موجک‌ها و جبرخطی ۱۲(۱) (۱۴۰۴) ۱۸-۳۲

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

دینامیک حساسیت نسبت به شرایط اولیه برای C_0ـنیمگروه از عملگرهای خطی

علی برزنونی[*آ]، سمیه جنگجوی شالدهی[ب]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

[ب]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۳۰ تیر ۱۴۰۳
پذیرفته شده: ۱۳ آذر ۱۴۰۳
دسترسی آنلاین: ۱۳ آذر ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:
- نیمگروه از عملگرهای خطی، همپیوستگی، نقاط تناوبی، حساسیت نسبت به شرایط اولیه

چکیده

هر C_0ـ نیم گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X، را می توان به عنوان یک سیستم دینامیکی در نظر گرفت. در این مقاله به مطالعه ی مدار یک نقطه، مفاهیم همپیوستگی و حساسیت نسبت به شرایط اولیه C_0ـ نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X خواهیم پرداخت. فرض می کنیم که

$$
\begin{aligned}
K_{\mathcal{T}}(x) &= \{y \mid t_i x \to y, \{t_i\} \subseteq \mathbb{R}^+ \text{ برای یک شبکه } \} \\
L_{\mathcal{T}}(x) &= \{y \mid t_i x \to y, t_i \to \infty \text{ برای } \} \\
J_{\mathcal{T}}(x) &= \{y \mid t_i x_i \to y, t_i \to \infty, x_i \to x\} \\
A_{\mathcal{T}}(x) &= \{y : t_i x_i \to y, t_i \geq 0, x_i \to x\}
\end{aligned}
$$

مثالهایی می زنیم که نشان می دهد مجموعه های فوق نمی توانند برابر باشند. ثابت می کنیم اگر $x \in J_{\mathcal{T}}(x)$ آنگاه $J_{\mathcal{T}}(x) = A_{\mathcal{T}}(x)$.همچنین $J_{\mathcal{T}}(x) = X$ اگر وفقط اگر $A_{\mathcal{T}}(x) = X$، بعلاوه $L_{\mathcal{T}}(x) = X$ اگر وفقط اگر $K_{\mathcal{T}}(x) = X$. اگر x نقطه ی تناوبی باشد و $0 \in J_{\mathcal{T}}(x)$ آنگاه $-x \in J_{\mathcal{T}}(0)$. همچنین برای چنین نقطه ای ثابت می کنیم که $x + J_{\mathcal{T}}(0) \subseteq J_{\mathcal{T}}(x)$. فرض کنیم $X = M \oplus N$ که M و N زیرفضای بسته ی X بوده و $T(t)M \subseteq M$ و $T(t)N \subseteq N$. ثابت می کنیم که اگر $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x_0 \oplus x_1) \in y_0 \oplus y_1$، آنگاه $y_0 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}|M}(x_0)$ و $y_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}|N}(x_1)$. همچنین اگر $x \in M$، آنگاه $K_{\mathcal{T}}(x) = K_{\mathcal{T}|M}(x)$ و $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x) \cap M = \mathcal{A}_{\mathcal{T}|M}(x)$. که $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(.) \in \{K_{\mathcal{T}}(.), J_{\mathcal{T}}(.), A_{\mathcal{T}}(.)\}$.در ادامه شرایط معادل برای مفاهیم همپیوستگی و حساسیت به شرایط اولیه برای C_0ـنیمگروه از عملگرهای خطی خواهیم پرداخت همچنین ثابت می کنیم اگر $L_{\mathcal{T}}(x) \neq J_{\mathcal{T}}(x)$ و یا اینکه $J_{\mathcal{T}}(x) = X$ آنگاه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ نسبت به شرایط اولیه حساس خواهد بود .

۱. مقدمه

دینامیک سیستم $T : X \to X$ روی فضای برداری X ، وابستگی شدید به دوعامل بعد فضای حالت X و خطی یا غیرخطی بودن T دارد. در حالتی که $T : X \to X$ عملگر خطی روی فضای متناهی البعد X باشد، دینامیک چنین عملگر خطی توسط مقادیر ویژه ی ماتریس نظیر به آن مشخص خواهد شد. در واقع برای عملگر خطی روی فضای متناهی البعد، دینامیک های انبساطی، انواع سایه زنی، به طور توپولوژیکی پایدار و ساختارا پایدار هر عملگر خطی روی فضای متناهی البعد با هذلولی بودن عملگر معادلند [۸]. عملگر هذلولوی عملگری است که مقادیر ویژه ی نظیر به آن، غیرواقع بر دایره واحد باشد.

جالب اینکه مجموعه ی عملگرهای خطی پیوسته هذلولوی روی فضای متناهی البعد X، تشکیل مجموعه ی باز و چگال در فضای همه ی عملگرهای خطی پیوسته معکوس پذیر روی فضای X می دهد. لازم به توضیح است که بنابر گزاره ۲.۵ در [۱] مجموعه ی عملگرهای خطی پیوسته معکوس پذیر روی فضای X با مقادیر ویژه ی غیر واقع بر دایره، تشکیل مجموعه ی باز در فضای همه ی عملگرهای خطی پیوسته معکوس پذیر روی فضای X می دهد اما در منبع [۲] نشان داده شده است که اگر X متناهی البعد نباشد ممکن است این مجوعه چگال نباشد.

یکی از موضوعات مورد علاقه محققین در سیستم های دینامیکی، پیداکردن مجموعه نقاط تناوبی یک سیستم دینامیکی است و چگال بودن این مجموعه، نشانه ی پیچیده بودن آن می باشد. عملگرهای غیرخطی فراوانی روی فضای متناهی البعد وجود دارند که مجموعه ی نقاط تناوبی انها چگال می باشند. اما یک عملگر خطی روی فضای متناهی البعد، نمی تواند دارای مجموعه چگال از نقاط تناوبی باشد، زیرا بردار $v \in X$، نقطه ی تناوبی برای عملگر خطی T روی فضای برداری مختلط X است اگر و فقط اگر v ترکیب خطی تعداد متناهی بردار ویژه با مقادیر ویژه روی دایره به شعاع یک باشد.

هرگاه مدار $x \in X$ تحت عملگر خطی $T : X \to X$ چگال باشد، مدار نقطه ی x یعنی $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ، تشکیل مجموعه ی مستقل در X خواهد داد. بنابراین برای ابردوری بودن عملگر $T : X \to X$، یعنی وجود بردار غیرصفر با مدارچگال، می توان حالات زیر را در نظر گرفت:

- بعد متناهی فضای حالت X و خطی بودن سیستم $T : X \to X$ ، عدم وجود مدار چگال را نتیجه می دهد.
- بعد متناهی X و وجود مدار چگال برای $T : X \to X$ نتیجه می دهد غیرخطی بودن $T : X \to X$
- وجود مدار چگال برای سیستم $T : X \to X$ نتیجه می دهد که X فضای متناهی البعد و T غیر خطی است یا اینکه X نامتناهی البعد و جدایی پذیر است.

بنابراین وجود عملگر ابردوری روی یک فضا، نشان دهنده ی نامتناهی البعد بودن فضا است، به عنوان مثال عملگرهای خطی مانند عملگر انتقال $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ با ضابطه ی $T_af(z) = f(z+a)$ وعملگر مشتق $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ با ضابطه ی $D(f) = f'$ روی فضای توابع مختلط مشتق پذیر $H(\mathbb{C})$، مثال هایی از عملگرهای ابردوری می باشند، [۵، ۹]. با توجه به اینکه وجود عملگر فشرده ومعکوس پذیر روی فضای X نتیجه می دهد که X متناهی البعد است، بنابراین عملگرهای فشرده ومعکوس پذیر نمی توانند ابردوری باشند.

عملگرهای ابردوری نقش بسیار مهمی در سیستمهای دینامیکی دارند، درواقع عملگر خطی ابردوری $T : H \to H$ روی فضای هیلبرت H وجود دارد بطوری که برای هر نگاشت پیوسته $f : X \to X$ روی فضای متریک فشرده X وجود دارد مجموعه فشرده $Y \subseteq H$ با شرط $T(Y) \subseteq Y$ به طوری که دوسیستم (X, f) و $(Y, T|Y)$ مزدوج می باشند، یعنی اینکه وجود دارد همسانریختی $h : X \to Y$ بطوری که $h \circ f = T|Y \circ h$ ، [۶].

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: s.jangjoo@alzahra.ac.ir. (سمیه جنگجوی شالدهی)، a.barzanouni@hsu.ac.ir (علی برزنونی)

http://doi.org/10.22072/wala.2024.2035910.1457

فرض کنیم $HC(T)$ مجموعه ی همه ی بردارهای $x \in X$ باشد که مدار ان تحت عملگر $T : X \to X$ چگال باشد. انصاری در [۳] ثابت می کند که روی هر فضای باناخ تفکیک پذیر X ، عملگری مانند $T : X \to X$می توان ساخت که $HC(T) \neq \emptyset$. هر عملگر $T : X \to X$ با $HC(T) \neq \emptyset$ دارای نرم بزرگتر از یک می باشد. بنابراین مجموعه ی عملگرهای ابردوری، یعنی عملگری مانند T که $HC(T) \neq \emptyset$ ،با نرم–توپولوژی نمی تواند در فضای همه عملگرهای روی X چگال باشد. اما اگر توپولوژی درنظر گرفته شده روی$L(X)$ توپولوژی عملگر قوی باشد، یعنی اینکه $L(X) \to X$ ، باضابطه ی $T \mapsto T(x)$ برای همه ی $x \in X$، پیوسته باشد، آنگاه مجموعه عملگرهای ابر دوری در $L(X)$ چگال می شود.
یکی دیگر از مفاهیم مهم سیستم های دینامیکی، که اولین بار توسط بیرخوف و پوانکاره معرفی شد، مفهوم بازگشتی است و به نقطه ای گفته می شود که مدار ان به مجاورت خود باز خواهد گشت. هر چند هر نقطه ی با مدار چگال در فضای حالت، یک نقطه ی بازگشتی می باشد ولی عکس ان برقرار نیست، به عنوان مثال عملگر $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ با ضابطه ی $T(e_1) = e_1$ و $T(e_n) = 0$ برای همه ی $n \geq 2$، دارای نقطه ی بازگشتی مانند e_1 می باشد ولی این عملگر ابردوری نیست.
برای یک نقطه ی بازگشتی، مدار آن ، هر چقدر دلخواه به نزدیک آن برخواهد گشت. اما اگر این کار توسط شبه مداری از نقطه x انجام شود، آنگاه نقطه ی $x \in X$ را نقطه ی بازگشتی–زنجیری برای سیستم $T : X \to X$ نامیده می شود. واضح است که در عملگرهای ابردوری هرنقطه، بازگشتی است و هر نقطه ی بازگشتی می تواند نقطه ی بازگشتی– زنجیری باشد. بنابراین در عملگرهای دوری همه نقاط فضای حالت، بازگشتی–زنجیری خواهند بود. البته وجود دینامیک هایی مانند سایه زنی، باعث می شود که در سیستم هایی با این دینامیک، همه ی نقاط بازگشتی–زنجیری می باشند اگر وفقط اگر این سیستم ابردوری باشد.

خانواده ی $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ از عملگرهای خطی روی فضای برداری توپولوژیکی X را یک C_0- نیم گروه از عملگرها خوانیم درصورتی که:

۱. $T(0) = id_X$
۲. $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ برای همه ی $t, s \geq 0$
۳. برای هر $x \in X$ نگاشت $T(.)x : \mathbb{R}^+ \to X$ باضابطه $t \mapsto T(t)(x)$ پیوسته باشد.

هر C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ ، را می توان یک سیستم دینامیکی در نظرگرفت، زیرا اگر نگاشت $\varphi : [0,\infty)\times X \to X$ بوسیله $\varphi(t,x) = T(t)x$ تعریف شود، آنگاه بنابر نتیجه ی ۱.۳.۲ در فصل دوم [۱۱] ، $\varphi : [0,\infty) \times X \to X$ یک عمل نیم گروه پیوسته خواهد بود.
در این مقاله، به مطالعه ی مدار یک نقطه و مفاهیم هم‌پیوستگی و حساسیت نسبت به شرایط اولیه برای C_0- نیم گروه $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ خواهیم پرداخت، در واقع این مقاله از ۴ بخش تشکیل شده است.
در بخش ۲ برای C_0- نیم گروه از عملگرهای خطی $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ فرض می کنیم که

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{T}}(x) &= \{y | t_i x \to y, t_i \to \infty \text{ برای } \} \\
J_{\mathcal{T}}(x) &= \{y | t_i x_i \to y, t_i \to \infty, x_i \to x\} \\
A_{\mathcal{T}}(x) &= \{y : t_i x_i \to y, t_i \geq 0, x_i \to x\}
\end{aligned}$$

رابطه ی بین مفاهیم فوق به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
L_{\mathcal{T}}(x) & \subset & K_{\mathcal{T}}(x) \\
\cap & & \cap \\
J_{\mathcal{T}}(x) & \subset & A_{\mathcal{T}}(x)
\end{array} \tag{1.1}$$

مثالهای ۱.۲ و ۴.۲ نشان میدهد که عکس شمولهای رابطه ی فوق برقرار نیست. در قضیه ۵.۲ ثابت می کنیم که اگر $x \in J_{\mathcal{T}}(x)$ آنگاه $J_{\mathcal{T}}(x) = A_{\mathcal{T}}(x)$.همچنین در قضیه ۶.۲ ثابت می کنیم که $J_{\mathcal{T}}(x) = X$ اگر وفقط اگر $A_{\mathcal{T}}(x) = X$، بعلاوه $L_{\mathcal{T}}(x) = X$ اگر وفقط اگر $K_{\mathcal{T}}(x) = X$. درادامه به مطالعه ی مدار نقطه ی تناوبی x خواهیم پرداخت و در قضیه ۱۱.۲ نشان می دهیم اگر x نقطه ی تناوبی باشد و $0 \in J_{\mathcal{T}}(x)$ آنگاه $-x \in J_{\mathcal{T}}(0)$. همچنین برای چنین نقطه ای ثابت می کنیم که $x + J_{\mathcal{T}}(0) \subseteq J_{\mathcal{T}}(x)$.

فرض کنیم $X = M \oplus N$ که M و N زیرفضای بسته ی X بوده و $T(t)M \subseteq M$ و $T(t)N \subseteq N$. در قضیه ۱۳.۲ ثابت می کنیم که اگر $y_0 \oplus y_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x_0 \oplus x_1)$، آنگاه $y_0 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}|M}(x_0)$ و $y_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}|N}(x_1)$. همچنین اگر $x \in M$، آنگاه $K_{\mathcal{T}}(x) = K_{\mathcal{T}|M}(x)$ و $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x) \cap M = \mathcal{A}_{\mathcal{T}|M}(x)$. که $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(.) \in \{K_{\mathcal{T}}(.), J_{\mathcal{T}}(.), A_{\mathcal{T}}(.)\}$.

در بخش ۳ ، به مطالعه ی مفهوم همپیوستگی برای C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ خواهیم پرداخت. در واقع C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ را همپیوسته خوانیم در صورتی که برای هر $p \in X$ و $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به طوری که $B_\delta(p) \subset \Gamma^\epsilon_{\mathcal{T}}(p)$ که در ان

$$\Gamma^\delta_{\mathcal{T}}(x) = \{y : \|T(t)y - T(t)x\| \leq \delta; \forall t \geq 0\}$$

عملگرهای غیرخطی وجود دارند که در یک مجموعه ی چگال از نقاط X، همپیوسته می باشند ولی خود این عملگر نمی تواند همپیوسته باشد. در حالی که برای C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$، با توجه به رابطه ی $\Gamma^\delta_{\mathcal{T}}(x) = x + \Gamma^\delta_{\mathcal{T}}(0)$ می توان گفت که همپیوستگی در نقطه $x = 0$ ، همپیوستگی خود عملگر خطی را نتیجه خواهد داد. بنا بر قضیه ۱.۳ مفهوم همپیوستگی تحت مزدوجی حفظ خواهد شد. در قضیه ۲.۳ نشان می دهیم که اگر برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $N > 0$ که $int(A^N_{\mathcal{T}}(\epsilon) \neq \emptyset$ آنگاه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ همپیوسته است که در ان

$$A^N_{\mathcal{T}}(\epsilon) := \{x | \|T(x)x\| < \frac{\epsilon}{4}; \forall t \geq N\}.$$

فرض کنیم برای زیر گروه H از $\mathbb{R}^+$ مجموعه ی فشرده ای مانند K وجود داشته باشد بطوری که $\mathbb{R}^+ = K + H$، در قضیه ۳.۳ ثابت می کنیم که $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ همپیوسته است اگر و فقط اگر $\{T(t) : t \in H\}$ همپیوسته باشد.

در بخش ۴ به مطالعه ی مفهوم حساسیت C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی نسبت به شرایط اولیه است. در واقع نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ از عملگرها روی فضای X حساس به شرایط اولیه است هرگاه $c > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$ و هر $\epsilon > 0$ بتوان $y \in X$ با $\|x - y\| < \epsilon$ و $t > 0$ وجود داشته باشند که $\|T(t)x - T(t)y\| > c$. هرگاه مقدار $c > 0$ وابسته به نقطه‌ی x باشد، در اینصورت سیستم $\mathcal{T}$ در x حساس است. در حالتی که $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ عملگرهای غیرخطی باشد. ممکن است که $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ در هر نقطه نسبت به شرایط اولیه حساس باشد اما خود سیستم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ نسبت به شرایط اولیه حساس نباشد. قضیه ۱.۴ نشان می دهد که $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ از عملگرهای خطی روی فضای X حساس به شرایط اولیه است هرگاه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ در $x = 0$ نسبت به شرایط اولیه حساس باشد.

بنا بر قضیه ۲.۲ هرگاه $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ، C_0- نیمگروه ابردوری باشد با بردار ابردوری $x \in X$، آنگاه $x \in HC(T(t))$ برای همه ی $t \geq 0$. بنابراین برای هر C_0- نیمگروه ابردوری $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$، بنا بر قضیه تعدی بیرخوف، $HC(T(t))$ برای همه ی $t > 0$، در X چگال می باشد. بنابراین برای مجموعه های باز $U = \{x : \|x\| < \epsilon\}$ ، $V = \{x : \|x\| > 2\}$ و مجموعه ی فشرده $K \subseteq [0, \infty)$، وجود دارد $t \in ([0, \infty) - K)$ که $T(t)U \cap V \neq \emptyset$. و این نتیجه می دهد که هر C_0- نیمگروه ابردوری از عملگرهای خطی، نسبت به شرایط اولیه حساس می باشند. در ادامه بخش به ارایه مثالهای از C_0- نیمگروه ها از عملگرهای خطی که نسبت به شرایط اولیه حساس می باشند، خواهیم پرداخت، ببینید مثالهای ۲.۴ و ۵.۴.

در قضیه ۶.۴ ثابت می کنیم که وجود مدار بیکران و یا شرط $\sup_{t\geq 0} \|T(t)\| = \infty$ معادل حساسیت نسبت به شرایط اولیه برای C_0ـنیمگروه از عملگرهای خطی خواهد بود. همچنین ثابت می کنیم اگر $L_{\mathcal{T}}(x) \neq J_{\mathcal{T}}(x)$ و یا اینکه $J_{\mathcal{T}}(x) = X$ آنگاه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ نسبت به شرایط اولیه حساس خواهد بود، ببینید قضیه های ۷.۴ و ۹.۴.

۲. مطالعه ی مدار یک نقطه در C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی

نگاشت پیوسته ی X $\varphi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ روی فضای توپولوژیکی X را یک سیستم دینامیکی خوانیم هرگاه نگاشت φ دارای شرایط زیر باشد:

- $\varphi(0, x) = x$ برای همه ی $x \in X$،
- $\varphi(t_0, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_0 + t_1, x)$ برای همه $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+$ و همه ی $x \in X$.

فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ یک خانواده از عملگرهای خطی روی فضای X باشد. $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ را یک C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی روی فضای X خوانیم هرگاه نگاشت $\varphi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ با ضابطه $\varphi(t, x) = T(t)x$ یک سیستم دینامیکی باشد. مدار نقطه‌ی $x \in X$ برای C_0- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ با نماد $O_{\mathcal{T}}(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$O_{\mathcal{T}}(x) = \{T(t)x | t \geq 0\}$$

بستار مدار $O_{\mathcal{T}}(x)$ را با نماد $K_{\mathcal{T}}(x)$ نمایش دهیم در واقع

$$K_{\mathcal{T}}(x) = \{y | t_i x \to y, \{t_i\} \subseteq \mathbb{R}^+ \text{ برای یک شبکه } \}$$

همچنین فرض کنیم

$$L_{\mathcal{T}}(x) = \{y | t_i x \to y, t_i \to \infty \text{ برای } \}$$
$$J_{\mathcal{T}}(x) = \{y | t_i x_i \to y, t_i \to \infty, x_i \to x\}$$
$$A_{\mathcal{T}}(x) = \{y : t_i x_i \to y, t_i \geq 0, x_i \to x\}$$

هرگاه گردایه تمام زیر مجموعه های فشرده $\mathbb{R}^+$ را با $\mathcal{K}_{\mathbb{R}^+}$ نمایش دهیم براحتی می‌توان درستی تساوی‌های زیر را بررسی کرد

$$L_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap\{\overline{(\mathbb{R}^+ - K)x} : K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^+}\}$$
$$J_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap\{\overline{(\mathbb{R}^+ - K)U} : K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^+}, U \in \mathcal{U}_x\}$$
$$A_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap\{\overline{\mathbb{R}^+ U} : U \in \mathcal{U}_x\}$$

دیاگرام زیر ارتباط بین مجموعه های فوق را بیان می‌کند

$$\begin{array}{ccc} L_{\mathcal{T}}(x) & \subset & K_{\mathcal{T}}(x) \\ \cap & & \cap \\ J_{\mathcal{T}}(x) & \subset & A_{\mathcal{T}}(x) \end{array} \tag{۱.۲}$$

مثال های زیر نشان می‌دهد که ممکن است عکس شمول‌های رابطه ی ۱.۲ برقرار نباشند.

مثال ۱.۲. فرض کنید $X = C^0([0, \infty))$ فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته روی $[0, \infty)$ با متر زیر باشند

$$\rho(f, g) = \sup_{a>0} \min\{\max_{|x|\leq a} |f(x) - g(x)|, \frac{1}{a}\} \quad \text{برای همه‌ی} \quad f, g \in X$$

عملگر $T(t) : X \to X$ را بوسیله ی $T(t)f(x) = f(t+x)$ تعریف می کنیم.

ادعا ۲.۲. برای هر $f \in C^{\cdot}([\cdot,\infty))$، $J_{\mathcal{T}}(f) = C^{\cdot}([\cdot,\infty))$

فرض کنیم $g \in X$ و $\epsilon > \cdot$ و $N > \cdot$. نشان می‌دهیم $t > N$ و $h \in X$ وجود دارد به طوری که $\rho(h,f) < \epsilon$ و $\rho(T(t)h, g) < \epsilon$

فرض کنیم $N > \frac{1}{\epsilon} + 1$ عدد $t > N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $tK \cap K = \phi$ و $K = [\cdot, N]$. چون $[\cdot,\infty)$ فضای نرمال است، طبق قضیه توسیع تیتز، [1]

$h \in X$ وجود دارد به طوری که $h|_k = f|_k$ و $h(x) = g(x-t)$ برای هر $x \in t+K$. آنگاه $\rho(h,f) = \cdot < \epsilon$ و $T(t)h = g$. این ایجاب می‌کند که $\rho(T(t)h, g) = \cdot < \epsilon$.

ادعا ۳.۲. اگر $f \in C^{\cdot}([\cdot,\infty))$ پوشا نباشد، آنگاه $L_{\mathcal{T}}(f) \neq C^{\cdot}([\cdot,\infty))$.

فرض کنیم $f \in X$ پوشا نیست. عدد $\alpha \notin f([\cdot,\infty))$ را در نظر می‌گیریم. اگر $g(x) = x + \alpha + 1$ آنگاه برای هر $t > 1$ و $\epsilon < \frac{1}{2}$، داریم که $\rho(T(t)h, g) > \epsilon$ لذا $g \notin L_{\mathcal{T}}(f)$.

مثال زیر نشان می دهد که در حالت کلی $A_{\mathcal{T}}(x) - J_{\mathcal{T}}(x) \neq \emptyset$

مثال ۴.۲. فرض کنیم $X = \ell^2(R) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ و $T(t)x = e^{-t}x$. برای $x \in X$ می‌توان به سادگی مشاهده کرد که $\{T(t)x | t > \cdot\} \subseteq A_{\tau}(x)$. از طرفی اگر $t_n \to \infty$ و $x_n \to \infty$ آنگاه $T(t_n)x_n \to \cdot$. بنابراین برای $C.$- نیم‌گروه $\tau = \{T(t)\}_{t\geq.}$ روی $\ell^2(R)$ با ضابطه‌ی $T(t)x = e^{-t}x$ داریم که $J_{\tau}(x) = \{\cdot\}$ در حالی که $\{T(t)x | t > \cdot\} \subseteq A(x)$ یعنی $A_{\tau}(x) - J_{\tau}(x) \neq \phi$.

در مثال ۴.۲ براحتی می توان دید که $x \notin J_{\tau}(x)$ است، در قضیه زیر نشان می دهیم که اگر $A_{\mathcal{T}}(x) - J_{\mathcal{T}}(x) \neq \emptyset$ آنگاه $x \notin J_{\tau}(x)$.

قضیه ۵.۲. *برای $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq.}$ از عملگرهای خطی و پیوسته روی X،*

$$x \in J_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow J_{\mathcal{T}}(x) = A_{\mathcal{T}}(x). \tag{۲.۲}$$

اثبات. فرض کنیم $y \in A_{\mathcal{T}}(x)$، $\epsilon > \cdot$ و $N > \cdot$ داده شده باشد. ثابت می‌کنیم وجود دارد عدد $t > N$ به طوری که $T(t)B_{\epsilon}(x) \cap B_{\epsilon}(y) \neq \phi$.

بنابر $y \in A_{\mathcal{T}}(x)$، وجود دارد $S > \cdot$ به طوری که $T(s)B_{\epsilon}(x) \cap B_{\epsilon}(y) \neq \phi$. بنابراین $B_{\epsilon}(x) \cap T(s)^{-1}B_{\epsilon}(y) \neq \phi$.

چون $T(s)$ پیوسته است می‌توان مجموعه‌ی بازی از x مانند W پیدا کرد که $x \in W \subset B_{\epsilon}(x) \cap T(s)^{-1}B_{\epsilon}(y)$.

بنابر $x \in J_{\mathcal{T}}(x)$، برای مجموعه باز W از x و عدد $N > \cdot$ وجود دارد $t. > N$ که $T(t.)W \cap W \neq \phi$ به عبارتی $W' = T(t.)^{-1}W \cap W \neq \phi$. بنابراین $W' \subset T(t.)^{-1}W$ و این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} T(t. + s)W' &\subseteq T(t. + s)(T(t.)^{-1}W) \\ &\subseteq T(s)W \subseteq B_{\epsilon}(y) \end{aligned}$$

از طرفی $W' \subseteq B_{\epsilon}(x)$ پس خواهیم داشت که

$$T(t. + s)B_{\epsilon}(x) \cap B_{\epsilon}(y) \neq \phi$$

و $t = t. + s > N$. □

---
[1] Theorem Extension Tietze

قضیه ۶.۲. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ یک $C.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی پیوسته روی فضای باناخ X باشد. دراینصورت*

- $A_{\mathcal{T}}(x) = X$ *اگر و فقط اگر* $J_{\mathcal{T}}(x) = X$،
- $L_{\mathcal{T}}(x) = X$ *اگر و فقط اگر* $K_{\mathcal{T}}(x) = X$.
- *برای همه‌ی* $t \geq ۰$ *خواهیم داشت که* $T(x)\mathcal{A}(x) \subseteq \mathcal{A}(x)$ *که* $\mathcal{A} = \{K, L, J, A\}$.

اثبات. به گزاره ۲.۲ در [۴] مراجعه شود. □

برای $A, B \subset \mathbb{R}^+$، قرار می‌دهیم

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A^{-۱} + B = \{t : a + t \in B \text{ به طوری که } a \in A \text{ وجود دارد } \}.$$

زیرمجموعه‌ی $B \subset \mathbb{R}^+$ را ربطی خوانیم، اگر یک زیر مجموعه فشرده K از $\mathbb{R}^+$ وجود داشه باشد به طوری که $\mathbb{R}^+ = K^{-۱} + B$. همچنین B را g- ربطی خوانیم هرگاه زیرمجموعه‌ی فشرده K از $\mathbb{R}^+$ وجود دارد به طوری که $\mathbb{R}^+ = K + B$.

لم ۷.۲. *هر زیر مجموعه‌ی* $B \subset \mathbb{R}^+$ *با شرط* $۰ \in B$ *مجموعه‌ی ربطی است اگر و فقط اگر* B *مجموعه‌ی* g- *ربطی باشد.*

اثبات. به گزاره ۴.۲ در [۱۰] مراجعه شود. □

در ادامه تعریف یک نقطه‌ی متناوب برای $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ عملگردها خواهم پرداخت.

تعریف ۸.۲. نقطه‌ی $x \in X$ در $C.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ متناوب نامیده می‌شود اگر پایدار ساز آن $Stab(x) = \{t : T(t)x = x\}$ نیم‌گروه ربطی از $\mathbb{R}^+$ باشد .

چون $۰ \in Stab(x)$، طبق لم ۷.۲ نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۹.۲. *پایدارساز* $Stab(x)$ *ربطی است اگر و فقط اگر* g- *ربطی باشد.*

برای $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X، نگاشت $\mathbb{R}^+ \times X \to X$ باضابطه‌ی $(t, x) \mapsto T(t)x$ پیوسته است بنابراین برای هر مجموعه ی فشرده ی $K \subseteq [۰, \infty)$ ، $\{T(t)|t \in K\}$ تشکیل یک خانواده هم‌پیوسته می‌دهد. بنابراین لم زیر حاصل می‌شود.

لم ۱۰.۲. *برای* $C.$- *نیم‌گروه* $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ *از عملگرهای خطی روی* X *اگر* $x_n \to ۰$ *و* $\{k_n\}$ *یک دنباله در مجموعه فشرده* K *از* $\mathbb{R}^+$ *باشد آنگاه* $T(k_n)x_n \to ۰$.

گزاره ۱۱.۲. *فرض کنیم* x *نقطه‌ی متناوب برای* $C.$- *نیم‌گروه* $\tau = \{T(t)\}_{t\geq .}$ *باشد. در اینصورت*

۱. $۰ \in J_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow -x \in J_{\mathcal{T}}(۰)$،

۲. $x + J_{\mathcal{T}}(۰) \subseteq J_{\mathcal{T}}(x)$.

اثبات. ۱. فرض کنیم و $0 \in J_{\mathcal{T}}(x)$. بنابراین وجود دارند دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{t_n\}$ به طوری که $x_n \to x$ و $T(t_n)x_n \to 0$. چون $Stab(x)$ مجموعه‌ی ربطی است، وجود دارد مجموعه فشرده K در $\mathbb{R}^+$ به طوری که $\mathbb{R}^+ = K^{-1} + Stab(x)$. برای هر $t_n \in \mathbb{R}^+$ وجود دارند $r_n \in Stab(x)$ و $k_n \in K$ به طوری که $t_n + k_n = r_n$.

چون $T(t_n)x_n \to 0$، بنابر لم ۱۰.۲ می‌توان گفت که $T(k_n)(T(t_n)x_n) \to 0$ یعنی $T(k_n + t_n)x_n \to 0$. بنابراین $T(r_n)x_n \to 0$. پس $T(r_n)(x_n - x) \to -x$ و این نتیجه می دهد که اگر x نقطه‌ی متناوب برای C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ باشد و $0 \in J_{\mathcal{T}}(x)$ آنگاه $-x \in J_{\mathcal{T}}(0)$.

۲. فرض کنیم x نقطه‌ی متناوب برای C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ باشد. نشان می دهیم $x + J_{\mathcal{T}}(0) \subseteq J_{\mathcal{T}}(x)$.

فرض کنیم $y \in x + J_{\mathcal{T}}(0)$. یک دنباله اکیداً صعودی $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ وجود دارد به طوری که $t_n \to \infty$ و یک دنباله $\{x_n\}$ در X وجود دارد به طوری که $x_n \to 0$ و $T(t_n)x_n \to y - x$. چون x متناوب است یک مجموعه‌ی فشرده K از $\mathbb{R}^+$ وجود دارد به طوری که $\mathbb{R}^+ = k + Stab(x)$ برای هر $t_n \in \mathbb{R}^+$، $k_n \in K$ و $r_n \in Stab(x)$ وجود دارند به طوری که $t_n = r_n + k_n$. چون $x_n \to 0$. طبق لم ۱۰.۲، $k_n x_n \to 0$. اما $r_n x = x$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_n + x) = \lim_{n\to\infty} r_n x_n + x + \lim_{n\to\infty} r_n x_n = \lim_{n\to\infty}(t_n x_n + x) = y$$

این نشان می‌دهد که $x_n + x \to x$ و $r_n(x_n + x) \to y$ یعنی $y \in J_{\mathcal{T}}(x)$.

□

با توجه به اینکه برای هر نقطه‌ی تناوبی x در C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$، خواهیم داشت $x \in J_{\mathcal{T}}(x)$. بنابراین بنا بر قضیه ۵.۲، می‌توان گفت که $J_{\mathcal{T}}(x) = A_{\mathcal{T}}(x)$، و این به همراه گزاره ۱۱.۲، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۲.۲. *فرض کنیم x نقطه‌ی تناوبی برای C_0- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ باشد. در اینصورت* $x + A_{\mathcal{T}}(0) \subseteq A_{\mathcal{T}}(x)$.

فرض کنیم $X = M \oplus N$ که M و N زیر فضای بسته باشد. اگر $P : X \to M$ بوسیله $Px = a$ اگر و فقط اگر $x = a \oplus b$، آنگاه P عملگر خطی کراندار با خاصیت $P^2 = P$ است. همچنین

$$\|a\| = \|Px\| \leq \|P\|\|x\|$$
$$\|b\| = \|(I - P)x\| \leq \|(I - P)\|\|x\|$$

فرض کنیم $\beta = \max\{\|P\|, \|I - P\|\}$ در اینصورت برای هر $x \in X$ با $x = a \oplus b$ خواهیم داشت که

$$\|a\| \leq \beta\|x\|$$
$$\|b\| \leq \beta\|x\|$$

بنابراین اگر $x_n \oplus y_n \to x \oplus y$ آنگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$.
فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ یک C_0- نیمگروه از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X باشد و $X = M \oplus N$ که M و N زیر فضاهای بسته، $T(t)M \subseteq M$ و $T(t)N \subseteq N$. در حالتی که عملگرهای خطی $T(t)$ را به مجموعه‌ی M تجدید کنیم آنرا با نماد $\mathcal{T}|M = \{T(t)|_M\}_{t\geq 0}$ نمایش می‌دهیم. در حالت N نیز نماد $\mathcal{T}|N = \{T(t)|_N\}$ استفاده می‌کنیم.
فرض کنیم $y_0 \oplus y_1 \in J_{\mathcal{T}}(x_0 \oplus x_1)$. در اینصورت دنباله‌ی $\{p_n \oplus q_n\}$ در X و $\{t_n\}$ در $\mathbb{R}^+$ وجود دارند که

$p_n \oplus q_n \to x_. \oplus x_1$ و $T(t_n)(p_n \oplus q_n) \to y_. \oplus y_1$ با توجه به رابطه‌ی

$$\|p_n - x_.\| \leq \beta \|p_n \oplus q_n - x_. \oplus x_1\|$$
$$\|q_n - x_1\| \leq \beta \|p_n \oplus q_n - x_. \oplus x_1\|$$
$$\|T(t_n)p_n - y_.\| \leq \beta \|T(t_n)(p_n \oplus q_n) - y_. \oplus y_1\|$$
$$\|T(t_n)q_n - y_1\| \leq \beta \|T(t_n)(p_n \oplus q_n) - y_. \oplus y_1\|$$

می‌توان گفت که $p_n \to x_.$ و $T(t_n)p_n \to y_.$، به طور مشابه $q_n \to x_.$ و $T(t_n)q_n \to y_1$. بنابراین با محاسبات مشابه قضیه‌ی زیر، حاصل خواهد شد.

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ یک $C_.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X باشد و $X = M \oplus N$ که M و N زیر فضاهای بسته، $T(t)M \subseteq M$ و $T(t)N \subseteq N$ در اینصورت*

۱. *اگر $y_. \oplus y_1 \in K_{\mathcal{T}}(x_. + x_1)$ آنگاه $y_. \in K_{\mathcal{T}|M}(x_.)$ و $y_1 \in K_{\mathcal{T}|N}(x_1)$*

۲. *اگر $y_. \oplus y_1 \in J_{\mathcal{T}}(x_. + x_1)$ آنگاه $y_. \in J_{\mathcal{T}|M}(x_.)$ و $y_1 \in J_{\mathcal{T}|N}(x_1)$*

۳. *اگر $y_. \oplus y_1 \in A_{\mathcal{T}}(x_. + x_1)$ آنگاه $y_. \in A_{\mathcal{T}|M}(x_.)$ و $y_1 \in A_{\mathcal{T}|N}(x_1)$*

۴. $K_{\mathcal{T}}(x) \cap M = K_{\mathcal{T}|M}(x),$

۵. *اگر $x \in M$ آنگاه $K_{\mathcal{T}}(x) = K_{\mathcal{T}|M}(x)$ ، $J_{\mathcal{T}}(x) \cap M = J_{\mathcal{T}|M}(x)$ و $A_{\mathcal{T}}(x) \cap M = A_{\mathcal{T}|M}(x)$.*

برهان گزاره زیر ساده است و از اثبات آن صرف نظر خواهیم کرد.

گزاره ۱۴.۲. *فرض کنیم $S : X \to X$ عملگری پیوسته باشد به طوری که برای $C_.$- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ داشته باشیم $ST(t) = T(t)S$، در اینصورت برای $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \in \{K_{\mathcal{T}}, J_{\mathcal{T}}, A_{\mathcal{T}}\}$، خواهیم داشت که $S(\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x)) \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(S(x))$.*

۳. $C_.$- نیم گروه های هم‌پیوسته

برای $C_.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ از عملگرهای خطی روی فضای نرم دار X، گوی دینامیکی $\Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(x)$ به مرکز x و به شعاع δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(x) = \{y : \|T(t)y - T(t)x\| \leq \delta; \forall t \geq \cdot\}$$

براحتی می‌توان دید که

$$x + \Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(\cdot) = \Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(x) \qquad (۱.۳)$$

بنابراین با مطالعه‌ی دینامیک اطراف $x = \cdot$ می‌توان در مورد دینامیک سایر نقاط اظهار نظر کرد. $C_.$ـنیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ در $x = p$، هم‌پیوسته است هرگاه برای هر $\epsilon > \cdot$ وجود داشته باشد $\delta > \cdot$ به طوری که $B_{\delta}(p) \subset \Gamma^{\epsilon}_{\mathcal{T}}(p)$.بنا بر رابطه (۱.۳) می‌توان گفت $C_.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ در $x = p$ هم‌پیوسته است اگر و فقط اگر در $x = \cdot$ هم‌پیوسته باشد. و این نتیجه می‌دهد که هرگاه $C_.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی در یک نقطه از فضای X، هم‌پیوسته باشد آنگاه $C_.$- نیم‌گروه $\mathcal{T}$ هم‌پیوسته است . در حالی که عملگرهای غیر خطی وجود دارند که در یک مجموعه‌ی چگال از نقاط X، هم‌پیوسته

می‌باشند ولی خود عملگر، نمی‌تواند هم‌پیوسته باشد. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $h : X \to Y$ تبدیل خطی وارون‌پذیر و $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ $C.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی روی X باشد. در اینصورت خانواده $ho\mathcal{T}oh^{-1} = \{hoT(t)oh^{-1}\}_{t\geq .}$ تشکیل $C.$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی روی فضای X می‌دهد. براحتی می‌توان دید که برای هر $\epsilon > ۰$، وجود دارد $\delta > ۰$ به طوری که

$$h(\Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(\cdot)) \subseteq \Gamma^{\epsilon}_{ho\tau oh^{-1}}(\cdot) \tag{۲.۳}$$

چون هر تبدیل خطی وارون‌پذیر، یک به یک و پوشا می‌باشند بنابر رابطه‌ی (۲.۳) قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۳. *فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $h : X \to Y$ تبدیل خطی وارون پذیر باشد. $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ از عملگرهای خطی روی X، هم‌پیوسته است اگر و فقط اگر $C.$- نیم‌گروه $ho\mathcal{T}oh^{-1} = \{hoT(t)oh^{-1}\}_{t\geq .}$ هم‌پیوسته است.*

برای $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X، نگاشت $\mathbb{R}^+ \times X \to X$ باضابطه‌ی $(t, x) \mapsto T(t)x$ پیوسته است بنابراین برای هر $N \in \mathbb{N}$، $\{T(t)|t \in [\cdot, N]\}$ تشکیل یک خانواده هم‌پیوسته می‌دهد. برای $N > ۰$ و $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$، مجموعه‌ی $A^N_{\mathcal{T}}(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A^N_{\mathcal{T}}(\epsilon) := \{x| \|T(x)x\| < \frac{\epsilon}{۴}; \forall t \geq N\}$$

قضیه ۲.۳. *اگر برای هر $\epsilon > ۰$ وجود داشته باشد $N > ۰$ به طوری که $int(A^N_{\mathcal{T}}(\epsilon)) \neq \phi$، آنگاه $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ هم‌پیوسته است.*

اثبات. ثابت می‌کنیم $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ در $x = ۰$ هم‌پیوسته است فرض کنیم $\epsilon > ۰$ عدد مثبت دلخواهی باشد. با نوجه به پیوسته بودن نگاشت $\mathbb{R}^+ \times X \to X$ باضابطه‌ی $(t, x) \mapsto T(t)x$، می توان گفت که $\{T(t)|t \in [\cdot, N]\}$ تشکیل یک خانواده هم‌پیوسته می‌دهد. بنابراین $\delta. > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\|x\| < \delta. \Rightarrow \|T(t)x\| < \frac{\epsilon}{۴} \qquad \forall t \in [\cdot, N] \tag{۳.۳}$$

بنا به فرض $int(A^N_{\mathcal{T}}(\epsilon)) \neq \phi$ بنابراین وجود دارد $۰ < \delta < \delta.$ به طوری که

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(t)x\| < \frac{\epsilon}{۴} \qquad \forall t \geq N \tag{۴.۳}$$

روابط (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌دهند که $C.$- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq .}$ در $x = ۰$ هم‌پیوسته می‌باشد یعنی اینکه

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(t)x\| < \epsilon \qquad \forall t \geq ۰$$

□

فرض کنیم $H \subseteq \mathbb{R}^+$ زیر فضای g- ربطی باشد، یعنی اینکه مجموعه‌ی فشرده $K \subseteq \mathbb{R}^+$ وجود دارد به طوری که $\mathbb{R}^+ = H + K$. در اینصورت با اندکی محاسبات می‌توان نشان داد که برای هر $\epsilon > ۰$ وجود دارد $\delta > ۰$ به طوری که

$$\Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(\cdot, H) \subset \Gamma^{\epsilon}_{\mathcal{T}}(\cdot) \tag{۵.۳}$$

که $\Gamma^{\delta}_{\mathcal{T}}(\cdot, H) = \{x| \|T(h)x\| < \delta; h \in H\}$ و این قضیه زیر را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید H زیر فضای g- ربطی در $\mathbb{R}^+$ باشد. در اینصورت .C- نیم‌گروه $\{T(t)\}_{t\geq}$ از عملگرهای خطی، هم‌پیوسته است اگر و فقط اگر خانواده $\{T(t)|t \in H\}$ هم‌پیوسته است.*

۴. مفهوم حساسیت نسبت به شرایط اولیه برای نیم‌گروه از عملگرهای خطی

اگر در سیستمی برای هر بردار، بتوان برداری به قدر کافی نزدیک به این بردار پیدا کرد که بعد از گذشت زمانی، این دو بردار در فاصله‌ی مشخص از یکدیگر قرار بگیرند، به این سیستم، سیستم حساس نسبت به شرایط اولیه گوییم و از فاصله‌ی مشخص به عنوان ثابت حساسیت نامیده می‌شود. به عبارتی .C- نیم‌گروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq}$ از عملگرها روی فضای X حساس به شرایط اولیه است هرگاه $c > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$ و هر $\epsilon > ۰$ بتوان $y \in X$ با $||x-y|| < \epsilon$ و $t > ۰$ وجود داشته باشند که $||T(t)x - T(t)y|| < c$.

هرگاه مقدار $c > ۰$ وابسته به نقطه‌ی x باشد، در اینصورت سیستم $\mathcal{T}$ در x حساس است. در حالتی که $\{T(t)\}$ عملگرهای غیرخطی باشد، ممکن است که $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq}$. در هر نقطه نسبت به شرایط اولیه حساس باشد اما خود سیستم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq}$. نسبت به شرایط اولیه حساس نباشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که در حالت عملگرهای خطی، وضعیت کاملاً متفاوت است.

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq}$. یک .$C$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X باشد در اینصورت موارد زیر معادلند:*

۱. *$\mathcal{T}$ نسبت به شرایط اولیه حساس است.*

۲. *$\mathcal{T}$ در $x = p \in X$ نسبت به شرایط اولیه حساس است.*

۳. *$\mathcal{T}$ در $x = ۰ \in X$ نسبت به شرایط اولیه حساس است.*

اثبات. کافی است نشان دهیم که اگر τ که $x = ۰$ حساسیت دارد، آنگاه τ وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. فرض کنیم $p \in X$، $s \geq ۰$ و U یک مجموعه باز شامل p باشد مجموعه باز V شامل $x = ۰$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $p + V \subset U$. با توجه به اینکه گردایه‌ی $\{T(t); t \in [۰, s]\}$ همپیوسته است، پس بنا بر حساس بودن $\mathcal{T}$ در $x = ۰$، $t > s$ و $y \in V$ وجود دارد که $||T(t)y|| > \delta$ لذا $p + y \in U$. $\square$

فرض کنیم $(X, \sum, \mu)$ فضای اندازه σ- متناهی و $f : X \to X$ نگاشت از دو طرف اندازه پذیر باشد. نگاشت f را نگاشت لیپ شیتز μ- انقباضی ضعیف می‌نامیم هرگاه $۱ > c_۲ \geq c_۱ > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر B،

$$c_۱\mu(B) \leq \mu(f(B)) \leq c_۲\mu(B) \tag{۱.۴}$$

نگاشت $T_f : L^P(X, \sum, \mu) \to L^P(X, \sum, \mu)$ که $۱ \leq p < \infty$ ، توسط ضابطه $\varphi \mapsto \varphi o f$ تعریف می‌کنیم. طبق قضیه [؟ ، ۱۱.۲] شرط (۱.۴) ایجاب می‌کند که T_f عملگر خطی کراندار است.

مثال ۲.۴. فرض کنیم $X = (X, \sum, \mu)$ فضای اندازه σ- متناهی باشد که $L^۱(X, \sum, \mu) \setminus L^\infty(X, \sum, \mu) \neq \phi$ و f نگاشت لیپ شیتز در طرفه μ- انقباضی ضعیف یک به یک باشد به طوری که

$$\mu(\bigcap_{k\geq ۱} f^k(X)) \neq ۰$$

آنگاه $T_f : L^P(X, \sum, \mu) \to L^P(X, \sum, \mu)$ با ضابطه‌ی $\varphi \mapsto \varphi o f$ حساس است.

اثبات. نشان می‌دهیم $x = ۰$ نقطه حساس برای T_f است. فرض کنید $\epsilon > ۰$ چون $L^۱(X, \sum, \mu) \setminus L^\infty(X, \sum, \mu) \neq \phi$، مجموعه‌ی اندازه پذیر A وجود دارد به طوری که $\frac{\epsilon}{۴} > \mu(A) > ۰$ فرض کنیم ۱_A تابع مشخصه A باشد. فرض کنیم $U \subset L^P(X, \sum, \mu)$ گوی باز به مرکز ۱_A و به شعاع $\delta < \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\mu(A)}{۲}}$ باشد. برای هر $\varphi \in U \subseteq B_\epsilon(۰)$ طبق نامساوی چیپیشف،

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in A : |\varphi(x) - ۱| \geq \frac{۱}{۲}\}) &\leq ۲^P \int_A |\varphi - ۱_A|^P d\mu \\ &\leq (۲\|\varphi - ۱_A\|_P)^P \\ &< (۲\delta)^P < \frac{\mu(A)}{۲}\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که اگر $A_\varphi = \{x | \varphi(x)| \geq \frac{۱}{۲}\}$ آنگاه $\mu(A_\varphi) \geq \frac{\mu(A)}{۲}$ عدد طبیعی $k \in N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{\mu(A)}{۲c_۲^x} \geq ۲$ چون f نگاشت لیپ شیتز دو طرفه μ- انقباص ضعیف یک به یک است:

$$\mu(f^{-(k-۱)}(A)) \leq c_۲ \mu(f^{-k}(A))$$

طبق رابطه داریم که $\mu(f^{-k}(A_\varphi)) \leq \frac{\mu(A_\varphi)}{۲c_۲^x}$ این نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\|T_f^k \varphi\|_p^p = \int |\varphi o f^k|^p d\mu \geq \int_{f^{-k}(A_\varphi)} |\varphi o f^k|^p d\mu \\ &\geq \frac{۱}{۲}\mu(f^{-k}(A_\varphi)) \\ &\geq \frac{\mu(A)}{۲c_۲^x} \geq ۲\end{aligned}$$

□

فرض کنیم برای همسایگی W از $۰ \in X$ و مجموعه‌ی باز غیرتهی U از X، تعداد نامتناهی $t > ۰$ وجود دارد به طوری که $T(t)W \cap U \neq \phi$. آنگاه برای $W = \{x \in X : \|x\| < \epsilon\}$ و $U = \{x \in X : \|x\| > \delta\}$ مقادیر $z \in W$ و $t > ۰$ وجود دارند به طوری که $T(t)z \in U$ یعنی $\|T(t)z\| > ۲$ لذا داریم که:

لم ۳.۴. *C- نیم‌گروه $\tau = \{T(t)\}_{t\geq}$ از عملگرهای خطی روی فضای باناخ X حساس هستند هرگاه برای هر همسایگی W از $۰ \in X$ و هر مجموعه‌ی باز غیرتهی U از X، تعداد نامتناهی $t > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $T(t)W \cap U \neq \phi$.*

گزاره ۴.۴. *C- نیم‌گروه $\tau = \{T(t)\}_{t\geq}$ از فضای باناخ X را در نظر می‌گیریم اگر یک زیرمجموعه‌ی چگال Y از X و یک C- نیم‌گروه $\{S(t)\}_{t\geq}$ روی Y وجود داشته باشد به طوری که برای هر $t \geq ۰$، $T(t)oS(t) = Id$ و $\{S(t)\}_{t\geq}$ به صورت نقطه‌ای به صفر میل کند، آنگاه τ حساس است.*

اثبات. همسایگی W از $۰ \in X$ و مجموعه باز غیرتهی U از X را در نظر می‌گیریم. برای $y \in Y \cap U$، داریم که $S(t)y \to ۰$. بنابراین برای هر t به اندازه کافی بزرگ، $S(t)y \in W$. لذا $y = T(t)S(t)y \in T(t)W \cap U$ و بنا بر لم ۳.۴، C- نیم‌گروه $\tau = \{T(t)\}_{t\geq}$ حساس است. □

مثال ۵.۴. فرض کنیم H فضای هیلبرت تفکیک پذیر باشد. پایه متعامد $\{e_n\}$ برای H در نظر می‌گیریم $B : H \to H$ را توسط $B(e_n) = e_{n-1}$ تعریف می‌کنیم. به وضوح B حساس نیست.
فرض کنید $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ دنباله‌ای باشد که $a_n \to \infty$ اختیار می‌کنیم $T_n = a_n B$ ادعا می‌کنیم $\{T_n\}$ حساس است. $U : H \to H$ را توسط $U(e_n) = e_{n+1}$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $S_n = \frac{U}{a_n}$. آنگاه $S_n(x) \to 0$ و $T_n o S_n = Id$ بنابراین طبق گزاره ۴.۴، $\{T_n\}$ حساس است.

در ادامه، رابطه بین نرم $T(t)$ و حساسیت $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ را مورد مطالعه قرار می دهیم.

قضیه ۶.۴. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ یک نیم‌گروه روی X باشد، آنگاه شرایط زیر معادل هستند:*

۱. *$\mathcal{T}$ وابستگی حساس به شرایط اولیه را دارد،*

۲. $\sup\limits_{t\geq 0}\|T(t)\| = \infty$

۳. *$\mathcal{T}$ مداری بیکران دارد.*

۴. *مجموعه‌ی همه بردارها با مدار بیکران در X تشکیل مجموعه‌ای مانده‌ای می‌دهند.*

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنیم τ حساس با ثابت $\delta > 0$ باشد. $\epsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. چون τ در $x = 0$ حساس است آنگاه $y \in X$ و $t \geq 0$ وجود دارند به طوری که $\|y\| < \epsilon$ و $\|T(t)y\| > \delta$. لذا $\|T(t)(\frac{y}{\epsilon})\| > \frac{\delta}{\epsilon}$. بنابراین اگر $Z = \frac{y}{\delta}$ آنگاه $\|Z\| < 1$ و $\|T(t)Z\| > \frac{\delta}{\epsilon}$. بنابراین $\|T(t)\| > \frac{\delta}{\epsilon}$. چون $\epsilon > 0$ دلخواه است آنگاه

$$\sup_{t\geq 0}\|T(t)\| = \infty.$$

(۳) $\Leftarrow$ (۲). بدیهی است.
(۴) $\Leftarrow$ (۳). فرض کنیم $A \subset X$ مجموعه‌ی همه‌ی بردارها با مدار بیکران باشد. در اینصورت

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\{y : \sup_{0\leq t\leq N}\|T(t)y\| > k\}.$$

اگر $x \notin A$ آنگاه $\sup\limits_{t\geq 0}\|T(t)x\| < \infty$ فرض کنیم x برداری با مدار بیکران باشد، آنگاه برای $a \neq 0$، خواهیم داشت

$$\sup_{t\geq 0}\|T(t)(z + ax)\| = \infty$$

این ایجاب می‌کند که $z \in \overline{A}$ بنابراین A چگال است.
(۱) $\Leftarrow$ (۴) فرض کنید $v \in X$ مداری بیکران دارد. یعنی $\sup\limits_{t\geq 0}\|T(t)v\| = \infty$. فرض کنید $y_\epsilon = \epsilon v$ عدد $\epsilon > 0$ وجود دارد که $y_\epsilon \in U$ ، $\epsilon > 0$ در اینصورت $\|T(t)y_\epsilon\| = \epsilon\|T(t)v\|$ و چون $\|T(t)v\|$ یک مدار بیکران است، برای هر $s \geq 0$، $t > s$ وجود دارد به طوری که $\|T(t)y_\epsilon\| > 1$ لذا $\mathcal{T}$ در $x = 0$ حساس است در نتیجه $\mathcal{T}$ حساس است. □

در قضیه زیر شرط کافی برای حساسیت نسبت شرایط اولیه یک C- نیمگروه از عملگرها ارایه میدهیم.

قضیه ۷.۴. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq \cdot}$ یک $C_{\cdot}$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی از فضای باناخ X باشد. اگر $L_\tau(x) \neq J_\tau(x)$ آنگاه $C_{\cdot}$- نیمگروه $\mathcal{T}$ از عملگرها نسبت به شرایط اولیه حساس است.*

اثبات. اگر τ حساس نیست، آنگاه $\sup\limits_{t\geq \cdot}\|T(t)\| \leq M$. فرض کنیم $y \in J_\tau(x)$ در اینصورت $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_n \to x$ و $t_n \geq \cdot$ به طوری که $T(t_n)x_n \to y$ اما

$$\begin{aligned}\|T(t_n)x - y\| \leq& \|T(t_n)x_n - T(t_n)x\| + \|T(t_n)x_n - y\|\\ \leq& M\|x_n - x\| + \|T(t_n)x_n - y\|\end{aligned}$$

ایجاب می‌کند که $y \in L_\tau(x)$ که یک تناقض است. □

هرگاه $C_{\cdot}$- نیمگروه $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq \cdot}$ از عملگرهای خطی از فضای باناخ باشد. و الحاقی آن یعنی $\mathcal{T}^* = \{T^*(t)\}_{t\geq \cdot}$ یک $C_{\cdot}$- نیم‌گروه باشد با توجه به اینکه $\|T(t)\| = \|T^*(t)\|$ لم زیر حاصل می‌شود.

لم ۸.۴. *فرض می‌کنیم نیم‌گروه الحاقی $\mathcal{T}^* = \{T^*(t)\}_{t\geq \cdot}$ یک $C_{\cdot}$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی کراندار باشد در اینصورت $\mathcal{T}$ حساس است اگر و فقط اگر $\mathcal{T}^*$ حساس است.*

قضیه ۹.۴. *فرض کنیم $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\geq \cdot}$ یک $C_{\cdot}$- نیم‌گروه از عملگرهای خطی از فضای باناخ X با $\mathcal{T}$ به طوری که $J_{\mathcal{T}}(x) = X$ در اینصورت $\mathcal{T}$ حساس به شرایط اولیه است.*

اثبات. نشان می‌دهیم $\sup\limits_{t\geq \cdot}\{T^*(t)x^*\} = \infty$. در غیر اینصورت $M > \cdot$ وجود دارد به طوری که $\sup\limits_{t\geq \cdot}\{T^*(t)x^*\} < M$. فرض کنید $p \in X$ به طوری که $|x^*(p)| \geq ۳M\|x\|$. چون $J_\tau(x) = X$، نقطه‌ی $y \in X$ وجود دارد که $\|x - y\| \leq \frac{\|x\|}{۳}$ و $\|T_t(y) - p\| \leq M\frac{\|x\|}{\|x^*\|}$ لذا داریم که

$$\begin{aligned}۳M\|x\| \leq& |x^*(p)|\\ \leq& |x^*(T(t)y)| + |x^*(T(t)y - p)|\\ =& |T_t^* x^*(y)| + |x^*(T(t)y - p)|\\ \leq& M\|y\| + \|x^*\|\frac{M\|x\|}{\|x^*\|}\\ =& M\|y\| + M\|x\|\\ \leq& \frac{۴}{۳}M\|x\| + M\|x\| = \frac{۷}{۳}M\|x\|\end{aligned}$$

که یک تناقض است. □

مراجع

[1] J. F. Alves, Hyperbolic isomorphisms in Banach spaces, https://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/pub/senegal.pdf.
[2] J. F. Alves and M. Monge, Non-denseness Of hyperbolicity for linear isomorphisms in Banach spaces, arXiv:1510.05831v1, (2015).
[3] S. I. Ansari, Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. J. Funct. Anal., **148**(2) (1997), 384–390.
[4] A. Barzanouni, Semiflows: prolongation sets, point-transitive, topologically transitive. Topology Appl.**339** (2023), part B, Paper No. 108668, 16 pp.

[5] G. D. Birkhoff, D´emonstration d'un th´eoreme elementaire sur les fonctions entieres. C. R. Acad. Sci. Paris,**189** (1929), 473–475.
[6] N.S. Feldman, Linear chaos?, http://home.wlu.edu/ feldmann/research.html (2001).
[7] T. Kalmes, Hypercyclic, mixing, and chaotic C_0-semigroups, Ph.D. thesis, University of Trier, Trier, Germany, (2006).
[8] K. Lee, C.A. Morales and N. Nguyen, Topologically stable linear operators. Bull.Soc.Math.France **151**(4) (2023), 647-654.
[9] G. R. MacLane, Sequences of derivatives and normal families. J. Analyse Math.,**2** (1952), 72–87.
[10] A. Miller, A note about periodic and g-periodic points in semiflows. Semigroup Forum **99** (1),(2019), 57–66.
[11] I. I. Vrabie, C0-semigroups and application. Amsterdam: Elsevier (2003).