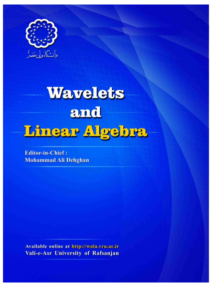
موجک‌ها و جبرخطی ۱۲(۱) (۱۴۰۴) ۶۵-۷۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

گسترش ثابت دانکل‌ـویلیامز در فضاهای باناخ از فاصله زاویه‌ای تا pـفاصله زاویه‌ای

نادر حجتی[آ]، فرزاد دادی‌پور[*آ]، علیرضا ستارزاده[آ]

[آ]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۶ بهمن ۱۴۰۳
پذیرفته شده: ۵ تیر ۱۴۰۴
دسترسی آنلاین: ۵ تیر ۱۴۰۴

کلمات کلیدی:
ثابت دانکل‌ـویلیامز، pـفاصله زاویه‌ای، فضای باناخ به طور یکنواخت غیر مربعی، ثابت جیمز، مدول تحدب.

چکیده

در این مقاله طیفی از ثابت‌های هندسی فضاهای باناخ را به عنوان گسترش ثابت شناخته شده دانکل‌ـویلیامز، از مفهوم فاصله زاویه‌ای هر دو بردار مخالف صفر تا pـفاصله زاویه‌ای آن‌ها، معرفی می کنیم. با تعیین بهترین انتخاب ممکن کران‌های بالا و پائین ثابت مورد نظر، نشان می دهیم که اخذ کران پائین، فضاهای هیلبرت را مشخصه سازی می کند. همچنین با استفاده از نامساوی‌های نرم‌دار، رابطه ثابت تعریف شده را با مدول تحدب و ثابت جیمز مطالعه می کنیم. در پایان و به عنوان کاربردهایی از مطالعات انجام شده، برخی نتایج شناخته شده قبلی را با رهیافتی دیگر به دست می‌آوریم و همچنین شرطی کافی، بر مبنای اخذ کران بالا برای ثابت گسترش یافته دانکل‌ـویلیامز، که تحت آن فضای زمینه به طور یکنواخت غیر مربعی نباشد، ارائه می دهیم.

۱. مقدمه

در طول سالیان متمادی پرداختن به مفاهیم مرتبط با ثابت‌های هندسی فضاهای باناخ از قبیل معرفی ثابت برای فضاهای باناخ، بررسی ویژگی‌های هندسی فضای مورد بحث بر مبنای تعیین ثابت آن، گسترش ثابت‌های تعریف شده و همچنین تعیین جایگاه فضای زمینه در بین رده‌های مختلف فضاهای باناخ به موازات پیمایش ثابت هندسی آن در یک بازه از اعداد حقیقی

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: n.hojati@student.kgut.ac.ir (نادر حجتی)، f.dadipour@kgut.ac.ir (فرزاد دادی‌پور)، a.sattarzadeh@kgut.ac.ir (علیرضا ستارزاده).

http://doi.org/10.22072/wala.2025.2051651.1468

مورد توجه پژوهشگران این حوزه بوده است. معرفی ثابت‌های هندسی عمدتاً بر مبنای تحلیل تساوی‌ها و نامساوی‌های تابعی، روابط مشتمل بر نرم بردارها و همچنین تفاوت در تعریف‌های مختلف از مفهوم تعامد بردارها در فضاهای باناخ می باشد. در سال ۱۹۳۵ اولین ثابت یک فضای باناخ X توسط فون نویمان و جردن [۱۳] بر مبنای نسبت های به کار رفته در قانون متوازی الاضلاع به صورت زیر معرفی شد

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲}}{۲(\|x\|^{۲}+\|y\|^{۲})} : x, y \in X, \quad \|x\|+\|y\| \neq ۰\right\}.$$

در سال ۱۹۶۴ دانکل و ویلیامز [۶] نشان دادند که در فضای باناخ X برای هر دو عنصر $x, y \neq ۰$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \frac{۴\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|} \tag{۱.۱}$$

مطالعه هندسه فضاهای باناخ بر مبنای نامساوی دانکل-ویلیامز و اجزاء و نسبت های به کار رفته در آن مورد توجه پژوهشگران متعددی قرار گرفته است. کرک و اسمایلی [۱۴] نشان دادند که در نامساوی (۱.۱) جایگذاری عدد ۲ به جای ۴ فضاهای هیلبرت را مشخصه سازی می کند. کوچکترین عددی که می تواند به جای ۴ در نامساوی (۱.۱) جایگزین گردد معیاری است برای آن که نشان دهد فضای زمینه چه میزان به فضای هیلبرت نزدیک یا دور است. به منظور دستیابی به این عدد، در سال ۲۰۰۸ ملادو و همکاران [۱۲] ثابت دانکل-ویلیامز را به صورت زیر تعریف کردند.

$$DW(X) = \sup\left\{\frac{\|x\|+\|y\|}{\|x-y\|}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| : x, y \in X, \quad x, y \neq ۰, \quad x \neq y\right\} \tag{۲.۱}$$

همچنین ثابت کردند که در هر فضای باناخ X، $۲ \leq DW(X) \leq ۴$ و $DW(X) = ۲$ اگر و فقط اگر X یک فضای هیلبرت باشد. اخیراً فو و همکاران [۷، ۸] با محدود کردن بردارها در رابطه (۲.۱) به بردارهایی که به معنای تعامد متساوی الساقین، تعامد سینگر و تعامد بیرخوف برهم عمود باشند، ضمن معرفی ثابت های $DW_I(X)$، $DW_S(X)$ و $DW_B(X)$ کران‌های بالا و پائین این ثابت ها را به دست آورده و به مطالعه هندسه فضاهای زمینه پرداختند. در این مقاله طیفی از ثابت‌های هندسی فضاهای باناخ را به عنوان گسترش ثابت شناخته شده دانکل-ویلیامز، از مفهوم فاصله زاویه‌ای هر دو بردار مخالف صفر تا p-فاصله زاویه‌ای آن‌ها، معرفی می کنیم. با تعیین بهترین انتخاب ممکن کران‌های بالا و پائین ثابت مورد نظر، نشان می دهیم که اخذ کران پائین، فضاهای هیلبرت را مشخصه سازی می کند. همچنین با استفاده از نامساوی‌های نرم‌دار، رابطه ثابت تعریف شده را با مدول تحدب و ثابت جیمز مطالعه می کنیم. در پایان و به عنوان کاربردهایی از مطالعات انجام شده، برخی نتایج شناخته شده قبلی را با رهیافتی دیگر به دست می‌آوریم و همچنین شرطی کافی، بر مبنای اخذ کران بالا برای ثابت گسترش یافته دانکل-ویلیامز، که تحت آن فضای زمینه به طور یکنواخت غیر مربعی نباشد، ارائه می دهیم. در سراسر این مقاله X را یک فضای باناخ حقیقی در نظر می گیریم و S_X و B_X را به ترتیب کره یکه و گوی بسته یکه X می انگاریم.

۲. معرفی ثابت $DW_{p,q}(X)$

در این بخش به ازای هر $(p, q) \in [۰, ۱) \times (۰, ۱]$ ثابت $DW_{p,q}(X)$ را معرفی می کنیم و کران‌های بالا و پائین آن را به دست می آوریم. همچنین با مطالعه ثابت $DW_{p,q}(X)$ طیفی از فضاهای باناخ، نشان می دهیم این کران‌های بالا و پائین بهترین انتخاب ممکن می باشند. اما نخست به یاد آوری مفاهیم فاصله زاویه‌ای، p-فاصله زاویه‌ای و همچنین کران‌های بالای p-فاصله زاویه‌ای به عنوان عامل انگیزشی تعریف ثابت جدید می پردازیم.

فاصله زاویه‌ای بین دو برادر غیر صفر $x, y \in X$ به صورت $\alpha[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$ تعریف می شود. در سال ۲۰۰۶ مالیگراندا [۱۶] به ازای هر عدد $p \in \mathbb{R}$، مفهوم pـفاصله زاویه‌ای بین دوبردار غیر صفر $x, y \in X$ را به عنوان تعمیمی از فاصله زاویه‌ای به صورت زیر ارائه داد.

$$\alpha_p[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|y\|^{۱-p}} \right\|$$

نامساوی دانکل‌ـویلیامز (۱.۱) در واقع کران بالایی برای فاصله زاویه‌ای بین دوبردار غیر صفر ارائه می دهد. همچنین کران‌های بالا و پایین متعددی برای pـفاصله زاویه‌ای بین بردارهای غیر صفر به دست آمده است [۱۵، ۱۷]. در قضیه بعدی نامساوی‌های نرم‌دار مرتبط با کران‌های بالا و پائین pـفاصله زاویه‌ای مورد مطالعه قرار می گیرند. در قضیه ۱.۲ (i) مالیگراندا [۱۶] به یک کران بالای مناسب برای pـفاصله زاویه‌ای، در قضیه ۱.۲ (ii) کرینیچ و همکاران [۱۵] به یک کران پایین برای pـفاصله زاویه‌ای برحسب فاصله زاویه‌ای دو بردار و همچنین درقضیه ۱.۲ (iii) مولفین [۴] با در نظر گرفتن عدد دلخواه $q > ۰$ به گستره‌ای از کران‌های بالا برای pـفاصله زاویه‌ای دست یافتند.

قضیه ۱.۲. *[۴، ۱۵، ۱۶] فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ، $p \in [۰, ۱)$ و $q > ۰$ دلخواه باشند. در این صورت نامساوی‌های نرم‌دار زیر برای هر دو بردار غیر صفر $x, y \in X$ برقرار می باشند.*

(i) $\alpha_p[x, y] \leq (۲ - p)\frac{\|x-y\|}{\left(\max\{\|x\|,\|y\|\}\right)^{۱-p}}$

(ii) $\alpha_p[x, y] \geq \left(\max\{\|x\|, \|y\|\}\right)^p \alpha[x, y] - |\|x\|^p - \|y\|^p|$

(iii) $\alpha_p[x, y] \leq ۲^{۱+\frac{۱}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(۱-p)q}+\|y\|^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}}}$

در قضیه زیر مولفین [۴] نشان دادند که تعیین یک کران بالای خاص برای pـفاصله زاویه‌ای، فضاهای هیلبرت را مشخصه سازی می کند.

قضیه ۲.۲. *[۴] فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد وگیریم $p \in [۰, ۱)$. در این صورت گزاره های زیر دو به دو معادلند:*

(i) برای هر $q \in (۰, ۱]$ و هر $x, y \neq ۰$ داریم $\alpha_p[x, y] \leq ۲^{\frac{۱}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(۱-p)q}+\|y\|^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}}}$.

(ii) $q > ۰$ موجود است به طوری که برای هر $x, y \neq ۰$ داریم $\alpha_p[x, y] \leq ۲^{\frac{۱}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(۱-p)q}+\|y\|^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}}}$.

(iii) $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای هیلبرت است.

در قضیه ۱.۲ (iii) مولفین [۴] ضمن یافتن یک کران بالا برای pـفاصله زاویه‌ای بین هر دو بردار ناصفر یک فضای باناخ، نامساوی دانکل‌ـویلیامز را با ورود پارامترهای دوگانه p و q گسترش دادند. بر مبنای این رهیافت، ثابت $DW_{p,q}(X)$ را در فضای باناخ $(X, \|\cdot\|)$ تعریف می کنیم. فرض کنید $p \in [۰, ۱)$ و $q \in (۰, ۱]$ مفروض باشند. به ازای هر دوبردار متمایز و غیر صفر $x, y \in X$ قرار می دهیم:

$$f_{p,q}(x, y) = \frac{\left(\|x\|^{(۱-p)q} + \|y\|^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}}}{\|x - y\|}\alpha_p[x, y] \quad (۱.۲)$$

اینک ثابت $DW_{p,q}(X)$ را چنین تعریف می کنیم:

$$DW_{p,q}(X) = \sup\left\{f_{p,q}(x,y) : x,y \in X, \quad x,y \neq 0, \quad x \neq y\right\} \tag{۲.۲}$$

از قضیه ۱.۲ (iii) نتیجه می شود که $2^{1+\frac{1}{q}}$ یک کران بالا برای مجموعه ذکر شده در رابطه (۲.۲) می باشد و لذا $DW_{p,q}(X)$ خوش تعریف است. همچنین با توجه به روابط (۲.۱)، (۱.۲) و (۲.۲) مشاهده می شود که $DW_{0,1}(X) = DW(X)$ و لذا ثابت $DW_{p,q}(X)$، مفهوم ثابت دانکل–ویلیامز را به هر عدد $p \in [0,1)$ و $q \in (0,1]$ گسترش می دهد. در قضیه بعدی ضمن تعیین کران‌های بالا و پائین ثابت $DW_{p,q}(X)$، نشان می دهیم اخذ کران پائین رده فضاهای هیلبرت را مشخصه سازی می کند.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و $(p,q) \in [0,1) \times (0,1]$. گزاره های زیر برقرار می باشند:*

(i) $DW_{p,q}(X) \in [2^{\frac{1}{q}}, 2^{\frac{1}{q}}(2-p)]$

(ii) $DW_{p,q}(X) = 2^{\frac{1}{q}}$ *اگر و فقط اگر نرم $\|\cdot\|$ از یک ضرب داخلی القاء شود.*

اثبات. (i) بردارهای $x,y \in X$ را به قسمی در نظر می گیریم که $x \neq y$، $x,y \neq 0$ و $\|x\| = \|y\|$. نتیجه می شود $\alpha_p[x,y] = \frac{\|x-y\|}{\|x\|^{1-p}}$ و لذا به دست می‌آید $f_{p,q}(x,y) = 2^{\frac{1}{q}}$. اکنون بنابر تعریف $DW_{p,q}(X)$، نامساوی $DW_{p,q}(X) \geq 2^{\frac{1}{q}}$ نتیجه می شود. برای نشان دادن اینکه $DW_{p,q}(X) \leq 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$، از قضیه ۱.۲ (i) ملاحظه می شود که به ازای هر دو بردار متمایز و ناصفر x,y نامساوی زیر برقرار است.

$$f_{p,q}(x,y) \leq \left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{2-p}{\left(\max\{\|x\|,\|y\|\}\right)^{1-p}} \tag{۳.۲}$$

بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $\|x\| \leq \|y\|$. از آنجایی که $p < 1$ و $q > 0$، به دست می آید $\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\|y\|^{1-p}$. اینک باتوجه به نامساوی اخیر، از نامساوی (۳.۲) نتیجه می شود $f_{p,q}(x,y) \leq 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ و لذا بنابر تعریف $DW_{p,q}(X)$، نامساوی مطلوب به دست می آید.

(ii) بنابر قسمت (i)، $DW_{p,q}(X) = 2^{\frac{1}{q}}$ اگر و فقط اگر $DW_{p,q}(X) \leq 2^{\frac{1}{q}}$ یا معادلاً به ازای هر دو بردار متمایز و مخالف صفر $x,y \in X$ داریم $f_{p,q}(x,y) \leq 2^{\frac{1}{q}}$ یا به عبارت دیگر نامساوی زیر برقرار است

$$\alpha_p[x,y] \leq 2^{\frac{1}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

اکنون بنابر قضیه ۲.۲، نامساوی اخیر برقرار است اگر و فقط اگر X یک فضای هیلبرت باشد.

□

در قضیه ۳.۲ نشان داده‌ایم که $2^{\frac{1}{q}} \leq DW_{p,q}(X) \leq 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$. با توجه به قسمت (ii) این قضیه، نتیجه می شود $2^{\frac{1}{q}}$ به عنوان کران پایین $DW_{p,q}(X)$ بهترین انتخاب است. در مثال بعدی ضمن محاسبه $DW_{p,q}(l^\infty)$ نشان می دهیم که $2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ به عنوان کران بالای $DW_{p,q}(X)$ نیز بهترین انتخاب ممکن است.

مثال ۴.۲. فضای باناخ l^∞ مشتمل بر همه دنباله های کراندار اعداد حقیقی را با نرم $\|x\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j|$ $\left(x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}\right)$ در نظر می گیریم. فرض کنیم $x = (۱, ۱, ...)$ و $y_t = (۱ - t, ۱ + t, ...)$ که در آن t عدد مثبت دلخواهی است. داریم $\|x\| = ۱$، $\|y_t\| = ۱ + t$، $\|x - y_t\| = t$ و $\alpha[x, y_t] = \frac{۲t}{۱+t}$. با به کار بردن قضیه ۱.۲ (ii)، نامساوی زیر بدست می آید.

$$\alpha_p[x, y_t] \geq ۲t(۱ + t)^{p-۱} - \left((۱ + t)^p - ۱\right) \tag{۴.۲}$$

با استفاده از نامساوی (۴.۲) نتیجه می شود

$$f_{p,q}(x, y_t) \geq \left(۱ + (۱ + t)^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}} \left(۲(۱ + t)^{p-۱} - \frac{(۱ + t)^p - ۱}{t}\right). \tag{۵.۲}$$

قرار می دهیم $\phi(t) = \left(۱ + (۱ + t)^{(۱-p)q}\right)^{\frac{۱}{q}} \left(۲(۱ + t)^{p-۱} - \frac{(۱+t)^p-۱}{t}\right)$. نتیجه می شود

$$\lim_{t\to ۰^+} \phi(t) = ۲^{\frac{۱}{q}} \left(۲ - \lim_{t\to ۰^+} \frac{(۱ + t)^p - ۱}{t}\right) = ۲^{\frac{۱}{q}} \left(۲ - \frac{d}{dt}(۱ + t)^p \mid_{t=۰}\right) = ۲^{\frac{۱}{q}} (۲ - p). \tag{۶.۲}$$

ادعا می کنیم $DW_{p,q}(l^\infty) = ۲^{\frac{۱}{q}} (۲ - p)$، زیرا در غیر این صورت از قضیه ۳.۲ (i) نتیجه می شود $DW_{p,q}(l^\infty) < ۲^{\frac{۱}{q}} (۲ - p)$. لذا با توجه به (۶.۲) عدد مثبت به اندازه کافی کوچک t موجود است به طوری که $DW_{p,q}(l^\infty) < \phi(t)$، که با توجه به نامساوی (۵.۲) به دست می آید $DW_{p,q}(l^\infty) < f_{p,q}(x, y_t)$ که غیر ممکن است.

۳. $DW_{p,q}(X)$ در پیوند با مدول تحدب و ثابت جیمز

در این بخش ارتباط $DW_{p,q}(X)$ با مدول تحدب و ثابت شناخته شده جیمز را مطالعه می کنیم. اما نخست به یادآوری مدول تحدب، مشخصه تحدب، ثابت جیمز، ... می پردازیم.

تابع $\delta_X : [۰, ۲] \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه

$$\begin{aligned} \delta_X(t) &= \inf\left\{۱ - \left\|\frac{x + y}{۲}\right\| : x, y \in S_X, \quad \|x - y\| = t\right\} \\ &= \inf\left\{۱ - \left\|\frac{x + y}{۲}\right\| : x, y \in B_X, \quad \|x - y\| \geq t\right\} \end{aligned}$$

مدول تحدب X و عدد ثابت $\epsilon_۰(X) = \sup\{t \in [۰, ۲] : \delta_X(t) = ۰\}$ مشخصه تحدب X نامیده می شوند. مدول تحدب یکی از مفاهیم موثر در رده‌بندی فضاهای زمینه است. به عنوان نمونه، X یک فضای به طور یکنواخت محدب است اگر و فقط اگر برای هر $۰ < t$ داشته باشیم $۰ < \delta_X(t)$. مدول تحدب را می توان معیاری برای سنجش اینکه کره یکه فضای زمینه چقدر گرد است، انگاشت. این معیار به ازای همه وترهای هم طول، تعیین می کند که نقطه میانی این وترها چقدر تا کره یکه فاصله دارند و فاصله کمینه را به دست می آورد. مدول تحدب δ_X بر بازه $[۰, ۲)$ پیوسته، در حالت $\epsilon_۰(X) > ۰$ بر بازه

$[\circ, \epsilon_\circ(X))$ تابع ثابت صفر و در حالت $\epsilon_\circ(X) < 2$ بر بازه $[\epsilon_\circ(X), 2]$ اکیداً صعودی است. همچنین اگر H یک فضای هیلبرت باشد، همواره داریم $\delta_H(t) = 1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$ که برمدول تحدب هر فضای باناخ X مسلط است. به عبارت دیگر به ازای هر $t \in [\circ, 2]$ نتیجه می شود $\delta_X(t) \leq \delta_H(t)$. برای اطلاعات بیشتر در این خصوص به [۱، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۸، ۱۹] مراجعه کنید.

فضای باناخ X به طور یکنواخت غیر مربعی نامیده می شود هر گاه عدد مثبت $\circ < \delta < 2$ یافت شود به طوری که برای هر $x, y \in S_X$ داشته باشیم $\min\Big\{\|x+y\|, \|x-y\|\Big\} \leq \delta$. به منظور ساماندهی مطالعات مربوط به فضاهای به طور یکنواخت غیر مربعی، ثابت جیمز به صورت

$$J(X) = \sup\Big\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\Big\}$$

تعریف شده است. واضح است که X به طور یکنواخت غیر مربعی است اگر و فقط اگر $J(X) < 2$. برای هر فضای باناخ X داریم $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$. همچنین اگر H یک فضای هیلبرت باشد، $J(\mathrm{H}) = \sqrt{2}$. در صورتی که $\dim \mathrm{H} \geq 3$، اخذ $\sqrt{2}$ به عنوان ثابت جیمز فضای H یک مشخصه سازی فضاهای هیلبرت می باشد. برای مطالعه بیشتر ثابت جیمز و گسترش های آن و همچنین بررسی ویژگی های هندسی مرتبط با این ثابت به [۱، ۲، ۵، ۹، ۲۰] مراجعه کنید.

در قضیه بعدی بر حسب مدول تحدب و همچنین با بهره گیری از نامساوی‌های نرم‌دار به کران‌های بالای کارآمدی برای $f_{p,q}(x, y)$ دست می یابیم. اما نخست به لم ۱.۳ نیازمندیم که در آن به بررسی $\delta_X(t)$ به ازای $t = (2-p)\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}$ می پردازد.

لم ۱.۳. *فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و $\circ \leq p < 1$. در این صورت به ازای هر دو بردار متمایز و ناصفر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار است.*

$$\delta_X\Big((2-p)\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}\Big) \leq \delta_X\left(\frac{\left\|x + \left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p} - 2\right)y\right\|}{\|x-y\|}\right) + \delta_X\left(\frac{\left\|y + \left(\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p} - 2\right)x\right\|}{\|x-y\|}\right)$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $\|y\| \leq \|x\|$. داریم $1 \leq \frac{\|x\|}{\|y\|}$، لذا با توجه به اینکه $1 - p > \circ$ نتیجه می شود $1 \leq \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}$ و از اینجا نامساوی زیر به دست می آید.

$$\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p} - 2 \leq \circ \tag{۱.۳}$$

همچنین با توجه به اینکه $\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq 1$ و $p < 1$ نتیجه می شود $\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$. بنابراین داریم $1 + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p \leq 2\frac{\|y\|}{\|x\|}$ یا معادلاً نامساوی زیر به دست می آید.

$$\left(1 + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p\right)\|x\| - 2\|y\| \leq \circ \tag{۲.۳}$$

با ملاحظه نامساوی (۱.۳) و (۲.۳) روابط زیر برقرار می باشند.

$$
\begin{aligned}
\left\| x + \left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \right)^{1-p} - 2 \right) y \right\| &\geq \left| \|x\| - \left| \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \right)^{1-p} - 2 \right| \|y\| \right| \\
&= \left| \|x\| + \left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \right)^{1-p} - 2 \right) \|y\| \right| \quad \text{بنابر نامساوی (۱.۳)} \\
&= \left| \left(1 + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^{p} \right) \|x\| - 2\|y\| \right| \\
&= 2\|y\| - \left(1 + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^{p} \right) \|x\| \quad \text{بنابر نامساوی (۲.۳)}
\end{aligned}
\tag{۳.۳}
$$

اکنون دقت می کنیم که برای رسیدن به نامساوی مطلوب، با توجه به اینکه تابع مدول تحدب صعودی و نامنفی است، کافی است نشان دهیم که نامساوی زیر برقرار است

$$(2 - p)| \|x\| - \|y\| | \leq \left\| x + \left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \right)^{1-p} - 2 \right) y \right\|.$$

برای برقراری نامساوی اخیر، با توجه به نامساوی (۳.۳)، کافی است برقراری نامساوی زیر بررسی شود

$$(2 - p)| \|x\| - \|y\| | \leq 2\|y\| - \left(1 + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^{p} \right) \|x\|.$$

ملاحظه می شود که نامساوی اخیر برقرار است اگر و فقط اگر $p\frac{\|y\|}{\|x\|} - \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p + 1 - p \geq 0$. در حالت $p = 0$، نامساوی اخیر به وضوح برقرار است. لذا گیریم $p \neq 0$. باقرار دادن $t = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ در نامساوی اخیر و تحلیل رفتار تابع مشتق پذیر $f(t) = pt - t^p + 1 - p$ در قلمرو اعداد حقیقی مثبت، مشاهده می شود به ازای $t \geq 1$ داریم $f'(t) \geq 0$. در نتیجه تابع f در بازه $[1, \infty)$ صعودی است، لذا با توجه $f(1) = 0$ نتیجه می شود که به ازای هر $t \geq 1$، $f(t) \geq 0$.

□

قضیه ۲.۳. *فرض کنید* $(X, \|\cdot\|)$ *یک فضای باناخ باشد و* $(p, q) \in [0, 1) \times (0, 1]$. *در این صورت به ازای هر دو بردار متمایز و ناصفر* $x, y \in X$ *نامساوی های زیر برقرار می باشند.*

(i) $f_{p,q}(x, y) \leq 2^{1+\frac{1}{q}} - 2^{\frac{1}{q}}\delta_X\left((2 - p)\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}\right)$

(ii) $f_{p,q}(x, y) \leq 2^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{1}{q}}\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}$

اثبات. فرض کنید $x, y \in X$ ($x \neq y\ ,\ x, y \neq 0$). با توجه به تعریف $f_{p,q}(x, y)$، با به کار بردن نامساوی شناخته شده $(a + b)^t \leq 2^{t-1}(a^t + b^t)$ ($a, b \geq 0\ ,\ t \geq 1$) به ازای $a = \|x\|^{(1-p)q}$، $b = \|y\|^{(1-p)q}$، $t = \frac{1}{q}$ و همچنین نامساوی مثلثی، روابط زیر برقرار می باشند.

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x,y) &= \frac{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|x-y\|}\alpha_p[x,y] \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}-1}\frac{\left(\|x\|^{1-p} + \|y\|^{1-p}\right)}{\|x-y\|}\left\|\frac{x}{\|x\|^{1-p}} - \frac{y}{\|y\|^{1-p}}\right\| \\ &= 2^{\frac{1}{q}-1}\|x-y\|^{-1}\left\|\left(1+\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}\right)x - \left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}+1\right)y\right\| \\ &= 2^{\frac{1}{q}-1}\|x-y\|^{-1}\left\|\left(x-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}y\right)+\left(\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}x-y\right)\right\| \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}-1}\|x-y\|^{-1}\left(\left\|x-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}y\right\|+\left\|\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}x-y\right\|\right) \\ &= 2^{\frac{1}{q}-1}\left(\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}+\frac{y-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}y}{\|x-y\|}\right\|+\left\|\frac{\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}x-x}{\|x-y\|}+\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\|\right) \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

(i) قرار دهید $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, $v = \frac{1-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}}{\|x-y\|}y$, $w = \frac{\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}-1}{\|x-y\|}x$. داریم $u \in B_X$. در ادامه نشان می دهیم $v \in B_X$.
اگر $\|y\| \leq \|x\|$ آنگاه $\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p \leq 1 \leq \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}$. لذا نتیجه می شود

$$\|v\| = \frac{\left(1-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}\right)\|y\|}{\|x-y\|} = \frac{\|y\|-\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p\|x\|}{\|x-y\|} \leq \frac{\|y\|-\|x\|}{\|x-y\|} \leq 1.$$

اگر $\|x\| \leq \|y\|$ آنگاه $\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p} \leq 1 \leq \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p$. لذا نتیجه می شود

$$\|v\| = \frac{\left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}-1\right)\|y\|}{\|x-y\|} = \frac{\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p\|x\|-\|y\|}{\|x-y\|} \leq \frac{\|x\|-\|y\|}{\|x-y\|} \leq 1.$$

بنابراین $v \in B_X$. مشابهاً ثابت می شود $w \in B_X$. با توجه به تعلق بردارهای u، v و w به گوی یکه، بنا به تعریف تابع مدول تحدب δ_X نتیجه می شود $\|u+w\| \leq 2-2\delta_X(\|u-w\|)$, $\|u+v\| \leq 2-2\delta_X(\|u-v\|)$. اینک باملاحظه دو نامساوی اخیر، نامساوی زیر از (۴.۳) به دست می آید.

$$f_{p,q}(x,y) \leq 2^{1+\frac{1}{q}} - 2^{\frac{1}{q}}\left(\delta_X\left(\frac{\left\|x+\left(\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{1-p}-2\right)y\right\|}{\|x-y\|}\right)+\delta_X\left(\frac{\left\|y+\left(\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1-p}-2\right)x\right\|}{\|x-y\|}\right)\right)$$

با به کاربردن لم ۱.۳، نامساوی زیر از نامساوی اخیر به دست می آید.

$$f_{p,q}(x,y) \le ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۲-p)\frac{|\,\|x\|-\|y\|\,|}{\|x-y\|}\right)$$

(ii) با استفاده از نامساوی مثلثی، روابط زیر از (۴.۳) به دست می آیند.

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x,y) &\le ۲^{\frac{۱}{q}-۱}\left(۲+\frac{\left|۱-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{۱-p}\right|\|y\|}{\|x-y\|}+\frac{\left|۱-\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{۱-p}\right|\|x\|}{\|x-y\|}\right)\\ &= ۲^{\frac{۱}{q}}+۲^{\frac{۱}{q}-۱}\left(\frac{\left|\|y\|-\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{p}\|x\|\right|}{\|x-y\|}+\frac{\left|\|x\|-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{p}\|y\|\right|}{\|x-y\|}\right)\end{aligned}$$

با توجه به نامساوی اخیر، برای رسیدن به نامساوی مطلوب کافی است نامساوی زیر را نشان دهیم.

$$\left|\|y\|-\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{p}\|x\|\right|+\left|\|x\|-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{p}\|y\|\right| \le ۲|\,\|x\|-\|y\|\,| \qquad (۵.۳)$$

بدون کاستن از کلیت، فرض کنیم $\|x\| \le \|y\|$. نتیجه می شود $\frac{\|x\|}{\|y\|} \le \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^p \le ۱$ و $۱ \le \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p \le \frac{\|y\|}{\|x\|}$. لذا داریم $\|x\| \le \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^p\|y\| \le \|y\|$ و $\|x\| \le \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^p\|x\| \le \|y\|$. بنابراین نامساوی‌های زیر به دست می آیند.

$$\left|\|y\|-\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{p}\|x\|\right| = \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{p}\|x\|-\|y\| \le |\,\|x\|-\|y\|\,|$$

$$\left|\|x\|-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{p}\|y\|\right| = \|x\|-\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{p}\|y\| \le |\,\|x\|-\|y\|\,|$$

اینک نامساوی (۵.۳) از دو نامساوی اخیر نتیجه می شود. □

درگزاره بعدی بر حسب مدول تحدب فضای زمینه، کران بالایی برای $DW_{p,q}(X)$ می یابیم. لحاظ کردن این کران بالا در مطالعات مربوط به بررسی رابطه بین $DW_{p,q}(X)$ و ثابت جیمز (قضیه ۵.۳) اهمیت دارد. گزاره ۳.۳ و قضیه ۵.۳ برخی نتایج ملادو و همکاران [۱۲، قضیه ۴] را از حالت خاص $(p,q)=(۰,۱)$ به هر $(p,q)\in[۰,۱)\times(۰,۱]$ گسترش می دهند.

گزاره ۳.۳. *فرض کنید $(X,\|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و $(p,q)\in[۰,۱)\times(۰,۱]$. در این صورت نامساوی زیر برقرار است.*

$$DW_{p,q}(X) \le \sup_{۰\le t\le\frac{۴}{۲-p}} \min\left\{۲^{۱+\frac{۱}{q}}-۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱-\tfrac{p}{۲})t\right) \quad , \quad ۲^{\frac{۱}{q}}+۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\}$$

اثبات. از قضیه ۲.۳ به ازای هر دو بردار متمایز و ناصفر $x,y\in X$ نتیجه می شود

$$f_{p,q}(x,y) \leq \min\left\{ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}}\left(\frac{|\,\|x\|-\|y\|\,|}{\|x-y\|}\right),\ ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۲-p)\frac{|\,\|x\|-\|y\|\,|}{\|x-y\|}\right)\right\},$$

و لذا به دست می آید

$$DW_{p,q}(X) \leq \sup_{x\neq y, x,y\neq ۰} \min\left\{ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}}\left(\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}\right), ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۲-p)\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}\right)\right\}.$$

اینک با قرار دادن $t = 2\frac{|\|x\|-\|y\||}{\|x-y\|}$ در نامساوی اخیر و ملاحظه پیمایش گستره تغییرات t در بازه $[۰,۲]$ و همچنین گسترش محدوده سوپریمم گیری، نامساوی‌های زیر برقرار می باشند.

$$\begin{aligned} DW_{p,q}(X) &\leq \sup_{۰\leq t\leq ۲} \min\left\{ ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱-\frac{p}{۲})t\right)\ ,\ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\} \\ &\leq \sup_{۰\leq t\leq \frac{۴}{۲-p}} \min\left\{ ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱-\frac{p}{۲})t\right)\ ,\ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\} \end{aligned}$$

□

با ملاحظه گزاره ۳.۳، برای دستیابی به ارتباط بین $DW_{p,q}(X)$ و ثابت جیمز به بررسی عبارت زیر می پردازیم

$$\sup_{۰\leq t\leq \frac{۴}{۲-p}} \min\left\{ ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱-\frac{p}{۲})t\right), ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\}$$

برای این منظور، در قضیه پیش رو نخست رابطه عبارت اخیر با ثابت جیمز را مطالعه می کنیم و سپس کران بالایی کارآمد برای $DW_{p,q}(X)$ بر حسب ثابت جیمز ارائه می دهیم. ولی قبل از آن به لم ۴.۳ نیازمندیم. در بخش اول لم، نتیجه‌ای از گائو و لائو [۱۰، قضیه ۴.۵] یادآوری می گردد و در بخش دوم لم، نشان می دهیم که مشخصه تحدب و ثابت جیمز بیشترین مقدار ممکن خود را توأماً اخذ می کنند.

لم ۴.۳. *[۱۰] در هر فضای باناخ $(X, \|\cdot\|)$ گزاره های زیر برقرارند.*

(i) $J(X) = \sup\left\{t \in (۰,۲) :\ \delta_X(t) < ۱ - \frac{t}{۲}\right\}$

(ii) $J(X) = ۲$ *اگر و فقط اگر* $\epsilon_۰(X) = ۲$.

اثبات. (ii) فرض کنیم $J(X) = ۲$. بنابر (i) دنباله صعودی $(t_n)_{n=۱}^{\infty}$ در بازه $(۰,۲)$وجود دارد به قسمی که $\delta_X(t_n) < ۱ - \frac{t_n}{۲} \quad (n \in \mathbb{N})$ و $t_n \underset{(n\longrightarrow\infty)}{\longrightarrow} ۲$. نامساوی اخیر، نامنفی بودن تابع مدول تحدب و همگرایی $۱ - \frac{t_n}{۲} \underset{(n\longrightarrow\infty)}{\longrightarrow} ۰$ ایجاب می کنند که $\delta_X(t_n) \underset{(n\longrightarrow\infty)}{\longrightarrow} ۰$ که از آن با توجه به صعودی بودن تابع مدول تحدب نتیجه می شود $\delta_X(t_n) = ۰ \quad (n \in \mathbb{N})$.
اینک فرض کنید $۰ < t < ۲$ دلخواه باشد. برای رسیدن به $\epsilon_۰(X) = ۲$ باید نشان دهیم $\delta_X(t) = ۰$. از همگرایی $t_n \underset{(n\longrightarrow\infty)}{\longrightarrow} ۲$، به ازای عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ N داریم $t < t_N$. لذا نتیجه می شود $\delta_X(t) \leq \delta_X(t_N) = ۰$، پس $\delta_X(t) = ۰$.
بالعکس فرض کنیم $\epsilon_۰(X) = ۲$. برای هر $t \in (۰,۲)$ نتیجه می شود $\delta_X(t) = ۰$ لذا نامساوی $\delta_X(t) < ۱ - \frac{t}{۲}$ برقرار

می باشد. با ملاحظه (i) به دست می آید $J(X) = \sup(۰, ۲) = ۲$. □

قضیه ۵.۳. *فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و $(p, q) \in [۰, ۱) \times (۰, ۱]$. در این صورت نامساوهای زیر برقرارند.*

$$\text{(i)} \sup_{۰ \le t \le \frac{۴}{۲-p}} \min\left\{۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱ - \tfrac{p}{۲})t\right) \ , \ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\} \le ۲^{\frac{۱}{q}}\left(۱ + \frac{J(X)}{۲-p}\right)$$

$$\text{(ii)} \sup_{۰ \le t \le \frac{۴}{۲-p}} \min\left\{۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱ - \tfrac{p}{۲})t\right) , \ ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t\right\} \ge ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X(J(X))$$

$$\text{(iii)} \ DW_{p,q}(X) \le ۲^{\frac{۱}{q}}\left(۱ + \frac{J(X)}{۲-p}\right)$$

اثبات. با توجه به صورت بندی قضیه و به منظور بررسی کران های بالا و پایین مجموعه مورد نظر، توابع f ، g و h را به ازای $t \in [۰ \ , \ \frac{۴}{۲-p}]$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(t) = ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱ - \tfrac{p}{۲})t\right) \ , \ g(t) = ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}t \ , \ h(t) = \min\{f(t), g(t)\}$$

(i) نشان می دهیم $\sup\limits_{۰ \le t \le \frac{۴}{۲-p}} h(t) \le ۲^{\frac{۱}{q}}\left(۱ + \frac{J(X)}{۲-p}\right)$. در حالت $J(X) = ۲$، از لم ۴.۳ (ii) نتیجه می شود $\epsilon_۰(X) = ۲$ و لذا به ازای هر $t \in [۰ \ , \ \frac{۴}{۲-p}]$ داریم $\delta_X\left((۱ - \frac{p}{۲})t\right) = ۰$. در این حالت تابع h به صورت زیر دست می آید.

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & ۰ \le t < ۲ \\ f(t) & ۲ \le t \le \frac{۴}{۲-p} \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \sup_{۰ \le t \le \frac{۴}{۲-p}} h(t) &= \max\left\{\sup_{۰ \le t \le ۲} g(t) \quad , \quad \sup_{۲ \le t \le \frac{۴}{۲-p}} f(t)\right\} \\ &= \max\left\{۲^{۱+\frac{۱}{q}} \quad , \quad ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X(۲-p)\right\} \\ &= ۲^{۱+\frac{۱}{q}} \le ۲^{\frac{۱}{q}}\left(۱ + \frac{۲}{۲-p}\right) \end{aligned}$$

اکنون فرض می کنیم $J(X) < ۲$. از لم ۴.۳ (ii) معادلاً داریم $\epsilon_۰(X) < ۲$. باقرار دادن $\phi(t) = f(t) - g(t)$ مشاهده می شود که ϕ بر بازه $[۰ \ , \ \frac{۴}{۲-p})$ پیوسته و بر بازه $[۰ \ , \ \frac{۴}{۲-p}]$ اکیداً نزولی است. به دست می آید $\phi(\epsilon_۰(X)) = ۲^{\frac{۱}{q}}\left(۱ - \delta_X\left((۱ - \frac{p}{۲})\epsilon_۰(X)\right) - \frac{\epsilon_۰(X)}{۲}\right)$ از نامساوی $(۱ - \frac{p}{۲})\epsilon_۰(X) \le \epsilon_۰(X) < ۲$، بنا به تعریف مشخصه تحدب نتیجه می شود $\delta_X\left((۱ - \frac{p}{۲})\epsilon_۰(X)\right) = ۰$ و لذا $\phi(\epsilon_۰(X)) > ۰$. اد عا می کنیم عدد $t \in \left(\epsilon_۰(X) \ , \ \frac{۴}{۲-p}\right)$ وجود دارد به طوری که $\phi(t) < ۰$. زیرا در غیر این صورت به ازای هر $t \in \left(\epsilon_۰(X) \ , \ \frac{۴}{۲-p}\right)$ نتیجه می شود $\delta_X\left((۱ - \frac{p}{۲})t\right) \le ۱ - \frac{t}{۲}$. دنباله صعودی $(t_n)_{n=۱}^{\infty}$ در بازه $\left(\epsilon_۰(X) \ , \ \frac{۴}{۲-p}\right)$ را به گونه ای در نظر می گیریم که $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \frac{۴}{۲-p}$. با توجه به

نامساوی اخیر نتیجه می شود $-\frac{p}{۲-p} \leq \lim_{n\to\infty} \delta_X\left((۱-\frac{p}{۲})t_n\right) \leq ۰$ که در حالت $p \neq ۰$ یک تناقض است و در حالت $p = ۰$ به دست می آید $\lim_{n\to\infty} \delta_X(t_n) = ۰$ که با توجه به صعودی بودن تابع مدول تحدب و دنباله $(t_n)_{n=۱}^{\infty}$ نتیجه می شود $\delta_X(t_n) = ۰ \ (n \in \mathbb{N})$ یعنی $t_n \in [۰, \epsilon_۰(X)] \ (n \in \mathbb{N})$ که باز هم یک تناقض است. اینک با به کارگیری قضیه مقدار میانی برای برای تابع پیوسته و اکیداً نزولی ϕ نتیجه می شود عدد منحصر بفرد $t_{p,q} \in (\epsilon_۰(X)\ ,\ \frac{۴}{۲-p})$ وجود دارد به طوری که $\phi(t_{p,q}) = ۰$ یعنی $f(t_{p,q}) = g(t_{p,q})$. لذا بر بازه $[۰, t_{p,q}]$ داریم $\phi \geq ۰$ یعنی $h = g$ و همچنین بر بازه $[t_{p,q}\ ,\ \frac{۴}{۲-p}]$ داریم $\phi \leq ۰$ یعنی $h = f$. در نتیجه روابط زیر برقرار می باشند.

$$\begin{aligned}\sup_{۰\leq t\leq\frac{۴}{۲-p}} h(t) &= \max\Big\{\sup_{۰\leq t\leq t_{p,q}} g(t)\ ,\ \sup_{t_{p,q}\leq t\leq\frac{۴}{۲-p}} f(t)\Big\} = \max\Big\{g(t_{p,q})\ ,\ f(t_{p,q})\Big\} = g(t_{p,q})\\ &= ۲^{\frac{۱}{q}} + ۲^{\frac{۱}{q}-۱}\, t_{p,q}\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

با ملاحظه لم ۴.۳ (i)، تغییر متغیر $s = \frac{۲t}{۲-p}$ و این که تابع ϕ فقط در بازه $[۰\ ,\ t_{p,q})$ مثبت است، روابط زیر برقرار می باشند.

$$\begin{aligned}\frac{۲}{۲-p}J(X) &= \sup\Big\{\frac{۲t}{۲-p} : t \in (۰\ ,\ ۲)\ ,\ \delta_X(t) < ۱ - \frac{t}{۲}\Big\}\\ &= \sup\Big\{s : s \in (۰\ ,\ \frac{۴}{۲-p})\ ,\ \delta_X((۱-\frac{p}{۲})s) < ۱ - \frac{s}{۲} + \frac{p}{۴}s\Big\}\\ &\geq \sup\Big\{s : s \in (۰\ ,\ \frac{۴}{۲-p})\ ,\ \delta_X((۱-\frac{p}{۲})s) < ۱ - \frac{s}{۲}\Big\}\\ &= \sup\Big\{s : s \in (۰\ ,\ \frac{۴}{۲-p})\ ,\ \phi(s) > ۰\Big\}\\ &= t_{p,q}\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

با ملاحظه (۶.۳) و (۷.۳) نامساوی مطلوب نتیجه می شود.

(ii) باید ثابت کنیم $\sup_{۰\leq t\leq\frac{۴}{۲-p}} h(t) \geq ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X(J(X))$. در حالت $J(X) = ۲$ در برهان (i) نشان داده‌ایم که $\sup_{۰\leq t\leq\frac{۴}{۲-p}} h(t) = ۲^{۱+\frac{۱}{q}}$ که به وضوح نامساوی مورد نظر برقرار است. پس فرض کنیم $J(X) < ۲$. با مرور رابطه (۶.۳) و با توجه به $f(t_{p,q}) = g(t_{p,q})$ رابطه زیر به دست می آید.

$$\sup_{۰\leq t\leq\frac{۴}{۲-p}} h(t) = f(t_{p,q}) = ۲^{۱+\frac{۱}{q}} - ۲^{\frac{۱}{q}}\delta_X\left((۱-\frac{p}{۲})t_{p,q}\right) \tag{۸.۳}$$

اینک با ملاحظه صعودی بودن تابع مدول تحدب، از (۷.۳) و (۸.۳) نامساوی مطلوب به دست می آید.

(iii) از گزاره ۳.۳ و قضیه ۵.۳ (i) نتیجه می شود. □

۴. $DW_{p,q}(X)$ در فضاهای باناخ به طور یکنواخت غیر مربعی

در بخش پایانی به عنوان نتایجی از مطالعات انجام شده، کران‌های بالای $DW_{p,q}(X)$ را که در بخش های قبل مورد بررسی قرار گرفته اند با یکدیگر مقایسه می کنیم و نشان می دهیم که در فضاهای به طور یکنواخت غیر مربعی کران بالای $2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ برای ثابت $DW_{p,q}(X)$ به ازای برخی مقادیر p اخذ نمی گردد. اما نخست به ملاحظه زیر توجه می کنیم که در آن نتیجه شناخته شده‌ای با رویکردی دیگر به دست می آید.

ملاحظه ۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای به طور یکنواخت غیرمربعی باشد به عبارت دیگر گیریم $J(X) < 2$. در خصوص ارتباط ثابت جیمز و مدول تحدب، کاسینی [1] در [۲] و بارونتی [2] و پاپینی [3] در [۱] رابطه شناخته شده زیر را با معرفی برخی ثابت های هندسی، در پیوند با دوگان X نشان داده‌اند.

$$\delta_X(J(X)) = 1 - \frac{J(X)}{2} \qquad (۱.۴)$$

در اینجا با رهیافتی دیگر و با تحلیل نامساوی نرم دار به کار رفته در قضیه ۵.۳ در حالت خاص $J(X) < 2$ و $p = 0$، نشان می دهیم که رابطه (۱.۴) برقرار است. با مرور برهان قضیه ۵.۳ مشاهده می شود که درحالت $p = 0$ نامساوی (۷.۳) به تساوی تبدیل می گردد. نتیجتاً درحالت $p = 0$ ، در بخش های (i) و (ii) قضیه ۵.۳ حالت تساوی برقرار می شود. اگر h را همان تابع معرفی شده در برهان قضیه ۵.۳ در نظر بگیریم، به دست می آید:

$$\sup_{0\leq t\leq 2} h(t) = 2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2}\right) \qquad , \qquad \sup_{0\leq t\leq 2} h(t) = 2^{1+\frac{1}{q}} - 2^{\frac{1}{q}}\delta_X(J(X))$$

لذا نتیجه می شود $2^{1+\frac{1}{q}} - 2^{\frac{1}{q}}\delta_X(J(X)) = 2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2}\right)$ یا معادلاً رابطه (۱.۴) حاصل می شود.

در قضیه ۳.۲ و قضیه ۵.۳ به ترتیب نشان داده ایم که $2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ و $2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2-P}\right)$ کران بالای $DW_{p,q}(X)$ می باشند. در ادامه شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن ها یک کران بالا، بهبودی نسبت به دیگری است. ملاحظه می شود که نامساوی $2^{\frac{1}{q}}(2-p) \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2-P}\right)$ برقرار است اگر و فقط اگر $J(X) \leq (p-1)(p-2)$. با توجه به گستره تغییرات ثابت جیمز، $J(X) \in [\sqrt{2}, 2]$، برای ممکن بودن نامساوی اخیر لازم است داشته باشیم $\sqrt{2} \leq (p-1)(p-2)$. با ملاحظه این که $p \in [0,1)$، با محاسباتی سر راست نتیجه می شود که نامساوی اخیر برقرار است اگر و فقط اگر $0 \leq p \leq \frac{3-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$. همچنین اگر $\frac{3-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \leq p < 1$ نتیجه می شود $(p-1)(p-2) \leq \sqrt{2}$ و لذا $J(X) \geq (p-1)(p-2)$ یا معادلاً $2^{\frac{1}{q}}(2-p) \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2-P}\right)$. نتیجه بعدی، صورت بندی مطالب فوق است.

نتیجه ۲.۴. *فرض کنید* $(X, \|\cdot\|)$ *یک فضای باناخ باشد و* $(p,q) \in [0,1) \times (0,1]$. *در این صورت گزاره های زیر برقرارند.*

(i) $$DW_{p,q}(X) \leq \min\left\{2^{\frac{1}{q}}(2-p) \ , \ 2^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{J(X)}{2-p}\right)\right\}$$

---
[1] Casini
[2] Baronti
[3] Papini

(ii) $2^{\frac{1}{q}}(2-p) \le 2^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{J(X)}{2-p}\right)$ *اگر و فقط اگر* $p_0 \le p \le 2$ و $J(X) \le (p-1)(p-2)$.

(iii) $2^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{J(X)}{2-p}\right) \le 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ *اگر و فقط اگر* $p_0 \le p < 1$ *یا* $J(X) \ge (p-1)(p-2)$.

(که در آن $p_0 = \frac{3-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$*)*

به عنوان پیامد مستقیم نتیجه ۲.۴، در نتیجه بعدی نشان می دهیم که فرض به طور یکنواخت غیرمربعی بودن فضای زمینه، شرطی است کافی برای آن که نامساوی $DW_{p,q}(X) \le 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ به صورت اکید برقرار باشد. نتیجه ۳.۴ بخشی از مطالعات [۱۲، نتیجه ۵] را گسترش می دهد.

نتیجه ۳.۴. *فرض کنید* $(X, \|\cdot\|)$ *یک فضای به طور یکنواخت غیرمربعی باشد. در این صورت به ازای هر* $p \in [0, \frac{3-\sqrt{1+4J(X)}}{2})$ *و هر* $q \in (0,1]$ *نامساوی* $DW_{p,q}(X) < 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ *برقرار است.*

اثبات. از فرض به طور یکنواخت غیرمربعی بودن X داریم $J(X) < 2$ و لذا $0 < \frac{3-\sqrt{1+4J(X)}}{2}$. اکنون فرض کنید $p \in [0, \frac{3-\sqrt{1+4J(X)}}{2})$ و $q \in (0,1]$. با بررسی ریشه های تابع درجه دوم $f : [0,1) \to \mathbb{R}$، $f(t) = (t-1)(t-2) - J(X)$ نتیجه می شود $f(p) > 0$ که با توجه به نتیجه ۲.۴ (ii) نامساوی $2^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{J(X)}{2-p}\right) \le 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ برقرار می باشد. با ملاحظه نامساوی اخیر، از نتیجه ۲.۴ (i) نامساوی مطلوب به دست می آید. □

در پایان، به ازای هر $(p,q) \in [0,1) \times (0,1]$ نشان می دهیم $DW_{p,q}(l^1) = 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$ که در آن l^1 فضای باناخ همه دنباله های به فرم $x = (\xi_j)_{j\in N}$ با شرط $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j| < \infty$ و نرم $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|$ می باشد. بنابر این با توجه به نتیجه ۳.۴، l^1 به طور یکنواخت غیر مربعی نیست.

قراردهید $x_t = (1, \frac{9}{10}t, \frac{9}{10^2}t, \ldots)$ و $y = (1, 0, 0, \ldots)$ که در آن t عدد مثبت دلخواهی است. با محاسباتی سر راست داریم $\|x_t\| = 1+t$، $\|y\| = 1$، $\|x_t - y\| = t$ و $\alpha[x_t, y] = \frac{2t}{1+t}$. بامرور شیوه بررسی مثال ۴.۲، از قضیه ۱.۲ (ii)، نامساوی زیر بدست می آید.

$$\alpha_p[x_t, y] \ge 2t(1+t)^{p-1} - \left((1+t)^p - 1\right)$$

از نامساوی اخیر نتیجه می شود که

$$f_{p,q}(x_t, y) \ge \left((1+t)^{(1-p)q} + 1\right)^{\frac{1}{q}}\left(2(1+t)^{p-1} - \frac{(1+t)^p - 1}{t}\right). \tag{۲.۴}$$

اینک با قرار دادن $\phi(t) = \left((1+t)^{(1-p)q} + 1\right)^{\frac{1}{q}}\left(2(1+t)^{p-1} - \frac{(1+t)^p-1}{t}\right)$، مشابه مثال ۴.۲ نتیجه می شود

$$\lim_{t\to 0^+}\phi(t) = 2^{\frac{1}{q}}(2-p).$$

ادعا می کنیم $DW_{p,q}(l^1) < \lim_{t\to 0^+}\phi(t)$. زیرا در غیر این صورت به دست می آید $DW_{p,q}(l^1) = \lim_{t\to 0^+}\phi(t) = 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$، بنابراین با انتخاب عدد مثبت به اندازه کافی کوچک t داریم $DW_{p,q}(l^1) < \phi(t)$، که با ملاحظه نامساوی (۲.۴) نتیجه می شود $DW_{p,q}(l^1) < f_{p,q}(x_t, y)$ که یک تناقض است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از دبیر محترم تخصصی و داور(ان) محترم به خاطر زمانی که صرف مطالعه‌ی دقیق مقاله نموده‌اند و همچنین ارائه پیشنهادهای ارزشمندشان که منجر به بهبود این مقاله شده است، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنند.

مراجع

[1] M. Baronti and P. L. Papini, *Convexity, smoothness and moduli*, J. Nonlinear Anal., **70**, (2009),2457–2465.
[2] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **8** (80), (1986), 11–15.
[3] C. Chidume, *Book, Geometrice properties of Banach spaces and Nolinear Iterations*, Springer, 2009.
[4] F. Dadipour and M. S. Moslehian, *A Characterization of inner product spaces related to the p-angular distance*, J. Math. Anal. Appl., **371**, (2010), 677-681.
[5] F. Dadipour, F. Sadeghi and A. Salemi, *An orthogonality in normed linear spaces based on angular distance inequality*, J. Aequat. Math. (2015).
[6] C. F. Dunkl and K. S. Williams, *A simple norm inequality*, J. Amer. Math. Monthly., **71**(1), (1964), 53–54.
[7] Y. Fu, Y. Li, H. Xie, *The Dunkl-Williams constant related to Birkhoff orthogonality in Banach spaces*, Bull. Iranian Math. Soc.,**50**, (2024).
[8] Y. Fu, Y. Li, H. Xie, *The Dunkl Williams constant related to the Singer orthogonality and red isoceles orthogonality in Banach spaces*, J. Filomat., **37**(17), (2023), 5601–5622.
[9] J. Gao and K. Lau, *On the Geometry of Spheres in Normed Linear Spaces*, J. Austral. Math. Soc., (Series A) **48**, (1990),101-112.
[10] J. Gao and K. Lau, *on two class of Banach spaces with uniform normal structure*, J. Studia Math., **99**(1), (1991).
[11] A. J. Guirao and P. Hajek, *On the moduli of convexity* , J. Amer. Math. Soc., **135**(10), (2007),3233-3240.
[12] A. Jim´enez-Melado, E. Llorens-Fuster, E. M. Mazcu˜n´an-Navarro, *The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure*, J. Math. Anal. Appl., **342**, (2008), 298–310.
[13] P. Jordan and J. Von Neumann, *On inner products in linear, metric spaces*, J. Ann. Math., **36**(2) ,(1935), 719-723.
[14] W. A. Kirk and M. F. Smiley, *Mathematical Notes: Another characterization of inner product spaces*, J. Amer. Math. Monthly.,**71**(8), (1964), 890–891.
[15] M. Krnic and N. Minculete, *Bounds for the p-Angular Distance and Characterization of Inner Product Spaces*, Mediterr. J. Math. 2010.
[16] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, J. Amer. Math. Monthly., **3**(113), (2006) 256–260.
[17] M. S. Moslehian, J. Rooin, S. Habibzadeh, *Geometric a Spects of p-Angular and Skew p-Angular Distances* , Tokyo J. Math., July 2016.
[18] S. Saejung, *The characteristic of convexity of a Banach space and normal structure*, J. Math. Anal. Appl., **337**, (2008), 123-129.
[19] Z. Yang and Y. Li, *A New Geometric Constants in Banach Spaces Related to the Isosceles Orthogonality*, Kyungpook Math. J., **62**, (2022), 271-287.
[20] C. Yang and Y. Wang, *Some properties of James type constant*, J. Appl. Math. Lett., (2012), 538-544.