌های چلیشکف در بازه  $[0, 1]$  نسبت به تابع وزن  $w(t) = 1$  متعامدند و رابطه تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر قابل بیان است:

$$\int_0^1 \mathbf{p}_m(t) \mathbf{p}_n(t) dt = \delta_{mn}, \quad (3.2)$$

که در آن  $\delta_{mn}$  تابع دلتای کرونکر است. هر تابع  $g(t) \in L^2(0, 1)$  را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های چلیشکف به صورت

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{p}_i(t), \quad (4.2)$$

توسیع داد که در آن  $c_i = \langle g(t), \mathbf{p}_i(t) \rangle$  و  $(\cdot, \cdot)$  نماد ضرب داخلی نسبت به تابع وزن  $w(t) = 1$  است. با استفاده از تعداد معدودی از این چندجمله‌ای‌ها، بسط تقریبی تابع  $g(t)$  به صورت

$$g(t) \simeq g_M(t) = \sum_{i=0}^M c_i \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\phi}(t), \quad (5.2)$$

<sup>2</sup>Vladimir Chelyshkov

به دست می‌آید که در آن  $\mathbf{C}$  و  $\phi(t)$  ماتریس‌هایی از مرتبه  $1 \times (M+1)$  با درایه‌هایی به صورت زیرند:

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_M]^T, \quad \phi(t) = [\mathbf{p}_0(t), \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_M(t)]^T. \quad (6.2)$$

نکته ۱.۲. با توجه به تعریف چند جمله‌ای‌های چلیشکف، واضح است که برای هر عدد صحیح مثبت  $M$  چندجمله‌ای‌های  $\mathbf{p}_n(t)$ ،  $n = 0, 1, \dots, M$ ، همگی از درجه یکسان  $M$  هستند. این در حالی است که برای سایر چندجمله‌ای‌های متعامد معمولی در بازه  $[0, 1]$  مانند چندجمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر و چبیشف، چندجمله‌ای  $n$ -ام  $p_n(x)$  از درجه  $n$  می‌باشد. این تفاوت اساسی می‌تواند نقطه قوت چندجمله‌ای‌ها و موجک‌های چلیشکف در مقایسه با سایر انواع موجک‌ها مانند موجک لژاندر و چبیشف باشد.

### ۱.۲. موجک چلیشکف

به‌طور کلی، موجک‌ها خانواده‌ای از توابعند که از عمل اتساع و انتقال تابع منفرد  $h$  به نام موجک مادر، به صورت زیر ایجاد می‌شوند [۱۷]:

$$h_{a,b}(t) = |a|^{-1/\gamma} h\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

در این تعریف  $a$  پارامتر اتساع و  $b$  پارامتر انتقال است. با توجه به نوع کاربرد موجک‌ها در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی، این پارامترها مقادیر پیوسته یا گسسته اختیار می‌کنند. با محدود کردن این پارامترها به مقادیر گسسته  $a = a^{-k}$ ،  $b = nb \cdot a^{-k}$ ، به طوری که  $a > 1$ ،  $b > 0$ ،  $n, k$  اعداد صحیح مثبتند، خانواده موجک‌های گسسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\psi_{k,n}(t) = |a|^{k/\gamma} \psi(a^k t - nb),$$

که تشکیل یک پایه موجک در فضای  $L^2(\mathbb{R})$  می‌دهد. توجه کنید که اگر قرار دهید  $a = 2$  و  $b = 1$ ، آنگاه  $\{\psi_{k,n}(t)\}$  تشکیل یک پایه متعارف موجک می‌دهد. موجک‌های چلیشکف در بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۹]:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} 2^{n/\gamma} \mathbf{p}_m(2^k t - n), & \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (7.2)$$

که در آن  $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ،  $m = 0, 1, \dots, M$  و  $\mathbf{p}_m$  چندجمله‌ای  $m$ -ام چلیشکف است. مجموعه توابع  $\{\psi_{nm}(t)\}$  تشکیل یک مجموعه متعارف روی بازه  $[0, 1]$  می‌دهد. بسط هر تابع  $g(t) \in L^2(0, 1)$  بر اساس این توابع متعامد را می‌توان به صورت

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (8.2)$$

نوشت که در آن  $c_{nm} = \langle g(t), \psi_{nm}(t) \rangle$  و  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نماد ضرب داخلی نسبت به تابع وزن  $w(t) = 1$  است. اگر سری فوق را قطع کنیم تقریب تابع  $g(t)$  به صورت

$$g(t) \simeq \sum_{n=0}^{\Psi^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t), \quad (9.2)$$

حاصل می‌شود که در آن  $C$  و  $\Psi(t)$  ماتریس‌هایی از مرتبه  $1 \times (\Psi^k(M+1))$  با درایه‌هایی به صورت زیرند:

$$C = [c_{\cdot 0}, \dots, c_{\cdot M}, c_{1 \cdot}, \dots, c_{1M}, \dots, c_{(\Psi^k-1) \cdot}, \dots, c_{(\Psi^k-1)M}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\psi_{\cdot 0}(t), \dots, \psi_{\cdot M}(t), \psi_{1 \cdot}(t), \dots, \psi_{1M}(t), \dots, \psi_{(\Psi^k-1) \cdot}(t), \dots, \psi_{(\Psi^k-1)M}(t)]^T.$$

با در نظر گرفتن ماتریس‌های  $C$  و  $\Psi(t)$  به صورت

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_{\hat{m}}]^T, \quad \Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{\hat{m}}(t)]^T, \quad (10.2)$$

که در آن

$$c_i = c_{nm}, \quad \psi_i(t) = \psi_{nm}(t), \quad i = n(M+1) + m + 1, \quad \hat{m} = \Psi^k(M+1),$$

رابطه (۹.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$g(t) \simeq g_{\hat{m}}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i \psi_i(t) = C^T \Psi(t). \quad (11.2)$$

به‌طور مشابه، بسط تقریبی تابع  $g(t, s) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  بر حسب توابع موجک چلیشکف را می‌توان به صورت

$$g(t, s) \simeq \Psi^T(t) \mathcal{G} \Psi(s),$$

نوشت که در آن  $\mathcal{G}$  ماتریسی از مرتبه  $\hat{m} \times \hat{m}$  با درایه‌هایی به صورت زیر است:

$$\mathcal{G}_{ij} = \langle \psi_i(t), \langle g(t, s), \psi_j(s) \rangle \rangle.$$

## ۲.۲. ماتریس‌های عملگر و تبدیل

در این زیربخش، ماتریس‌های عملگر انتگرال و تبدیل موجک‌های چلیشکف را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۲. اگر  $\phi(t)$  بردار تعریف شده در رابطه (۶.۲) باشد، انتگرال‌گیری از آن به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\int_{\cdot}^t \phi(\tau) d\tau \simeq P\phi(t), \quad (12.2)$$

که در آن  $P$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $(M + 1)$  با درایه‌هایی به صورت زیر است:

$$P_{ij} = \sum_{s=0}^{M-j} \sum_{r=0}^{M-i+1} \frac{\alpha_{r,i-1} \alpha_{s,j}}{(r+i)(r+i+j+s+1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M+1. \quad (13.2)$$

اثبات. برای  $i$ -امین عضو از بردار  $\phi(t)$  که همان  $\mathbf{p}_{i-1}(t)$  است داریم:

$$\int_0^t \phi_i(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{p}_{i-1}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{r=0}^{M-i+1} \alpha_{r,i-1} \tau^{r+i-1} d\tau = \sum_{r=0}^{M-i+1} \frac{\alpha_{r,i-1} t^{r+i}}{r+i}. \quad (14.2)$$

عبارت  $t^{r+i}$  را بر حسب چندجمله‌ای‌های چلیشکف بسط می‌دهیم:

$$t^{r+i} \approx \sum_{j=0}^M \beta_{r,j} \mathbf{p}_j(t), \quad (15.2)$$

که در آن

$$\beta_{r,j} = \int_0^1 t^{r+i} \mathbf{p}_j(t) dt = \sum_{s=0}^{M-j} \alpha_{s,j} \int_0^1 t^{r+i+j+s} dt = \sum_{s=0}^{M-j} \frac{\alpha_{s,j}}{r+i+j+s+1}.$$

حال از روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) خواهیم داشت:

$$\int_0^t \phi_i(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^M \left( \sum_{s=0}^{M-j} \sum_{r=0}^{M-i+1} \frac{\alpha_{r,i-1} \alpha_{s,j}}{(r+i)(r+i+j+s+1)} \right) \mathbf{p}_j(t).$$

□

بنابراین نتیجه دلخواه حاصل شد.

قضیه ۳.۲. اگر  $\Psi(t)$  بردار  $\hat{m}$ -تایی از موجک‌های چلیشکف و  $\phi(t)$  بردار  $(M + 1)$ -تایی از چندجمله‌ای‌های چلیشکف به ترتیب تعریف شده در رابطه (۱۰.۲) و (۶.۲) باشند، آنگاه

$$\tilde{l} b e l =$$

$$\Psi(t) \approx \Lambda \phi(t), \quad (16.2)$$

که در آن  $\Lambda$  ماتریس تبدیل از مرتبه  $(M + 1) \times \hat{m}$  با درایه‌های زیر است:

$$\Lambda_{ij} = \sum_{r=0}^{M-j} \sum_{s=0}^{M-m} \sum_{k=0}^{r+j} \frac{\alpha_{r,j} \alpha_{s,m} \binom{r+j}{k} n^{r+j-k}}{s+m+k+1} \quad (17.2)$$

$$l b e l =$$

$$\phi(t) \approx \Pi \Psi(t), \quad (18.2)$$

که در آن  $\Pi$  ماتریس تبدیل از مرتبه  $\hat{m} \times (M+1)$  با درایه‌های زیر است:

$$\Pi_{ij} = \sum_{r=0}^{M-i+1} \sum_{s=0}^{M-m+r+i-1} \sum_{k=0}^{r+i-1} \frac{\alpha_{r,i-1} \alpha_{s,m} \Psi^{-k(r+i-\frac{1}{\Psi})} \binom{r+i-1}{k} n^{r+i-k-1}}{s+m+k+1}. \quad (19.2)$$

اثبات. اثبات را برای قسمت آ بیان می‌کنیم. قسمت ب نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود. مؤلفه  $i$ -ام بردار  $\Psi(t)$  را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های چلیشکف به صورت

$$\psi_i(t) \approx \sum_{j=0}^M \Lambda_{ij} \mathbf{p}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m},$$

بیان کرد که در آن

$$\Lambda_{ij} = \int_0^1 \psi_i(t) \mathbf{p}_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m}.$$

با توجه به روابط (۱.۲) و (۷.۲) ضرایب  $\Lambda_{ij}$  به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\Lambda_{ij} = \sum_{r=0}^{M-j} \alpha_{r,j} \int_0^1 t^{r+j} \psi_i(t) dt = \sum_{r=0}^{M-j} \alpha_{r,j} \Psi^{\frac{k}{\Psi}} \int_{\frac{n}{\Psi^k}}^{\frac{n+1}{\Psi^k}} t^{r+j} \mathbf{p}_m(\Psi^k t - n) dt, \quad i = n(M+1) + m + 1.$$

با تغییر متغیر  $z = \Psi^k t - n$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \sum_{r=0}^{M-j} \alpha_{r,j} \Psi^{-k(r+j-\frac{1}{\Psi})} \int_0^1 (z+n)^{r+j} \mathbf{p}_m(z) dz \\ &= \sum_{r=0}^{M-j} \sum_{s=0}^{M-m} \alpha_{r,j} \alpha_{s,m} \Psi^{-k(r+j-\frac{1}{\Psi})} \int_0^1 (z+n)^{r+j} z^{s+m} dz \\ &= \sum_{r=0}^{M-j} \sum_{s=0}^{M-m} \sum_{k=0}^{r+j} \frac{\alpha_{r,j} \alpha_{s,m} \Psi^{-k(r+j-\frac{1}{\Psi})} \binom{r+j}{k} n^{r+j-k}}{s+m+k+1}. \end{aligned}$$

□

لذا اثبات قسمت آ کامل است.

قضیه ۴.۲. انتگرال‌گیری از بردار  $\Psi(t)$  که در رابطه (۱۰.۲) تعریف شد به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau \approx \mathcal{P} \Psi(t), \quad (20.2)$$

که در آن  $\mathcal{P} = \Lambda \Pi$  ماتریس عملگر انتگرال موجک‌های چلیشکف از مرتبه  $\hat{m} \times \hat{m}$  است.

اثبات. با توجه به قضایای (۲.۲) و (۳.۲) داریم:

$$\int^t \Psi(\tau) d\tau \simeq \Lambda \int^t \phi(\tau) d\tau \simeq \Lambda P \phi(t) \simeq \Lambda P \Pi \Psi(t).$$

□

قضیه ۵.۲. بردار  $\Psi(t)$  که در رابطه (۱۰.۲) تعریف شد، در رابطه

$$\Psi(t) \Psi^T(t) C = \tilde{C}^T \Psi(t), \quad (21.2)$$

صدق می‌کند؛ که در آن  $\tilde{C}$  ماتریسی از مرتبه  $\hat{m} \times \hat{m}$  با درایه‌های وابسته به بردار  $C$  است.

اثبات. با ضرب طرفین هر یک از معادلات دستگاه (۲۱.۲) در  $\psi_j(t)$ ،  $j = 1, 2, \dots, \hat{m}$  سپس انتگرال‌گیری روی بازه  $[0, 1]$  و در نهایت استفاده از خاصیت تعامد موجک‌های چلیشکف، درایه‌های بردار  $\tilde{C}$  به راحتی قابل محاسبه‌اند. □

### ۳. حل معادله انتگرال ولترای کوردیال

برای حل معادله (۱.۱) به روش گالرکین، ابتدا توابع  $u(t)$ ،  $f(t)$  و  $K(t, s) := t^{-1} (s/t)^{\mu-1}$  را به گونه‌ای که در بخش ۱.۲ شرح داده شد، با توابع موجک چلیشکف به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$u(t) \simeq C^T \Psi(t), \quad f(t) \simeq F^T \Psi(t), \quad K(t, s) \simeq \Psi^T(t) \mathcal{K} \Psi(s). \quad (1.3)$$

با جایگذاری این مقادیر تقریبی در معادله (۱.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C^T \Psi(t) &= F^T \Psi(t) + \int^t \Psi^T(t) \mathcal{K} \Psi(s) \Psi(s)^T C ds = F^T \Psi(t) + \Psi^T(t) \mathcal{K} \int^t \Psi(s) \Psi(s)^T C ds \\ &= F^T \Psi(t) + \Psi^T(t) \mathcal{K} \int^t \tilde{C}^T \Psi(s) ds = F^T \Psi(t) + \Psi^T(t) \mathcal{K} \tilde{C}^T \mathcal{P} \Psi(t) \\ &= (F^T + \Psi^T(t) \mathcal{K} \tilde{C}^T \mathcal{P}) \Psi(t), \end{aligned}$$

با استفاده از روش گالرکین و تعامد توابع موجک چلیشکف، از رابطه فوق داریم:

$$C^T = F^T + \Psi^T(t) \mathcal{K} \tilde{C}^T \mathcal{P}. \quad (2.3)$$

معادله فوق یک دستگاه متشکل از  $\hat{m}$  معادله خطی و  $\hat{m}$  مجهول است که با حل آن، بردار ضرایب مجهول  $C$  به دست می‌آید. با جایگذاری بردار  $C$  در  $u(t) \simeq C^T \Psi(t)$ ، جواب تقریبی معادله (۱.۱) محاسبه می‌شود.

### ۴. آنالیز خطا و همگرایی

در این بخش به تحلیل خطای تقریب توابع توسط چندجمله‌ای‌ها و موجک‌های چلیشکف می‌پردازیم. همچنین همگرایی روش عددی پیشنهادی برای حل معادلات انتگرال ولترای کوردیال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

لم ۱.۴. اگر بسط تقریبی  $g \in \mathbb{C}^{M+1}[0, 1]$  بر حسب چندجمله‌ای‌های چلیشکف به صورت

$$g(t) \simeq g_M(t) = \sum_{i=0}^M c_i \mathbf{p}_i(t)$$

باشد، آنگاه

$$\|g(t) - g_M(t)\|_2 \leq \frac{\max_{\zeta \in (0,1)} |g^{(M+1)}(\zeta)|}{\sqrt{2M+3}(M+1)!},$$

که در آن  $\|\cdot\|_2$  نماد نرم در فضای  $L^2[0, 1]$  است.

اثبات. اگر  $p(t)$  بسط تیلور  $g(t)$  حول نقطه صفر باشد داریم:

$$|g(t) - p(t)| = \left| \frac{g^{(M+1)}(\zeta)t^{M+1}}{(M+1)!} \right|, \quad 0 < \zeta < 1.$$

حال با استفاده از خواص بهترین تقریب خواهیم داشت:

$$\|g(t) - g_M(t)\|_2^2 \leq \|g(t) - p(t)\|_2^2 = \int_0^1 \left| \frac{g^{(M+1)}(\zeta)t^{M+1}}{(M+1)!} \right|^2 dt \leq \frac{\left| \max_{\zeta \in (0,1)} g^{(M+1)}(\zeta) \right|^2}{(2M+3)(M+1)!}.$$

□

اکنون با گرفتن ریشه دوم از طرفین رابطه فوق نتیجه دلخواه حاصل می‌شود.

قضیه ۲.۴. اگر بسط تقریبی  $g \in \mathbb{C}^{M+1}[0, 1]$  بر حسب موجک‌های چلیشکف به صورت

$$g(t) \simeq g_{\hat{m}}(t) = \sum_{i=0}^{\hat{m}} c_i \psi_i(t)$$

باشد، آنگاه

$$\lim_{\hat{m} \rightarrow \infty} \|g(t) - g_{\hat{m}}(t)\|_2 = 0.$$

اثبات. با توجه به رابطه (۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|g(t) - g_{\hat{m}}(t)\|_2^2 &= \int_0^1 |g(t) - g_{\hat{m}}(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| g(t) - \sum_{n=0}^{\nu^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{\nu^k-1} \int_{\frac{n}{\nu^k}}^{\frac{n+1}{\nu^k}} \left| g(t) - \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

با تغییر متغیر  $z = 2^k t - n$  در  $2^k$  جمله در رابطه (۱.۴) این رابطه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \|g(t) - g_{\hat{m}}(t)\|_Y^2 &= \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_0^1 \left| g\left(\frac{z+n}{2^k}\right) - \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}\left(\frac{z+n}{2^k}\right) \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_0^1 \left| h_n(z) - \sum_{m=0}^M c_{nm} \mathbf{p}_m(z) \right|^2 dt = \sum_{n=0}^{2^k-1} \|h_n(z) - h_{n,M}(z)\|_Y^2, \end{aligned}$$

که در آن  $h_n(z) = g\left(\frac{z+n}{2^k}\right)$  و  $h_{n,M}(z)$  تقریب آن بر حسب چندجمله‌ای‌های چلیشکف روی بازه  $[0, 1]$  است. حال با اعمال  $\square$

لم ۱.۴ برای توابع  $h_n(z)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ , نتیجه دلخواه حاصل می‌شود.

لم ۳.۴. (لم گرانوال) [۳، ف.۷، لم ۶.۲.۷] فرض کنید  $\lambda > 0$ ,  $\varphi \in L^1(0, 1)$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  (در اینجا  $\varphi(x) = x^{\mu-1}$ ) و  $\lambda \| \varphi \|_1 < 1$ . اگر  $\lambda \in C_+(I) := \{f \in C(I) : f(t) \geq 0, t \in I\}$  در نامساوی

$$z(t) \leq f(t) + \lambda \int_0^t t^{-1} \varphi(s/t) z(s) ds, \quad t \in I,$$

صدق کند و  $f(t) \geq 0$  و غیرنزولی باشد، آنگاه داریم:

$$z(t) \leq (1 - \lambda \| \varphi \|_1)^{-1} f(t), \quad t \in I$$

قضیه ۴.۴. اگر  $u_{\hat{m}}(t)$  جواب حاصل از روش گالرکین موجک چلیشکف برای معادله (۱.۱) و  $u(t)$  جواب دقیق آن باشد به طوری که

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^Y[0, 1], \quad k = 0, \dots, M,$$

آنگاه

$$\lim_{\hat{m} \rightarrow \infty} |u(t) - u_{\hat{m}}(t)| = 0.$$

اثبات. معادله (۱.۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$u(t) = f(t) + (\mathcal{K}u)(t), \quad (2.4)$$

که در آن

$$(\mathcal{K}u)(t) = \int_0^t t^{-1} (s/t)^{\mu-1} u(s) ds.$$

جواب حاصل از روش گالرکین موجک چلیشکف  $u_{\hat{m}}$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$u_{\hat{m}} = \mathcal{P}_{\hat{m}} f + \mathcal{P}_{\hat{m}} \mathcal{K} u_{\hat{m}}, \quad (3.4)$$

که در آن عملگر تصویر در فضای تولید شده توسط موجک‌های چلیشکف  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, \hat{m}$  است. با تفریق (۳.۴) از (۲.۴) داریم:

$$u - u_{\hat{m}} = f - \mathcal{P}_{\hat{m}} f + \mathcal{K}u - \mathcal{P}_{\hat{m}} \mathcal{K}u_{\hat{m}}. \quad (4.4)$$

با تعریف  $e_{\hat{m}} = u - u_{\hat{m}}$  عبارت  $\mathcal{K}u - P_{\hat{m}}\mathcal{K}u_{\hat{m}}$  را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \mathcal{K}u - P_{\hat{m}}\mathcal{K}u_{\hat{m}} &= \mathcal{K}u - P_{\hat{m}}\mathcal{K}u + P_{\hat{m}}\mathcal{K}(u - u_{\hat{m}}) \\ &= \mathcal{K}u - P_{\hat{m}}\mathcal{K}u + K(u - u_{\hat{m}}) - [\mathcal{K}(u - u_{\hat{m}}) - P_{\hat{m}}\mathcal{K}(u - u_{\hat{m}})] \\ &= (f - u) - P_{\hat{m}}(f - u) + \mathcal{K}(u - u_{\hat{m}}) - [\mathcal{K}(u - u_{\hat{m}}) - P_{\hat{m}}\mathcal{K}(u - u_{\hat{m}})] \\ &= f - P_{\hat{m}}f - u + P_{\hat{m}}u + \mathcal{K}e_{\hat{m}} - (Ke_{\hat{m}} - P_{\hat{m}}Ke_{\hat{m}}) \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

با استفاده از روابط (۴.۴) و (۵.۴) خواهیم داشت:

$$e_{\hat{m}}(t) = - \int_0^t k(s, t)e_{\hat{m}}(s)ds + (u - P_{\hat{m}}u) + (\mathcal{K}u - P_{\hat{m}}\mathcal{K}u)$$

از معادله فوق می‌توان بلافاصله نتیجه گرفت که

$$|e_{\hat{m}}| \leq C \int_0^t |e_{\hat{m}}(s)| ds + |J_1| + |J_2|,$$

که در آن  $J_1 = u - P_{\hat{m}}u$ ،  $J_2 = P_{\hat{m}}Ke_{\hat{m}} - Ke_{\hat{m}}$ . با استفاده از فرم استاندارد نامساوی گرانوال (مرجع [۳۱]) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|e_{\hat{m}}\|_{\infty} \leq C \left( \|J_1\|_{\infty} + \|J_2\|_{\infty} \right).$$

حال با استفاده از مرجع [۱] و همچنین قضایای ۱ و ۲ اثبات شده در مرجع [۲۲] می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{\hat{m} \rightarrow \infty} \|J_1\|_{\infty} = 0, \quad \lim_{\hat{m} \rightarrow \infty} \|J_2\|_{\infty} = 0,$$

و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

## ۵. نتایج عددی

در این بخش، به منظور نشان دادن کارایی روش مبتنی بر موجک پیشنهاد شده، چندین مثال عددی ارائه و نتیجه حاصل از این روش به همراه جزئیات گزارش می‌شود. قابل توجه است که همه محاسبات در محیط نرم افزار میپل ۱۷ با دقت ۳۰ رقم اعشار و با استفاده از یک کامپیوتر شخصی با پردازنده اینتل Corei۷ انجام شده‌اند. همچنین، قابل ذکر است که در معادله (۱.۱) اگر  $\mu > 1$  و  $f \in \mathbb{C}^m[0, T]$ ،  $m \geq 0$ ، معادله دارای جواب یکتای  $u \in \mathbb{C}^m[0, T]$  به فرم [۱۹]:

$$u(t) = f(t) + t^{1-\mu} \int_0^t s^{\mu-2} f(s)ds, \quad (۱.۵)$$

است؛ و اگر  $0 < \mu < 1$  و  $f \in \mathbb{C}^m[0, T]$ ،  $m \geq 1$ ، معادله (۱.۱) خانواده‌ای از جواب‌ها در  $\mathbb{C}[0, T]$  دارد که فقط یکی از آنها پیوستگی  $\mathbb{C}^1$  دارد و این جواب یکتا به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$u(t) = f(t) + \frac{f(0)}{\mu - 1} + t^{1-\mu} \int_0^t s^{\mu-2} (f(s) - f(0))ds. \quad (۲.۵)$$

به بیانی دیگر، با فرض اینکه  $a \in \mathbb{R}$ ، اگر  $\mu + a > 0$  و  $\mu + a \neq 1$ ، برای  $f(t) = t^a(1+t)$ ، جواب دقیق (۱.۱) برای تمام مقادیر  $\mu > 0$  از رابطه زیر قابل محاسبه است [۲۱]:

$$u(t) = \frac{\mu + a + 1}{\mu + a} t^{a+1} + \frac{\mu + a}{\mu + a - 1} t^a. \tag{۳.۵}$$

مثال ۱.۵. معادله (۱.۱) را با  $\mu = 0.8$ ،  $f(t) = t^2(1+t)$  و جواب دقیق  $u(t) = \frac{\mu+3}{\mu+1}t^3 + \frac{\mu+2}{\mu+1}t^2$  در نظر بگیرید. روش موجک پیشنهادی با مقادیر مختلف  $M$  و  $k$  برای حل آن به‌کاربرده شد. قدرمطلق خطای جواب تقریبی حاصل شده به ازای مقادیر مختلف  $t$  در جدول ۱ و زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه‌های کامپیوتری در جدول ۲ قابل مشاهده است. همچنین، نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای آن به ازای  $k = 3$  و  $M = 3$  در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش موجک چلیشکف روشی کارآمد و دقیق برای حل معادله انتگرال ولترای کوردیال می‌باشد.

جدول ۱: قدرمطلق خطای جواب تقریبی (مثال ۱.۵)

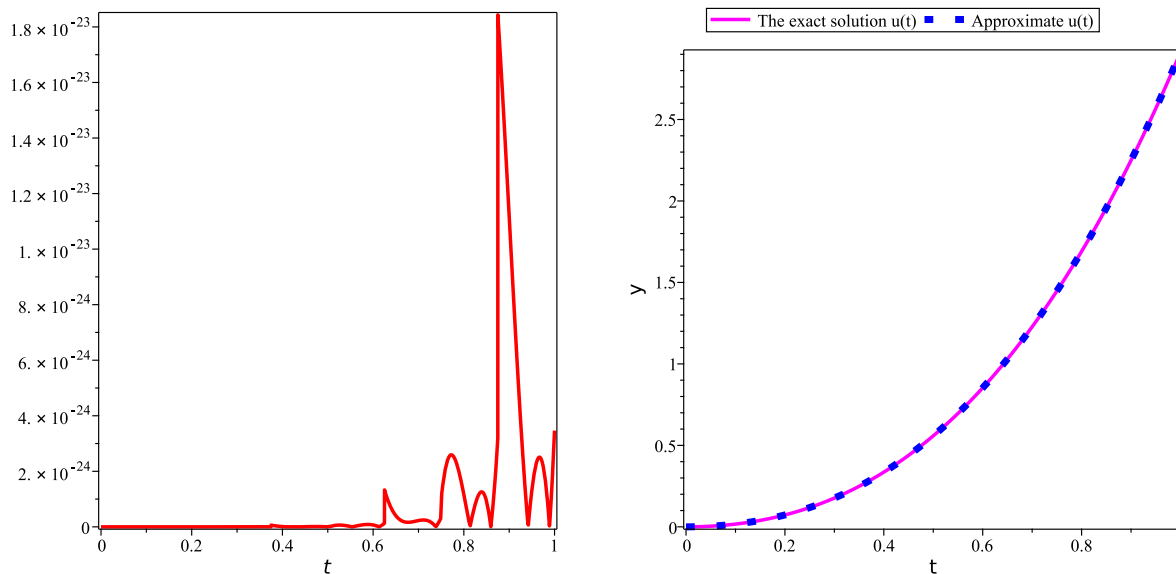
$M = 3, k = 3$	$M = 2, k = 3$	$M = 1, k = 3$	$t$
۰	$3/9.062E - 4$	$1/1979E - 2$	۰
$4/0.100E - 29$	$1/0.896E - 3$	$3/2560E - 2$	۰/۲
$3/7778E - 27$	$1/3380E - 3$	$3/3785E - 2$	۰/۴
$6/8.068E - 26$	$1/3519E - 3$	$3/7011E - 2$	۰/۶
$1/2622E - 24$	$1/520.37E - 3$	$4/4927E - 2$	۰/۸
$3/4521E - 24$	$1/6815E - 3$	$2/7309E - 2$	۱/۰

جدول ۲: زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه کامپیوتری (مثال ۱.۵)

$M = 3, k = 3$	$M = 2, k = 3$	$M = 1, k = 3$
۱۰/۵۶	۸	۴/۸۷

مثال ۲.۵. معادله (۱.۱) با پارامتر  $\mu = 1/5$  را در نظر بگیرید [۱۳]. تابع  $f(t)$  به گونه‌ای است که  $u(t) = t^3$  جواب دقیق باشد. جدول ۳ نتایج عددی حاصل از به‌کارگیری روش موجک چلیشکف پیشنهادی برای حل این معادله به ازای مقادیر مختلف  $M$  و  $k$  را نمایش می‌دهد. زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه‌های کامپیوتری نیز در جدول ۴ ارائه شده است. همچنین، جدول ۵ مقایسه بین نرم بی‌نهایت خطای جواب تقریبی به روش حاضر با روش‌های ارائه شده در مرجع [۱۳] را نشان می‌دهد. نمودار جواب دقیق و تقریبی به همراه قدرمطلق خطا نیز در شکل ۲ نمایش داده شده است. با توجه به نتایج گزارش شده می‌توان نتیجه گرفت که روش گالرکین موجک چلیشکف پیشنهادی، روش مناسب و کارآمدی برای حل معادله انتگرال ولترای کوردیال است.

مثال ۳.۵. معادله (۱.۱) با پارامتر  $\mu = 4/5$  را در نظر بگیرید به‌طوری‌که جواب دقیق آن  $u(t) = t^3 + t^{3/5}$  باشد [۱۳]. روش موجک چلیشکف برای حل این معادله انتگرال به‌کارگرفته شد. جدول ۶ نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $M$  و  $k$ ، جدول ۷ زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه‌های کامپیوتری و جدول ۸ مقایسه بین نرم بی‌نهایت



(ب) قدرمطلق خطا (آ) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۱: نمودار جواب تقریبی و قدرمطلق خطا برای  $M = 3, k = 3$  (مثال ۱.۵)

جدول ۳: قدرمطلق خطای جواب تقریبی در مثال ۲.۵.

$M = 3, k = 1$	$M = 2, k = 1$	$M = 1, k = 1$	$t$
.	$1/4583E - 2$	$5/8333E - 2$	.
.	$3/6111E - 4$	$8/0000E - 3$	$0/2$
.	$3/4722E - 3$	$5/6667E - 3$	$0/4$
$2/6041E - 28$	$9/2487E - 4$	$1/8777E - 2$	$0/6$
$3/4596E - 28$	$2/7109E - 3$	$3/6333E - 2$	$0/8$
$4/3042E - 28$	$4/9978E - 3$	$1/0056E - 1$	$1/0$

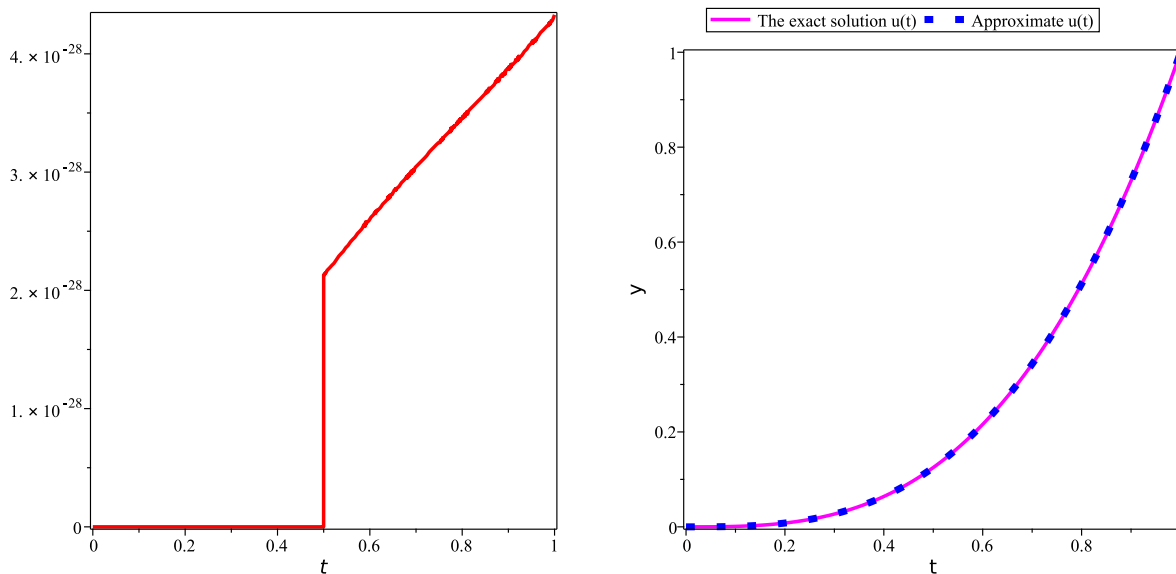
جدول ۴: زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه کامپیوتری (مثال ۲.۵)

$M = 3, k = 1$	$M = 2, k = 1$	$M = 1, k = 1$
۷/۰۳	۵/۶۵	۲/۰۱۵

جدول ۵: مقایسه ماکزیمم خطای جواب تقریبی (مثال ۲.۵)

روش موجک چلیشکف با $M = 3$ و $k = 1$	روش هم‌محلی با $h = 0/0125$ [۱۳]	روش هم‌محلی با $h = 0/05$ [۱۳]
$4/3 \times 10^{-28}$	$1/8 \times 10^{-7}$	$1/1 \times 10^{-5}$

خطای جواب تقریبی به روش موجک چلیشکف پیشنهادی با روش‌های عددی ارائه شده در مرجع [۱۳] را نشان می‌دهد. همچنین، در شکل ۳ نمودار جواب دقیق و تقریبی به همراه قدرمطلق خطا رسم شده است. نتایج حاضر دقت و کارایی روش



(ب) قدرمطلق خطا

(آ) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۲: نمودار جواب تقریبی و قدرمطلق خطا برای  $k = 1, M = 3$  (مثال ۲.۵)

موجک پیشنهادی برای حل معادله انتگرال ولترای کوردیال را نشان می‌دهد.

جدول ۶: قدرمطلق خطای جواب تقریبی (مثال ۳.۵)

$k = 3, M = 4$	$k = 2, M = 4$	$k = 1, M = 5$	$t$
$3/5507E - 7$	$4/0171E - 6$	$8/6113E - 6$	۰
$1/2550E - 8$	$3/6596E - 7$	$5/7077E - 7$	۰/۲
$1/7738E - 9$	$1/4198E - 7$	$6/3724E - 7$	۰/۴
$1/1880E - 9$	$6/6666E - 8$	$4/6412E - 8$	۰/۶
$1/3948E - 9$	$2/068E - 8$	$1/7031E - 8$	۰/۸
$3/5956E - 9$	$1/2572E - 7$	$2/2439E - 7$	۱/۰

جدول ۷: زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه کامپیوتری (مثال ۳.۵)

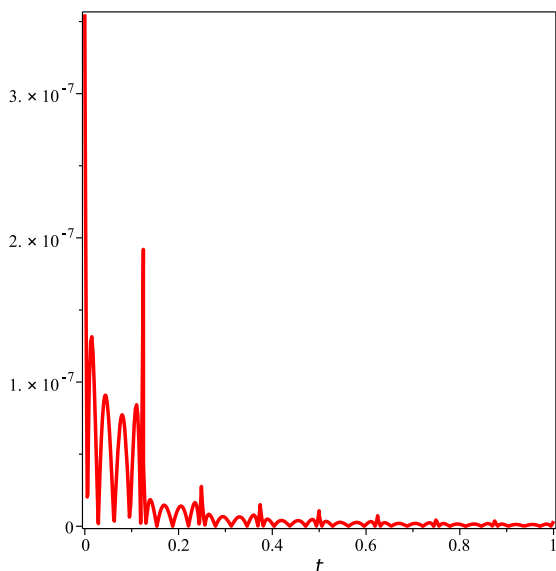
$k = 3, M = 4$	$k = 2, M = 4$	$k = 1, M = 5$
۱۹/۹۸	۱۲/۳۶	۴/۷۵

### ۶. نتیجه‌گیری

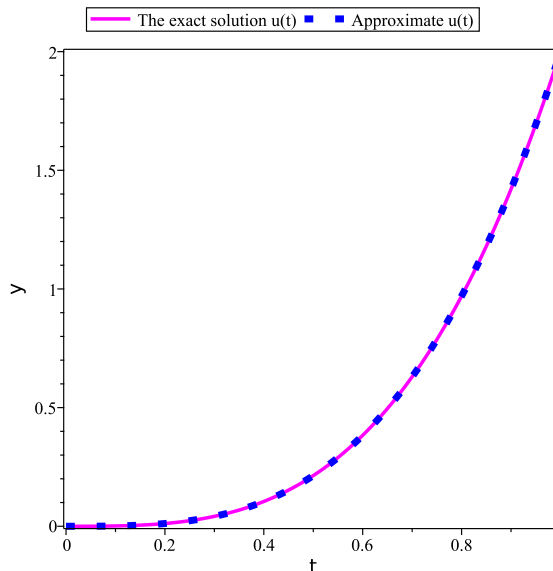
روشی عددی بر اساس توابع پایه موجک چلیشکف و روش گالرکین برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال ولترای کوردیال معرفی شد. آنالیز خطای تقریب به کمک این توابع موجکی و همچنین همگرایی روش پیشنهادی برای این دسته از معادلات

جدول ۸: مقایسه ماکزیمم خطای جواب تقریبی (مثال ۳.۵)

روش موجک چلیشکف با $k = ۳$ و $M = ۴$	روش هم‌محلی با $h = ۰/۰۱۲۵$ [۱۳]	روش هم‌محلی با $h = ۰/۰۰۵$ [۱۳]
$۳/۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۸ \times ۱۰^{-۳}$



(ب) قدرمطلق خطا



(آ) جواب دقیق و تقریبی

شکل ۳: نمودار جواب تقریبی و قدرمطلق خطا برای  $M = ۴, k = ۳$  (مثال ۳.۵)

انتگرال مورد بررسی قرار گرفت. به منظور برآورد دقت روش حاضر، چند مثال عددی ارائه و نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش همراه با جزئیات گزارش شد. از مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با سایر روش‌های عددی گزارش شده در تحقیقات قبلی ملاحظه می‌شود که روش موجک پیشنهادی دقت و کارایی قابل قبولی دارد. همچنین، با توجه به نتایج حاصل از روش موجک چلیشکف به نظر می‌رسد این پایه‌ها ابزار مناسبی برای حل عددی انواع دیگر معادلات انتگرال ولترای کوردیال باشند. این موضوع می‌تواند در تحقیقات آتی مورد بررسی قرار گیرد.

### مراجع

- [1] B. Alpert, G. Beylkin, R. R. Coifman and V. Rokhlin, Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equations, SIAM journal on Scientific Computing, **14**(1), (1993), 159–184.
- [2] M. A. Bartoshevich, A heat-conduction problem, Journal of engineering physics, **28**(2), (1975), 240–244.
- [3] H. Brunner, Volterra integral equations: an introduction to theory and applications, **30**, (2017), Cambridge University Press.
- [4] C. S. Burrus, R. Gopinath and H. Guo, Introduction to wavelets and wavelet transforms: A Primer, Pearson, (1997).
- [5] C. S. Burrus, Wavelets and wavelet transforms, (2015).
- [6] Y. T. Chan, Wavelet basics, Springer Science and Business Media, (1994).
- [7] V. S. Chelyshkov, Alternative orthogonal polynomials and quadratures, Electronic Transactions on Numerical Analysis, **25**(7), (2006), 17–26.

- [8] Z. Darbenas and M. Oliver, Uniqueness of solutions for weakly degenerate cordial Volterra integral equations, *Journal of Integral Equations and Applications*, **31**(3), (2019), 307–327.
- [9] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communications on pure and applied mathematics*, **41**(7), (1988), 909–996.
- [10] T. Diogo, S. McKee and T. Tang, A Hermite-type collocation method for the solution of an integral equation with a certain weakly singular kernel, *IMA journal of numerical analysis*, **11**(4), (1991), 595–605.
- [11] T. Diogo and G. Vainikko, Applicability of spline collocation to cordial Volterra equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, **18**(1), (2013), 1–21.
- [12] T. Diogo, On spline collocation methods for a singular Volterra integral equation, *Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisbon*, (2006).
- [13] T. Diogo, Collocation and iterated collocation methods for a class of weakly singular Volterra integral equations, *Journal of computational and applied mathematics*, **229**(2), (2009), 363–372.
- [14] T. Diogo and P. Lima Superconvergence of collocation methods for a class of weakly singular Volterra integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **218**(2), (2008), 307–316.
- [15] E. Gokmen G. Yuksel and M. Sezer, A numerical approach for solving Volterra type functional integral equations with variable bounds and mixed delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **311**(1), (2017), 354–363.
- [16] A. Graps, An introduction to wavelets, *IEEE computational science and engineering*, **2**(2), (1995), 50–61.
- [17] J. S. Guf and W. S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *International Journal of Systems Science*, **27**(7), (1996), 623–628.
- [18] E. Guariglia and R. C. Guido, Chebyshev wavelet analysis, *Journal of Function Spaces*, (2022).
- [19] W. Han, Existence, uniqueness and smoothness results for second-kind Volterra equations with weakly singular kernels, *The Journal of Integral Equations and Applications*, (1994) 365–384.
- [20] P. Lima and T. Diogo, An extrapolation method for a Volterra integral equation with weakly singular kernel, *Applied Numerical Mathematics*, **24**(2–3), (1997), 131–148.
- [21] P. Lima and T. Diogo, Numerical solution of a nonuniquely solvable Volterra integral equation using extrapolation methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **140**(1–2), (2002), 537–557.
- [22] H. V. Long, , H. B. Jebreen, S. Tomasiello, Multi-wavelets galerkin method for solving the system of volterra integral equations, *Mathematics*, **8**(8), (2020), 1369.
- [23] H. Majidian, Composite quadrature rules for a class of weakly singular Volterra integral equations with noncompact kernels, *Applied Numerical Mathematics*, **83**(1), (2014), 1–11.
- [24] H. Majidian, Efficient quadrature rules for a class of cordial Volterra integral equations: A comparative study, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **43**(5) (2017), 1245–1258.
- [25] R. J. E. Merry, *Wavelet theory and applications: a literature study*, (2005).
- [26] K. Maleknejad, M. Tavassoli Kajani and Y. Mahmoudi, Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equation of the second kind by using Legendre wavelets, *Kybernetes*, **32**(9–10), (2003), 1530–1539.
- [27] I. Malmir, Novel Chebyshev wavelets algorithms for optimal control and analysis of general linear delay models, *Applied Mathematical Modelling*, **69**(1), (2019), 621–647.
- [28] C. A. Micchelli, Y. Xu and Y. Zhao, Wavelet Galerkin methods for second-kind integral equations, *Journal of computational and applied mathematics*, **86**(1), (1997), 251–270.
- [29] L. Moradi, F. Mohammadi and D. Baleanu, A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets, *Journal of Vibration and Control*, **25**(2), (2019), 310–324.
- [30] Y. Rostami and K. Maleknejad, Solving Fredholm integral equations of the first kind by using wavelet bases, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **48**(6), (2019), 1729–1743.
- [31] J. Shen, T. Tang, L. Wang, *Spectral Methods: Algorithms, Analysis Series in Computational Mathematics*. Springer, New York, (2011).
- [32] G. Vainikko, Cordial Volterra integral equations 1, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **30**(9–10), (2009), 1145–1172.
- [33] G. Vainikko, Cordial Volterra integral equations 2, *Numerical functional analysis and optimization*, **31**(2), (2010), 191–219.
- [34] G. Vainikko, Spline collocation for cordial Volterra integral equations, *Numerical functional analysis and opti-*

- mization, **31**(3) (2010), 313–338.
- [35] G. Vainikko, Spline collocation-interpolation method for linear and nonlinear cordial Volterra integral equations, Numerical functional analysis and optimization, **32**(1), (2010), 83–109.
- [36] Z. W. Yang, Second-kind linear Volterra integral equations with noncompact operators, Numerical Functional Analysis and Optimization, **36**(1), (2015), 104–131.