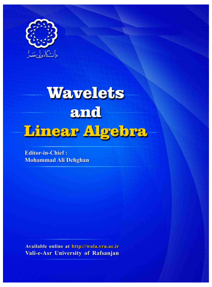
موجک‌ها و جبرخطی ۱۲(۱) (۱۴۰۴) ۵۶-۶۴



موجک‌ها و جبرخطی
http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

نمایش ماتریسی دسته ای از عملگرها در C^*- مدول هیلبرت

مهدی محمدزاده‌کاریزکی*[آ]، جواد فرخی‌استاد[ب]، امین حسینی[ج]

[آ] گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه، ایران
[ب] گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران
[ج] مرکز آموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۹ دی ۱۴۰۳
پذیرفته شده: ۱۰ تیر ۱۴۰۴
دسترسی آنلاین: ۱۰ تیر ۱۴۰۴

کلمات کلیدی:
نمایش ماتریسی عملگر، وارون مور-پنروز، C^*- مدول هیلبرت

چکیده

در این مقاله با بهره‌گیری از روش نمایش ماتریسی عملگرها، شرایطی ارائه می‌شود که تحت آن نمایش ماتریسی عملگر $A^\dagger$ به‌صورت $A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^\dagger & A_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}$ باشد. در این نمایش، ماتریس‌های A_1 و A_3 از نمایش ماتریسی عملگر A به‌صورت $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}$ استخراج می‌شوند. با استفاده از این نمایش ماتریسی و تحت شرایط خاص، نتایج گسترده‌تر و جدیدتری ارائه می‌شود که درک عمیق‌تری از ساختار و رفتار عملگرها فراهم می‌آورد.

۱. مقدمه و پیشنیازها

در تمام این مقاله، $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر است. فرض می‌کنیم که $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$، C^*- مدول های هیلبرت روی $\mathfrak{A}$ باشند. فرض کنید $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ دو $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت باشند، در این صورت مجموعه همه نگاشت‌های الحاق‌پذیر $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ را با $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ نمایش می دهیم، به اختصار بجای $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ از $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ و از نمادهای $\mathfrak{N}(\cdot)$ و $\mathfrak{R}(\cdot)$، به ترتیب برای هسته و برد یک عملگر

* نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: m.mohammadzadeh@torbath.ac.ir (مهدی محمدزاده کاریزکی)، J.farokhi@birjandut.ac.ir (جواد فرخی استاد) hosseini.amin82@gmail.com (امین حسینی).

http://doi.org/10.22072/wala.2025.2049283.1466

استفاده می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد C^*- مدول های هیلبرت و هندسه آن‌ها، به منابع [۴، ۵] مراجعه کنید. زیرمدول $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$ متمم متعامد در $\mathfrak{X}$ نامیده می‌شود اگر $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^\perp = \mathfrak{X}$ باشد، که در آن

$$\mathfrak{M}^\perp = \{x \in \mathfrak{X} : \langle x, y\rangle = ۰, \quad \text{برای هر } y \in \mathfrak{M}\}$$

تعریف می‌شود. در این حالت، $\mathfrak{M}$ بسته است و برای نمایش تصویر $\mathfrak{X}$ بر روی $\mathfrak{M}$ از نماد $P_{\mathfrak{M}}$ استفاده می‌کنیم. برخلاف فضاهای هیلبرت، یک زیرمدول بسته لزوماً متمم متعامد نیست. اگر $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ برد بسته داشته باشد، آنگاه $\mathfrak{R}(T)$ و $\mathfrak{N}(T)$ متمم متعامد هستند؛ قضیه ۲.۳ مرجع [۴] را مشاهده نمایید. از طرفی وارون مور-پنروز تبدیل به یک مفهوم پایه‌ای شده است که برای یادآوری به تعریف آن اشاره می‌کنیم. فرض کنید $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. وارون مور-پنروز عملگر A، که با $A^\dagger$ نشان داده می‌شود، برابر با $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ یکتایی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad \text{و} \quad (XA)^* = XA. \tag{۱.۱}$$

اگر چنین عملگری $A^\dagger$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌گوییم A مور-پنروز وارون پذیر است. معلوم است که A مور-پنروز وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\mathfrak{R}(A)$ در $\mathfrak{Y}$ بسته باشد [۷، قضیه ۲.۲]، و در این حالت داریم:

$$\mathfrak{R}(A^\dagger) = \mathfrak{R}(A^*) \qquad \mathfrak{N}(A^\dagger) = \mathfrak{N}(A^*). \tag{۲.۱}$$

فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو زیر مدول بسته متمم متعامد، از $\mathfrak{A}$- مدول‌های هیلبرت $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ باشند. در این صورت $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}^\perp$ و $\mathfrak{Y} = \mathfrak{N}\oplus\mathfrak{N}^\perp$. از این‌رو، برای عملگر الحاق‌پذیر $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ این زیر مدول های بسته‌ی متمم متعامد، می تواند یک نمایش ماتریسی به صورت زیر القا کند:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ A_۳ & A_۴ \end{bmatrix}, \tag{۳.۱}$$

که در آن $A_۱ \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$، $A_۲ \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}^\perp, \mathfrak{N})$، $A_۳ \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}^\perp)$ و $A_۴ \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}^\perp, \mathfrak{N}^\perp)$.

پس با استفاده از تصاویر متعامد می توان نوشت: $A_۱ = P_{\mathfrak{N}}AP_{\mathfrak{M}}$، $A_۲ = P_{\mathfrak{N}}A(۱ - P_{\mathfrak{M}})$، $A_۳ = (۱ - P_{\mathfrak{N}})AP_{\mathfrak{M}}$ و $A_۴ = (۱ - P_{\mathfrak{N}})A(۱ - P_{\mathfrak{M}})$ [۶].

نمایش ماتریسی یک عملگر ابزاری قدرتمند برای مطالعه عمیق‌تر رفتار عملگرها را فراهم می آورد. این ابزار، با ارائه ساختاری شفاف و منظم، نقش مهمی در ساده‌سازی تحلیل و محاسبات مربوط به عملگرها ایفا می‌کند و از این رو دارای اهمیت ویژه‌ای است. اهمیت این مفهوم را می‌توان از چندین منظر بررسی کرد: هنگامی که نمایش ماتریسی $A^\dagger$ را بر اساس برد عملگر ($\mathfrak{R}(A^*)$) و هسته آن ($\mathfrak{N}(A)$) ارائه می‌کنیم، این تجزیه ماتریسی به‌وضوح ارتباطات موجود میان این فضاها را آشکار می‌سازد. این ساختار نه تنها درک بهتری از رفتار عملگرها فراهم می‌کند، بلکه تفسیر روشنی از ویژگی‌های عملگر ارائه می‌دهد. برای نمونه استفاده از نمایش ماتریس عملگرها و نتایج بیشتر از آن می‌توان به مقالات پایه [۱، ۲] مراجعه نمود.

از منظر کاربردهای محاسباتی، نمایش ماتریسی $A^\dagger$ براساس وارون مور-پنروز درآیه‌هایش، به طور مؤثری محاسبات عددی و طراحی الگوریتم‌های کامپیوتری را برای وارون کردن عملگرها تسهیل می‌کند. این نمایش ماتریسی که در چارچوب C^*-مدول‌های هیلبرت ارائه شده است، نه تنها برای فضاهای متناهی‌بعد، بلکه در فضاهای بی‌نهایت‌بعدی نیز قابل استفاده است. این ویژگی، کاربردهای گسترده‌ای در آنالیز ماتریسی و نظریه عملگر فراهم می‌کند و امکان گسترش این مفهوم به زمینه‌های مختلف از ریاضیات و علوم کاربردی را میسر می‌سازد.

در این مقاله با بکاربردن نمایش ماتریسی عملگرها، به معرفی عملگرهایی می‌پردازیم که در رابطه $A(A^۲)^\dagger = (A^۲)^\dagger A$

صدق می کنند و نمایش ماتریسی عملگر $A^{\dagger}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_1^{\dagger} & A_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \Re(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \Re(A) \end{bmatrix}.$$

اهمیت این نمایش در آن است که وارون مور–پنروز عملگر را براساس وارون مور–پنروز درآیه‌هایش می‌توان نوشت که امکان به‌دست آوردن نتایج بیشتری در رابطه با عملگرهایی که در شرط فوق صدق می‌کنند را فراهم می آورد.

از این رو به بیان لم زیر می‌پردازیم که می توان آن را [۱، ۲، ۳] مشاهده نمایید.

لم ۱.۱. *فرض کنید که برد عملگر $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ بسته باشد و $\mathfrak{X}_1$ و $\mathfrak{X}_2$ زیرفضاهای بسته و متمم متعامد از $\mathfrak{X}$ باشند، به طوری که $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. همچنین فرض کنید $\mathfrak{Y}_1$ و $\mathfrak{Y}_2$ زیرفضاهای بسته و متمم متعامد از $\mathfrak{Y}$ باشند، به طوری که $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \mathfrak{Y}_2$. در این صورت، عملگر A نمایش‌های ماتریسی زیر را با توجه به جمع‌های متعامد زیرفضاها $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2 = \Re(A^*) \oplus \mathfrak{N}(A)$ و $\mathfrak{Y} = \Re(A) \oplus \mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{Y}_1 \oplus \mathfrak{Y}_2$ دارد:*

۱.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_1 \\ \mathfrak{X}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A) \\ \mathfrak{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

در این صورت

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_1^* F^{-1} & 0 \\ A_2^* F^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $0 < F = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* \in \mathfrak{L}(\Re(A))$.

۲.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathfrak{Y}_1 \\ \mathfrak{Y}_2 \end{bmatrix},$$

که در این صورت

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} F_1^{-1} A_1^* & F_1^{-1} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{Y}_1 \\ \mathfrak{Y}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \quad (۴.۱)$$

که در آن $0 < F = A_1^* A_1 + A_3^* A_3 \in \mathfrak{L}(\Re(A^*))$.

۲. نتایج اصلی

در اینجا برای دو عملگر A و B، داریم $[A, B] = AB - BA$. اکنون به بیان نتایج حاصل از عملگری می پردازیم که $[A, (A^2)^{\dagger}] = 0$.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ دارای بردی بسته باشد به طوری که $A(A^2)^{\dagger} = (A^2)^{\dagger} A$ آنگاه عبارت های زیر برقرارند:*

۱. *نمایش ماتریسی عملگر $A^{\dagger}$ به صورت زیر است:*

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_1^{\dagger} & A_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \Re(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \Re(A) \end{bmatrix}$$

که A_1 و A_3 از نمایش ماتریسی عملگر A به صورت زیر آمده است

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}$$

۲. $\Re(A) = \Re(A_1) \oplus \Re(A_3)$.

۳. *نمایش ماتریسی عملگر $(A^2)^\dagger$ به صورت زیر است:*

$$(A^2)^\dagger = \begin{bmatrix} (A_1^2)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}.$$

۴. $(A^2)^\dagger A = (|A|A)^\dagger |A|$

۵. $\Re(A^2) = \Re((A^2)^*) = \Re((A_1)^*) = \Re((A^\dagger A^2)^*)$

۶. $[A^\dagger A, AA^\dagger] = 0$ و $A^\dagger A^2 A^\dagger = P_{\Re(A_1)}$.

۷. $(A^*A)^\dagger = (A^*A^\dagger A^2)^\dagger + ((1 - A^\dagger A)A)^* A)^\dagger$

۸. $[A, (|A|A)^\dagger |A|] = 0$

۹. *برای* $n \geq 3$ *داریم* $A^\dagger A^n = A^{n-1}$

۱۰. *برای* $n \geq 3$ *داریم* $(A^\dagger)^{n-2} A^n = A^2$.

اثبات. نمایش ماتریسی عملگر A را با توجه به لم ۱.۱ به صورت زیر در نظر می گیریم

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}$$

که در این صورت

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} F_1^{-1} A_1^* & F_1^{-1} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Re(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \tag{۱.۲}$$

که در آن $F = A_1^* A_1 + A_3^* A_3 \in \mathfrak{L}(\Re(A^*))$.
نمایش ماتریسی عملگر $(A^2)^\dagger$ را نیز به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3 A_1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \left((A_1^2)^* A_1^2 + (A_3 A_1)^* A_3 A_1\right)^\dagger (A_1^2)^* & \left((A_1^2)^* A_1^2 + (A_3 A_1)^* A_3 A_1\right)^\dagger A_1^* A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲.۲}$$

که با محاسبه عبارت $\left((A_1^2)^* A_1^2 + A_1^* A_3^* A_3 A_1\right)^\dagger$ به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned}\left(\left(A_1^2\right)^* A_1^2 + A_1^* A_3^* A_3 A_1\right)^\dagger &= \left(A_1^*\left(A_1^* A_1 + A_3^* A_3\right) A_1\right)^\dagger \\ &= \left(A_1^* F A_1\right)^\dagger .\end{aligned}$$

بنابراین

$$(A^2)^\dagger = \begin{bmatrix} \left(A_1^* F A_1\right)^\dagger (A_1^2)^* & \left(A_1^* F A_1\right)^\dagger A_1^* A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$A(A^2)^\dagger = \begin{bmatrix} A_1\left(A_1^* F A_1\right)^\dagger (A_1^2)^* & A_1\left(A_1^* F A_1\right)^\dagger A_1^* A_3^* \\ A_3\left(A_1^* F A_1\right)^\dagger (A_1^2)^* & A_3\left(A_1^* F A_1\right)^\dagger A_1^* A_3^* \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$(A^2)^\dagger A = \begin{bmatrix} \left(A_1^* F A_1\right)^\dagger (A_1)^* F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

چون $A(A^2)^\dagger = (A^2)^\dagger A$ آنگاه با بازنویسی (۲.۲) به صورت زیر

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3 A_1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger &= \begin{bmatrix} \left(A_1^* F^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger A_1^* F^{\frac{1}{2}} F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & \left(A_1^* F^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger A_1^* F^{\frac{1}{2}} F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

و با نوشتن ماتریس عملگرهای نظیر به نظیر داریم

$$\begin{aligned} A\left(A^2\right)^\dagger &= \left(A^2\right)^\dagger A \\ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_1\left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & A_1\left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \\ A_3\left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_1^* & A_3\left(F^{\frac{1}{2}} A\right)^\dagger F^{-\frac{1}{2}} A_3^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}} A_1\right)^\dagger F^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین

$$A_1\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_1^* = \left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}} \tag{۷.۲}$$

$$A_1\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_3^* = 0 \tag{۸.۲}$$

$$A_3\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_1^* = 0 \tag{۹.۲}$$

$$A_3\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_3^* = 0 \tag{۱۰.۲}$$

اکنون با ضرب A_1^* و A_3^* به ترتیب از طرف چپ در معالات (۸.۲) و (۱۰.۲) و جمع آنها با یکدیگر داریم

$$F\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_3^* = 0$$

وارون پذیری F نتیجه می دهد که

$$\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{-\frac{1}{2}}A_3^* = 0 \Longrightarrow A_3F^{-\frac{1}{2}}\left((F^{\frac{1}{2}}A_1)^*\right)^{\dagger} = 0 \tag{۱۱.۲}$$

معادله (۱۱.۲) نتیجه می دهد که

$$\Re\left(\left((F^{\frac{1}{2}}A_1)^*\right)^{\dagger}\right) = \Re\left((F^{\frac{1}{2}}A_1)^*)^*\right) \subset \mathfrak{N}(A_3F^{-\frac{1}{2}}) \tag{۱۲.۲}$$

بنابراین

$$A_3F^{-\frac{1}{2}}\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right) = A_3A_1 = 0 \tag{۱۳.۲}$$

از طرفی با ضرب A_1 و A_3 به ترتیب از طرف راست در معالات (۹.۲) و (۱۰.۲) و جمع آنها با یکدیگر داریم

$$A_3\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}} = 0$$

وارون پذیری $F^{\frac{1}{2}}$ نتیجه می دهد که

$$A_3\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger} = 0 \tag{۱۴.۲}$$

معادله (۱۴.۲) نتیجه می دهد که

$$\Re\left(\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^{\dagger}\right) = \Re\left(\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^*\right) \subset \mathfrak{N}(A_3) \tag{۱۵.۲}$$

بنابراین

$$A_3\left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^* = A_3A_1^*F^{\frac{1}{2}} = 0 \Longrightarrow A_3A_1^* = 0 \tag{۱۶.۲}$$

(۱) با بکاربردن معادله (۱۶.۲) و بدست آوردن نمایش ماتریسی AA^* داریم

$$\begin{aligned}(A^*)^\dagger = (AA^*)^\dagger A &= \begin{bmatrix} A_1A_1^* & 0 \\ 0 & A_3A_3^* \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_1A_1^*)^\dagger & 0 \\ 0 & (A_3A_3^*)^\dagger \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_1A_1^*)^\dagger A_1 & 0 \\ (A_3A_3^*)^\dagger A_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_1^*)^\dagger & 0 \\ (A_3^*)^\dagger & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^\dagger & A_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \tag{۱۷.۲}$$

جایی که $E = A_1^\dagger(A_1^*)^\dagger + A_3^\dagger(A_3^*)^\dagger = (A_1^*A_1)^\dagger + (A_3^*A_3)^\dagger \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(A^*))$ مثبت و وارون پذیر است.

(۲) با بکاربردن معادله (۱۶.۲) و بدست آوردن نمایش ماتریسی AA^* نتیجه بدست می آید.

(۳) چون $A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3A_1 & 0 \end{bmatrix}$ ، معادله (۱۳.۲) نتیجه می دهد که

$$(A^2)^\dagger = \begin{bmatrix} (A_1^2)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathfrak{N}(A) \end{bmatrix}$$

(۴) با استفاده از قسمت (۳) و تساوی (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned}(A^2)^\dagger A &= \begin{bmatrix} (A_1^2)^\dagger A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(A_1^*FA_1\right)^\dagger (A_1)^*F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^\dagger F^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (|A|A)^\dagger|A|\end{aligned} \tag{۱۸.۲}$$

(۵) با بکاربردن معادله (۱۸.۲) داریم

$$(A^2)^\dagger A^2 = \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}}A_1\right)^\dagger F^{\frac{1}{2}}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می توان بدست آورد که

$$\Re((A^{2})^{*}) = \Re((F^{\frac{1}{2}}A_{1})^{*}) = \Re((A_{1})^{*}) = \Re(A^{*}A^{\dagger}A) = \Re((A^{\dagger}A^{2})^{*}).$$

از طرفی به راحتی می توان نتیجه گرفت که $\Re((A^{2})^{*}) = \Re(A^{2})$.

(۸) با ضرب A_1 و A_3 به ترتیب از طرف راست در معادلات (۷.۲) و (۸.۲) و جمع آنها با یکدیگر داریم

$$A_{1}\left(F^{\frac{1}{2}}A_{1}\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}} = \left(F^{\frac{1}{2}}A_{1}\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}}A_{1} \tag{۱۹.۲}$$

با نوشتن نمایش ماتریسی عملگر های $(|A|A)^{\dagger}|A|A$ و $A(|A|A)^{\dagger}|A|$ به صورت زیر

$$(|A|A)^{\dagger}|A|A = \begin{bmatrix} \left(F^{\frac{1}{2}}A_{1}\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}}A_{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A(|A|A)^{\dagger}|A| = \begin{bmatrix} A_{1}\left(F^{\frac{1}{2}}A_{1}\right)^{\dagger}F^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۰.۲}$$

می توان نتیجه گرفت که $A(|A|A)^{\dagger}|A| = (|A|A)^{\dagger}|A|A$.

(۶) با توجه به تساوی نمایش ماتریسی (۴.۱) در لم ۱.۱ و (۱۷.۲) نتیجه می‌گیریم که $F^{-1}A_1^{*} = A_1^{\dagger}$ و $F^{-1}A_3^{*} = A_3^{\dagger}$، که با انتخاب یک تساوی داریم

$$A_1^{*} = FA_1^{\dagger} \Longrightarrow A_1^{*} = (A_1^{*}A_1 + A_3^{*}A_3)A_1^{\dagger} = A_1^{*} + A_3^{*}A_3A_1^{\dagger} \Longrightarrow A_3^{*}A_3A_1^{\dagger} = 0 \Longrightarrow A_3A_1^{*} = 0 \tag{۲۱.۲}$$

از این رو با ضرب A_1 و A_3 به ترتیب از طرف چپ در این معادلات و جمع آنها با یکدیگر داریم

$$A_1^{\dagger}A_1 + A_3^{\dagger}A_3 = 1 \tag{۲۲.۲}$$

بنابراین

$$(A^{\dagger}A)(AA^{\dagger}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1A_1^{\dagger} & 0 \\ 0 & A_3A_3^{\dagger} \end{bmatrix} = (AA^{\dagger})(A^{\dagger}A) = P_{\Re(A_1)}.$$

(۷) با استفاده از رابطه های (۲۲.۲) و (۲۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} 1 &= A_1^{\dagger}(A_1^{*})^{\dagger}A_1^{*}A_1 + A_3^{\dagger}(A_3^{*})^{\dagger}A_3^{*}A_3 \\ &= A_1^{\dagger}(A_1^{*})^{\dagger}(A_1^{*}A_1 + A_3^{*}A_3) + A_3^{\dagger}(A_3^{*})^{\dagger}(A_1^{*}A_1 + A_3^{*}A_3) = EF \end{aligned}$$

بنابراین

$$F^{-1} = E$$

به عبارتی

$$(A_1^{*}A_1 + A_3^{*}A_3)^{-1} = (A_1^{*}A_1)^{\dagger} + (A_3^{*}A_3)^{\dagger}$$

با توجه به نمایش ماتریسی عملگرها نتیجه زیر حاصل می شود:

$$(A^{*}A)^{\dagger} = (A^{*}A^{\dagger}A^{2})^{\dagger} + ((1 - A^{\dagger}A)A)^{*}A)^{\dagger}.$$

(۹) با توجه به تساوی (۲۲.۲) برای $n \geq ۳$ می توان نوشت

$$A^{\dagger}A^{n} = \begin{bmatrix} A_{۱}^{\dagger} & A_{۳}^{\dagger} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{۱} & ۰ \\ A_{۳} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{۱} & ۰ \\ A_{۳} & ۰ \end{bmatrix}^{n-۱} = \begin{bmatrix} A_{۱}^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = A^{n-۱}. \qquad (۲۳.۲)$$

(۱۰) با توجه به (۹) داریم $A^{\dagger}A^{۳} = A^{۲}$. با ضرب $A^{\dagger}$ از طرف چپ و A از طرف راست نتیجه مطلوب بدست می آید. □

مراجع

[1] D. S. Djordjević, Further results on the reverse order law for generalized inverses, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **29** (4) (2008), 1242-1246.

[2] D. S. Djordjević, & N. Č. Dinčić, Reverse order law for the Moore–Penrose inverse, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, **361** (1) (2010), 252-261.

[3] M. Jalaeian, M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani, Conditions that the product of operators is an EP operator in Hilbert C^*-module, *Linear and Multilinear Algebra*, **68** (10) (2020), 1990–2004.

[4] E. C. Lance, Hilbert C^*-modules: A toolkit for operator algebraists, *Cambridge University Press, Oxford*, (1995).

[5] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, Hilbert C^*-modules, *Translations of Mathematical Monographs. 226, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, (2005).

[6] M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani, M. Amyari, , and Maryam Khosravi, perator matrix of Moore-Penrose inverse operators on Hilbert C^*-modules, *Colloq. Math.*, **140**(2) (2015), 171-182

[7] Q. Xu and L. Sheng, Positive semi-definite matrices of adjointable operators on Hilbert C^*-modules, *Linear Algebra Appl.*, **428** (4) (2008), 992–1000.