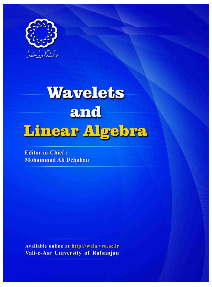
موجک‌ها و جبرخطی ۱۱(۳) (۱۴۰۳) ۱۳۸-۱۶۴



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه و کاربرد آن در پایداری مجانبی سیستم‌های چندجمله‌ای زمان‌ـپایا

مصطفی زنگی آبادی*[آ]، عباس عسکری‌زاده[ب]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندر عباس، ایران*
[ب] *گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر(عج)، رفسنجان، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده:۳۱ تیر ۱۴۰۲
پذیرفته شده:۱۶ دی ۱۴۰۲
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:
Zـمقدار ویژه، Zـشعاع طیفی، پایداری مجانبی سیستم‌های چندجمله‌ای زمان‌ـپایا

چکیده

در این مقاله، برخی از مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه از نوع برائر با استفاده از تانسورهای Zـهمانی برای تانسورهای مرتبه زوج ارائه شده‌اند. ابتدا بر اساس مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه‌ی جدید، برخی از کران‌های بالای Zـشعاع طیفی تانسورهای مرتبه زوج پیشنهاد می‌شود. سپس به‌عنوان کاربرد، برخی از شرایط کافی برای بررسی معین مثبت بودن تانسورهای متقارن به‌طور ضعیف از مرتبه زوج و همچنین پایداری مجانبی سیستم‌های چندجمله‌ای زمان‌ـپایا بدست می‌آیند. در آخر، مثال‌های عددی برای نشان دادن کارایی نتایج ارائه شده است.

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: zangiabadi1@gmail.com(زنگی آبادی) ، a.askari@vru.ac.ir (عسکری)
http://doi.org/10.22072/WALA.2024.2007607.1430

۱. مقدمه

یک تانسور مختلط (حقیقی)، $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ از مرتبه‌ی m و بعد n، به صورت $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{[m,n]}(\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]})$ نمایش داده می‌شود و شامل n^m درایه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), \quad \forall\, i_j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

در سال ۱۹۳۱ سیمون آرنویچ گرشگورین[1]، قضیه مشهور خود را موسوم به قضیه گرشگورین بیان نمود [۶]. در آن قضیه عنوان شد که همه مقادیر ویژه یک ماتریس در دایره‌هایی (به نام دیسک‌های گرشگورین) حول درایه‌های قطری ماتریس‌ها قرار دارند. در ادامه تحقیقات مفصلی در این زمینه انجام گرفت. به‌عنوان مثال، وارگا[2] در سال ۲۰۰۴، نتایج و کاربردهای مختلفی از این قضیه مهم را برای ماتریس‌ها ارائه نمود [۳۲]. تانسورها موضوعی جذاب در دهه‌های اخیر بوده‌اند و مسائل مربوط به مقادیر ویژه تانسورها در تئوری و کاربرد از اهمیت زیادی برخوردارند. در سال‌های اخیر با معرفی مقدار ویژه تانسورها، قضیه‌ی گرشگورین و نتایج آن توسط تعدادی از محققان به تانسورها تعمیم داده شده است [۱، ۲۲، ۳۵].

مسائل Zـمقدار ویژه‌ی تانسورها دارای طیف گسترده‌ای از کاربردهای عملی، مانند تقریب بهترین رتبه یک در تجزیه و تحلیل داده‌ها [۴]، زنجیره‌های مارکوف مرتبه بالاتر [۱۸]، معین مثبت[3] بودن فرم‌های چند متغیره مرتبه زوج [۱۹] می‌باشند. با توجه به ماهیت غیرخطی بودن مسئله Zـمقدار ویژه برای تانسورها، روش‌های استفاده شده در ماتریس را نمی‌توان به طور مستقیم برای تانسورها اعمال کرد. با استفاده از تکنیک‌های دیگری، نتایج مهم در مقدار ویژه ماتریس‌ها به تانسورهای مرتبه بالاتر تعمیم داده شده‌اند (برای نمونه [۲۲، ۳۵] را ملاحظه کنید).

با توجه به [۲۱، قضیه ۵.۸]، برای تعیین شرایط بیضوی قوی[4] تانسورهای ارتجاعی[5]، لازم است معین مثبت بودن سه تانسور متقارن مرتبه دوم، مرتبه چهارم و مرتبه ششم بر اساس Zـمقدار ویژه این تانسورها بررسی شود. از این رو، می‌توان کوچکترین Zـمقدار ویژه یا همه Zـمقادیر ویژه یک تانسور مرتبه زوج را برای بررسی معین مثبت بودن آن محاسبه کرد. برخی از الگوریتم‌های مؤثر برای یافتن Zـمقدار ویژه و بردار ویژه‌ی متناظر برای تانسورها در [۲، ۱۶، ۲۴] ارائه شده اند. با این حال، محاسبه همه Zـمقادیر ویژه، حتی کوچکترین Zـمقدار ویژه زمانی که m و n بزرگ هستند، دشوار است [۱۱].

---

[1] Semyon Aranovich Gershgorin
[2] Varga
[3] Positive definiteness
[4] Strong ellipticity condition
[5] Elasticity tensor

بنابراین، بسیاری از محققان مجموعه‌های شامل Zـ مقدار ویژه را مورد بررسی قرار دادند [۷، ۸، ۱۴، ۱۷، ۲۵، ۲۶، ۲۹، ۳۰، ۳۳، ۳۴، ۳۶، ۳۹، ۴۰]. در [۲۴] با استفاده از مجموعه های شامل Zـ مقادیرویژه، معین مثبت بودن چندجمله ای های همگن را بررسی کردند. اخیراً چندین نتیجه قابل توجه برای حل مسئله معین مثبت یک تانسور متقارن مرتبه زوج بر اساس ساختار ویژه آنها به وجود آمده است [۱۰، ۱۵].

همان‌طوری که در مراجع [۵، ۱۹] آمده است، مسائل Z ـ مقدار ویژه در حل دستگاه‌های چندجمله‌ای زمان‌ـپایا[6] نقش اساسی دارند.

$$\dot{x} = \mathcal{A}^{(2)}x + \mathcal{A}^{(4)}x^3 + \cdots + \mathcal{A}^{(m)}x^{m-1}, \tag{۱.۱}$$

به‌طوری‌که $\mathcal{A}^{(t)} = (a_{i_1 i_2 \dots i_t}) \in \mathbb{R}^{[t,n]}$ با $t = 2, 4, \dots, m$ و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. اخیراً لی و همکارانش در [۱۵] ، پایداری مجانبی دستگاه فوق را تحت مجموعه‌های شامل Zـ مقدار ویژه از نوع گرشگورین نتیجه گرفتند. هدف اصلی ما در این مقاله، بهبود شرایط پایداری مجانبی[7] برای دستگاه‌های زمان‌ـپایا، تحت مجموعه‌های شامل Zـ مقدار ویژه از نوع برائر[8] می‌باشد.

این مقاله طی چهار قسمت تنظیم شده است که در بخش دوم تعاریف و قضایای مورد نیاز ارائه گردیده است. در بخش سوم با استفاده از تانسور Zـ همانی، مجموعه‌های شامل Zـ مقادیر ویژه‌ی از نوع برائر ارائه می‌کنیم، که مجموعه‌های شامل Zـ مقادیر ویژه‌ی موجود را بهبود می بخشد و کران Zـ شعاع طیفی تانسورهای مرتبه زوج متقارن ضعیف با کران‌های موجود مقایسه خواهد شد. در بخش چهارم این مقاله کاربردهای مجموعه های شامل Zـ مقادیر ویژه بیان خواهد شد. در ابتدا مفاهیم معین مثبت بودن تانسور و پایداری مجانبی یک سیستم چند جمله‌ای زمان‌ـپایا بیان می‌شود. با توجه به نتایج مربوط به Zـ مقادیر ویژه‌ی تانسور با مرتبه‌ی زوج، شرایط بررسی معین مثبت بودن و پایداری مجانبی سیستم چند جمله‌ای زمان‌ـپایا پیشنهاد می‌شود و با چند مثال این نتایج مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

۲. تعاریف و پیش نیازها

در ابتدای این بخش به‌طور مختصر نمادهایی که در ادامه‌ی این مقاله مورد نیاز است آورده می‌شود. مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$، مجموعه‌ی تمام اعدادحقیقی را با $\mathbb{R}$ و مجموعه‌ی تمام بردارهای n بعدی با $\mathbb{C}^n$ نمایش داده می‌شود. بردارها

[6] Time-invariant polynomial systems
[7] Asymptotical stability
[8] Brauer

با حروف کوچک مانند x، ماتریس‌ها با حروف بزرگ مانند A و تانسورها با حروف بزرگ مورب مانند $\mathcal{A}$ نوشته می‌شوند.
تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ نامنفی (مثبت) نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \geq 0 \ (a_{i_1 i_2 \cdots i_m} > 0), \quad \forall\ i_j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

تعریف ۱.۲. برای بردار $x \in \mathbb{C}^n$، مولفه‌ی iام آن با نماد x_i نمایش داده می‌شود، و $x^{[m-1]}$ برداری در $\mathbb{C}^n$ است که مولفه‌ی iام آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_i^{[m-1]} = x_i^{m-1}, \quad \forall i.$$

همچنین $\mathcal{A}x^{m-1}$ برداری است در $\mathbb{C}^n$ که مولفه‌ی iام آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{A}x^{m-1})_i = \sum_{i_2, i_3, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i i_2 \cdots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.$$

تعریف ۲.۲. برای تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1\, i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$، اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ وجود داشته باشند، به‌طوری‌که

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x \quad \text{و} \quad x^T x = 1, \tag{۱.۲}$$

آنگاه λ یک Eـمقدار ویژه‌ی تانسور $\mathcal{A}$ و x یک Eـبردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ است. در حالت خاص، اگر λ و x حقیقی باشند، آنگاه λ یک Zـمقدار ویژه‌ی تانسور $\mathcal{A}$ و x یک Zـبردار ویژه‌ی متناظر λ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲. مجموعه‌ی تمام Zـمقادیر ویژه‌ی تانسور $\mathcal{A}$ با $\sigma_Z(\mathcal{A})$ نشان داده خواهد شد. اگر $\sigma_Z(\mathcal{A}) \neq \emptyset$، در اینصورت Zـشعاع طیفی تانسور $\mathcal{A}$ با $\rho_Z(\mathcal{A})$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_Z(\mathcal{A}) := \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma_Z(\mathcal{A})\}.$$

تعریف ۴.۲. تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ از مرتبه‌ی m و بعد n را در نظر بگیرید.

الف) تانسور $\mathcal{A}$، متقارن نامیده می‌شود، هرگاه درایه‌های $\mathcal{A}$ نسبت به هر جایگشت روی اندیس‌ها پایا باشند، به عبارتی برای هر $i_1, i_2, \ldots, i_m \in N$ و هر جاگشت $\pi \in \Pi_m$ داشته باشیم:

$$a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \cdots i_{\pi(m)}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_m}.$$

مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های $(1, 2, \ldots, m)$ با Π_m نمایش داده می‌شود.

ب) دلتای کرونکر[9] برای m اندیس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \begin{cases} 1 & i_1 = i_2 = \cdots = i_m \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

ج) تانسور $\mathcal{A}$ متقارن ضعیف نامیده می‌شود، اگر چندجمله‌ای همگن متناظر $\mathcal{A}x^m$ در شرط زیر صدق کند:

$$\nabla \mathcal{A}x^m = m\mathcal{A}x^{m-1},$$

به‌طوری‌که

$$\mathcal{A}x^m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m},$$

و ∇ عملگر دیفرانسیل می‌باشد.

به وضوح اگر $\mathcal{A}$ متقارن باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ متقارن ضعیف است ولی عکس آن ممکن است درست نباشد.
در سال ۲۰۰۵، تانسور Zـهمانی برای تعمیم چندجمله‌ای مشخصه تانسورهای متقارن مرتبه زوج به‌صورت زیر تعریف شده است [۲۰].

تعریف ۵.۲. تانسور $\mathcal{I} = (e_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ از مرتبه‌ی زوج یک تانسور Zـهمانی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر

[9] Kronecker

بردار $zx \in \mathbb{R}^n$ با $x^T x = 1$، داشته باشیم:

$$\mathcal{I} x^{m-1} = x. \tag{2.2}$$

در [۱۳]، ویژگیهای تانسور Zـهمانی مورد بررسی قرار گرفت و اخیراً تعدادی از محققان این تعریف را مورد استفاده قرار داده اند (برای نمونه [۱۰، ۱۵] را ملاحظه کنید).

به طور کلی، تانسور Zـهمانی از مرتبه‌ی زوج و بعد n منحصربفرد نیست. به‌عنوان نمونه، هر یک از تانسورهای زیر تانسور Zـهمانی می‌باشند.

حالت الف. فرض کنید $\mathcal{I}_1 = (e_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$، به‌طوری‌که

$$e_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \begin{cases} 1 & i_1 = i_2,\ i_3 = i_4, \ldots, i_{m-1} = i_m \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{3.2}$$

حالت ب. فرض کنید $\mathcal{I}_2 = (e_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$، به‌طوری‌که

$$e_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \prod_m} \delta_{i\pi(1)\, i\pi(2)}\, \delta_{i\pi(3)\, i\pi(4)} \ldots \delta_{i\pi(m-1)\, i\pi(m)}, \tag{4.2}$$

که

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j, \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

در این مقاله تانسور Zـهمانی $\mathcal{I}_2$ را درنظر می گیریم. تانسور Zـهمانی به ازای $m = 4, 6, 8$ به شرح زیر فهرست شده است:

برای $m = ۴$:

$$(\mathcal{I}_۲)_{ijkl} = \begin{cases} ۱ & i = j = k = l, \\ \frac{۱}{۳} & i = j \neq k = l, \\ \frac{۱}{۳} & i = k \neq j = l, \\ \frac{۱}{۳} & i = l \neq j = k \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

برای $m = ۶$:

$$(\mathcal{I}_۲)_{i_۱ i_۲ \cdots i_۶} = \begin{cases} ۱ & i_۱ = i_۲ = \cdots = i_۶, \\ \frac{۱}{۵} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۶) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [n]}} \{\pi(i,i,i,i,j,j)\}, \\ \frac{۱}{۱۵} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۶) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \neq k \\ i,j,k \in [n]}} \{\pi(i,i,j,j,k,k)\}, \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

به‌طوری‌که $\{\pi(i, j, k, l, s, t)\}$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات i، j، k، l، s و t می‌باشد.

برای $m = ۸$:

$$(\mathcal{I}_۲)_{i_۱ i_۲ \cdots i_۸} = \begin{cases} ۱ & i_۱ = i_۲ = \cdots = i_۸, \\ \frac{۱}{۷} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۸) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [n]}} \{\pi(i,i,j,j,j,j,j,j)\}, \\ \frac{۳}{۳۵} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۸) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [n]}} \{\pi(i,i,i,i,j,j,j,j)\}, \\ \frac{۱}{۳۵} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۸) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \neq k \\ i,j,k \in [n]}} \{\pi(i,i,j,j,k,k,k,k)\}, \\ \frac{۱}{۱۰۵} & (i_۱, i_۲, \ldots, i_۸) \in \bigcup\limits_{\substack{i \neq j \neq k \neq l \\ i,j,k,l \in [n]}} \{\pi(i,i,j,j,k,k,l,l)\}, \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

به‌طوری‌که $\{\pi(i, j, k, l, s, t, m, n)\}$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات i، j، k، l، s، t، m و n می‌باشد.

۳. مجموعه‌های بهینه‌ی شامل Zـ مقدار ویژه‌ی تانسور

در این بخش، مجموعه‌های شامل Zـ مقدار ویژه‌ی تانسور با پارامترهای تانسورهای Zـ همانی معرفی می‌شوند، و نشان داده می‌شود که کران بالای Zـ شعاع طیفی تانسورهای متقارن ضعیف بدست آمده از نتایج موجود بهتر هستند. در ابتدا، نتایج ارائه شده در [۱۵] معرفی می‌گردد. در ادامه، مجموعه‌های شامل Zـ مقدار ویژه‌ی تانسور از نوع برائر ارائه می‌شوند.

با افراز مجموعه‌ی اندیس‌ها، نمادها و قراردادهای مورد استفاده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Lambda_i := \left\{(i_۲, \ \ldots, i_m) \ : \ (\mathcal{I}_۲)_{ii_۲\cdots i_m} \neq ۰, \quad i_۲, \ \ldots, i_m \in [n]\right\}, \quad i \in [n],$$
$$\overline{\Lambda}_i := \left\{(i_۲, \ \ldots, i_m) \ : \ (\mathcal{I}_۲)_{ii_۲\cdots i_m} = ۰, \quad i_۲, \ \ldots, i_m \in [n]\right\}, \quad i \in [n].$$

$$\Delta := \{(i_۲, \ldots, i_m) : \text{مساوی باشند}\ \ i_۲, \ldots, i_m \in [n] \ \text{یا فقط دو تا از}\ \ i_۲ \neq \cdots \neq i_m\},$$
$$\overline{\Delta} := \{(i_۲, \ldots, i_m) : (i_۲, \ldots, i_m) \notin \Delta, \ i_۲, \ldots, i_m \in [n]\},$$

$$\Omega_j := \{(i_۲, \ldots, i_m) : j, i_۲, \ldots, i_m \in [n] \ \text{که}\ \{۲, \ldots, m\} \ \text{برای بعضی از}\ k\ \text{متعلق به}\ \ i_k = j\},$$
$$\overline{\Omega}_j := \{(i_۲, \ldots, i_m) : j, i_۲, \ldots, i_m \in [n] \ \text{که}\ \{۲, \ldots, m\} \ \text{برای همه}\ k\ \text{متعلق به}\ \ i_k \neq j\}.$$

در سرتاسر مقاله برای یک تانسور مرتبه زوج $\mathcal{A} = (a_{i_۱ i_۲ \ldots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ و $K \in \left\{\Lambda_i, \Delta, \Omega_j\right\}$ از نمادهای زیر

استفاده می کنیم:

$$
\begin{aligned}
& r_i(\mathcal{A}) = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n]} \left|a_{ii_2\ldots i_m}\right|, \qquad r_i^j(\mathcal{A}) = r_i(\mathcal{A}) - \left|a_{ijj\ldots j}\right| \qquad i\neq j,\\
& r_i^K(\mathcal{A}) = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in K} \left|a_{ii_2\ldots i_m}\right|, \qquad r_i^{\overline{K}}(\mathcal{A}) = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in \overline{K}} \left|a_{ii_2\ldots i_m}\right|,\\
& r_i^K(\mathcal{A},\mu_i) = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in K} \left|a_{ii_2\ldots i_m} - \mu_i e_{ii_2\ldots i_m}\right|,\\
& r_i^{\overline{K}}(\mathcal{A},\mu_i) = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in \mathbb{K}} \left|a_{ii_2\ldots i_m} - \mu_i e_{ii_2\ldots i_m}\right|,\\
& N_i(\mathcal{A}) = \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}}\left(r_i^{\Lambda_i\cap\Delta}(\mathcal{A}) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\Delta}(\mathcal{A})\right) + r_i^{\Lambda_i\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A}) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A}),\\
& N_i(\mathcal{A},\mu_i) = \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}}\left(r_i^{\Lambda_i\cap\Delta}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\Delta}(\mathcal{A})\right) + r_i^{\Lambda_i\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A}),\\
& N_i^j(\mathcal{A},\mu_i) = \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}}\left(r_i^{j\ \Lambda_i\cap\Delta}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{j\ \overline{\Lambda_i}\cap\Delta}(\mathcal{A})\right) + r_i^{j\ \Lambda_i\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{j\ \overline{\Lambda_i}\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A}),\\
& N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A},\mu_i) = \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}}\left(r_i^{\Lambda_i\cap\Delta\cap\Omega_i}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\Delta\cap\Omega_i}(\mathcal{A})\right) + r_i^{\Lambda_i\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_i}(\mathcal{A},\mu_i) + r_i^{\overline{\Lambda_i}\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_i}(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

در ادامه برای اثبات قضایا به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱.۳. *[۲۷] فرض‌کنید $x_i\in\mathbb{R}$، $i\in[n]$، در رابطه $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ صدق‌کنند. اگر $y_1,\ldots,y_k$، k مولفه‌ی دلخواه از $x_1,\ldots,x_n$ باشند، آنگاه*

$$|y_1||y_2|\cdots|y_k| \leq \frac{1}{k^{\frac{k}{2}}}.$$

برای بهبود قضیه گرشگورین از نوع Zـمقدار ویژه [۱۲]، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۳. *فرض‌کنید $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ و m زوج باشد، آنگاه*

$$\sigma_Z(\mathcal{A}) \subseteq \Phi(\mathcal{A}) = \bigcup_{i\in[n]} \left(\Phi_i(\mathcal{A}) := \{\lambda\in\mathbb{R}\ :\ |\lambda|\leq N_i(\mathcal{A})\}\right).$$

اثبات. اگر $\lambda\in\sigma_Z(\mathcal{A})$ با Zـبردار ویژه x باشد و $|x_t| = \max_{i\in[n]}|x_i|$، آنگاه با استفاده از tـامین تساوی در (۱.۲)

به معادله زیر می‌رسیم:

$$\lambda x_t = \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \Lambda_t \cap \Delta} a_{ti_2\ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m} + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \Lambda_t \cap \overline{\Delta}} a_{ti_2\ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m} + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \Delta} a_{ti_2\ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m} + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \overline{\Delta}} a_{ti_2\ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.$$

اکنون اگر از طرفین معادله فوق قدر مطلق بگیریم، داریم:

$$|\lambda|\,|x_t| \leq \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \Lambda_t \cap \Delta} \left|a_{ti_2\ldots i_m}\right| |y_1| \ldots |y_{m-2}|\,|x_t| + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \Lambda_t \cap \overline{\Delta}} \left|a_{ti_2\ldots i_m}\right| |x_t|^{m-1} + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \Delta} \left|a_{ti_2\ldots i_m}\right| |z_1| \ldots |z_{m-2}|\,|x_t| + \sum_{i_2,\ldots,i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \overline{\Delta}} \left|a_{ti_2\ldots i_m}\right| |x_t|^{m-1},$$

به‌طوریکه $|y_{m-2}|, \ldots, |y_1|$ با روش‌های زیر بدست می‌آیند:

حالت اول.

اگر $i_2 \neq \cdots \neq i_m$، آنگاه می‌توان با افزایش یکی از اعداد $\left|x_{i_m}\right|, \ldots, \left|x_{i_2}\right|$ به $|x_t|$ و ثابت نگه داشتن مابقی، $|y_{m-2}|, \ldots, |y_1|$ را انتخاب کرد.

حالت دوم.

اگر دو اندیس از $i_2, \ldots, i_m$ با هم برابر باشند، آنگاه می‌توان با افزایش یکی از این دو اندیس به $|x_t|$ و ثابت نگه داشتن مابقی $|y_{m-2}|, \ldots, |y_1|$ را انتخاب کرد.

$|z_{m-2}|, \ldots, |z_1|$ هم مشابه بالا بدست می‌آیند. حال با استفاده از لم ۱.۳، داریم:

$$|\lambda||x_t| \leq |x_t| \left(\frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_i^{\Lambda_i \cap \Delta}(\mathcal{A}) + r_i^{\Lambda_i \cap \overline{\Delta}}(\mathcal{A}) + \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_i^{\overline{\Lambda_i} \cap \Delta}(\mathcal{A}) + r_i^{\overline{\Lambda_i} \cap \overline{\Delta}}(\mathcal{A}) \right),$$

که نتیجه می‌دهد $\lambda \in \Phi_t(\mathcal{A}) \subseteq \Phi(\mathcal{A})$. بنابراین، اثبات این قضیه به اتمام می‌رسد. □

طبق [۲، قضیه ۱۱.۳] اگر $\mathcal{A}$ یک تانسور نامنفی متقارن ضعیف باشد آنگاه $\rho_Z(\mathcal{A})$ بزرگترین Zـ‌مقدارویژه $\mathcal{A}$ است بنابراین طبق قضیه ۲.۳ نتیجه زیر بدست می آید.

نتیجه ۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور نامنفی متقارن ضعیف با m زوج باشد. آنگاه*

$$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq \max_{i\in[n]} \{N_i(\mathcal{A})\}.$$

در ادامه برای یک تانسور متقارن از مرتبه ۴ و بعد ۲، نتیجه ۳.۳ بررسی می‌شود.

مثال ۴.۳. [۹، ۱۲، ۱۴، ۱۷، ۳۰، ۳۴] تانسور متقارن $\mathcal{A} = \left(a_{ijkl}\right) \in \mathbb{R}^{[4,2]}$ با درایه‌های تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$a_{1111} = \frac{1}{2}, \quad a_{2222} = 3,$$

و در غیر این‌صورت $a_{ijkl} = \frac{1}{3}$.

هنگامی‌که $i_1 = 1$، داریم

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 \cap \Delta &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\},\\
\Lambda_1 \cap \overline{\Delta} &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,1,1)\},\\
\overline{\Lambda_1} \cap \Delta &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,1,2), (2,1,1), (1,2,1)\},\\
\overline{\Lambda_1} \cap \overline{\Delta} &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (2,2,2)\},
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $N_1(\mathcal{A}) = \frac{11}{6}$.

هنگامی‌که $i_1 = 2$، داریم

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 \cap \Delta &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,2,1), (2,1,1), (1,1,2)\},\\
\Lambda_2 \cap \overline{\Delta} &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (2,2,2)\},\\
\overline{\Lambda_2} \cap \Delta &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (2,1,2), (2,2,1), (1,2,2)\},\\
\overline{\Lambda_2} \cap \overline{\Delta} &= \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,1,1)\},
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $N_2(\mathcal{A}) = \frac{13}{3}$.

با مثال ۸.۴ از [۲] داریم $\rho_Z(\mathcal{A}) = 3/1092$. نتایج عددی بدست آمده از نتیجه‌ی ۳.۳ و کران‌های متناظر از مراجع

[۹، ۱۲، ۱۴، ۱۷، ۳۰، ۳۴] در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند که نشان می‌دهد کران بدست آمده از نتیجه‌ی ۳.۳ نسبت به سایر کران‌ها بهتر است.

جدول ۱: کران‌های بالای $\mathcal{Z}$ـشعاع طیفی تنسور $\mathcal{A}$، مثال ۴.۳

$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۵/۳۳۳۳$	نتیجه ۵.۴ [۳۰]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۵/۲۸۴۶$	قضیه ۷.۲ [۹]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۵/۱۹۳۵$	قضیه ۳.۳ [۱۴]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۵/۱۸۲۲$	قضیه ۵.۴ [۳۴]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۵/۱۶۶۷$	قضیه ۲.۴ [۱۲]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۴/۵۱۴۷$	قضیه ۴.۲ [۱۷]
$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq ۴/۳۳۳۳$	نتیجه ۳.۳

اخیراً، مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه‌ی برای تانسورها ارائه شده است (به عنوان مثال [۲، ۹، ۳۶، ۳۷، ۳۸] را ببینید). متأسفانه، این مجموعه‌ها همیشه شامل صفر هستند و نمی‌توان از آنها برای تعیین معین مثبت بودن تانسورها استفاده کرد. به منظور حل این مشکل، لی و همکارانش[۱۰] یک بازه شامل Zـمقادیر ویژه برای تانسورهای مرتبه زوج به صورت زیر ارائه کردند:

قضیه ۵.۳. *[۱۵، قضیه ۲] فرض کنید $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور از مرتبه‌ی زوج و $\mathcal{I} = (e_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور Zـهمانی باشد. برای هر بردار حقیقی $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$، داریم:*

$$\sigma_Z(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{A}, \mu) = \bigcup_{i \in [n]} \left(\mathcal{G}_i(\mathcal{A}, \mu_i) := \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ |\lambda - \mu_i| \leq r_i(\mathcal{A}, \mu_i)\}\right), \qquad (۱.۳)$$

به‌طوری‌که $r_i(\mathcal{A}, \mu_i) = \sum_{i_2, \cdots i_m \in [n]} \left|a_{i i_2 \ldots i_m} - \mu_i e_{i i_2 \ldots i_m}\right|$. علاوه‌براین،

$$\sigma_Z(\mathcal{A}) \subseteq \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}^n} \mathcal{G}(\mathcal{A}, \mu).$$

با استفاده از قضیه ۲.۳، قضیه ۵.۳ را به صورت زیر می نویسیم.

[10] Li et. al

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ و m زوج باشد. آنگاه برای هر بردار حقیقی $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ شمول زیر برقرار است:*

$$\sigma_Z(\mathcal{A}, \mu) \subseteq \Phi(\mathcal{A}, \mu) = \bigcup_{i \in [n]} (\Phi_i(\mathcal{A}, \mu_i) := \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ |\lambda - \mu_i| \leq N_i(\mathcal{A}, \mu_i)\}).$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \in \sigma_Z(\mathcal{A})$ با Zـبردار ویژه x باشد، آنگاه معادله (۱.۲) برقرار است. همچنین فرض کنید $|x_t| = \max_{i \in [n]} |x_i|$ و μ_t یک بردار حقیقی دلخواه باشد. اکنون با استفاده از tـامین معادله از (۱.۲)، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu_t) x_t \quad &= \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \Lambda_t \cap \Delta} (a_{ti_2 \ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2 \ldots i_m}) x_{i_2} \ldots x_{i_m} + \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \Delta} a_{ti_2 \ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m} \\
&+ \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \Lambda_t \cap \overline{\Delta}} (a_{ti_2 \ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2 \ldots i_m}) x_{i_2} \ldots x_{i_m} + \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \overline{\Delta}} a_{ti_2 \ldots i_m} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.
\end{aligned}$$

حال با اثر قدر مطلق در طرفین معادله فوق داریم:

$$\begin{aligned}
|\lambda - \mu_t| \, |x_t| \quad &\leq \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \Lambda_t \cap \Delta} \left| a_{ti_2 \ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2 \ldots i_m} \right| |y_1| \ldots |y_{m-2}| \, |x_t| \\
&+ \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \Delta} \left| a_{ti_2 \ldots i_m} \right| |z_1| \ldots |z_{m-2}| \, |x_t| \\
&+ \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \Lambda_t \cap \overline{\Delta}} \left| a_{ti_2 \ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2 \ldots i_m} \right| |x_t|^{m-1} + \sum_{i_2, \ldots, i_m \in \overline{\Lambda_t} \cap \overline{\Delta}} \left| a_{ti_2 \ldots i_m} \right| |x_t|^{m-1}
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $|y_1|, \ldots, |y_{m-2}|$ و $|z_1|, \ldots, |z_{m-2}|$ مشابه قضیه ۲.۳ بدست می آیند. اکنون با استفاده از لم ۱.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$|\lambda - \mu_t||x_t| \leq |x_t| \left(\frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_i^{\Lambda_i \cap \Delta}(\mathcal{A}, \mu_t) + \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_t^{\overline{\Lambda_t} \cap \Delta}(\mathcal{A}) + r_t^{\Lambda_t \cap \overline{\Delta}}(\mathcal{A}, \mu_t) + r_t^{\overline{\Lambda_t} \cap \overline{\Delta}}(\mathcal{A}) \right).$$

پس $\lambda \in \Phi_t(\mathcal{A},\mu) \subseteq \Phi(\mathcal{A},\mu)$، و اثبات پایان می‌یابد. $\square$

در ادامه مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه از نوع برائر را برای تانسورهای مرتبه زوج بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۳. *فرض کنید تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ با مرتبه‌ی زوج داده شده است. برای هر بردار حقیقی $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$، داریم:*

$$\sigma_Z(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A},\mu) = \left(\bigcup_{i\in[n]} \bigcap_{j\in[n], i\neq j} \mathcal{X}_{i,j}(\mathcal{A},\mu)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in[n]} \bigcap_{j\in[n], i\neq j} \mathcal{Y}_{i,j}(\mathcal{A},\mu)\right),$$

به‌طوری‌که

$$\mathcal{X}_{i,j}(\mathcal{A},\mu) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \;:\; \left(|\lambda-\mu_i| - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A},\mu_i)\right)\left(\left|\lambda-\mu_j\right| - N_j^{i}\left(\mathcal{A},\mu_j\right)\right) \leq r_i^{\overline{\Omega_i}}(\mathcal{A},\mu_i)\,|a_{ji\ldots i}|\right\},$$
$$\mathcal{Y}_{i,j}(\mathcal{A},\mu) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \;:\; \left(|\lambda-\mu_i| - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A},\mu_i)\right) < 0, \qquad \left(\left|\lambda-\mu_j\right| - N_j^{i}\left(\mathcal{A},\mu_j\right)\right) < 0\right\}.$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \in \sigma_Z(\mathcal{A})$ با Zـبردار ویژه‌ی متناظر x باشد. قرار دهید $|x_t| \geq |x_s| \geq \max\limits_{\substack{k\in[n]\\ k\neq s, k\neq t}} |x_k|$. برای هر عدد حقیقی μ_t با توجه به tـامین معادله‌ی (۱.۲)، داریم:

$$(\lambda-\mu_t)\,x_t = \sum_{i_2,\ldots,i_m\in\Omega_t} (a_{ti_2\ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2\ldots i_m})\,x_{i_2}\ldots x_{im} + \sum_{i_2,\ldots,i_m\in\overline{\Omega_t}} (a_{ti_2\ldots i_m} - \mu_t e_{ti_2\ldots i_m})\,x_{i_2}\ldots x_{i_m}.$$

مشابه با اثبات قضیه‌ی ۶.۳، داریم:

$$|\lambda-\mu_t||x_t| \leq |x_t|\Big(\frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_t^{\Lambda_t\cap\Delta\cap\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t) + r_t^{\Lambda_t\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t) + \frac{1}{(m-2)^{\frac{m-2}{2}}} r_t^{\overline{\Lambda_t}\cap\Delta\cap\Omega_t}(\mathcal{A})$$
$$+ r_t^{\overline{\Lambda_t}\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_t}(\mathcal{A})\Big) + r_t^{\overline{\Omega_t}}(\mathcal{A},\mu_t)\,|x_s|^{m-1},$$

که نشان می‌دهد

$$\left(|\lambda-\mu_t|-N_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right)|x_t| \leq r_t^{\overline{\Omega_t}}(\mathcal{A})\,|x_s|\,. \tag{۲.۳}$$

اگر $|x_s| = ۰$ آنگاه طبق رابطه (۲.۳) داریم $\left(|\lambda-\mu_t|-N_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right) \leq ۰$. هنگامی‌که

$$\left(|\lambda-\mu_s|-N_s^{t}(\mathcal{A},\mu_s)\right) \geq ۰$$

بدست می‌آوریم

$$\left(|\lambda-\mu_t|-N_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right)\left(|\lambda-\mu_s|-N_s^{t}(\mathcal{A},\mu_s)\right) \leq ۰ \leq r_t^{\overline{\Omega_t}}(\mathcal{A},\mu_t)\,|a_{st\ldots t}|,$$

که برای یک s دلخواه نشان می‌دهد $\lambda \in \bigcap_{s\in[n],t\neq s} \mathcal{X}_{t,s}(\mathcal{A},\mu) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A},\mu)$. اگر برای یک s دلخواه

$$\left(|\lambda-\mu_s|-N_s^{t}(\mathcal{A},\mu_s)\right) < ۰$$

آنگاه $\lambda \in \bigcap_{s\in[n],t\neq s} \mathcal{Y}_{t,s}(\mathcal{A},\mu) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A},\mu)$. حال اگر $|x_s| > ۰$ آنگاه طبق رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
|\lambda-\mu_s|\,|x_s| \quad &\leq |a_{st\ldots t}|\,|x_t^{m-۱}| + \sum_{\substack{i_۲,\ldots,i_m\in[n]\\ \delta_{ti_۲\ldots i_m}=۰}} \left|a_{si_۲\ldots i_m}-\mu_s e_{si_۲\ldots i_m}\right| \left|x_{i_۲}\right| \ldots \left|x_{i_m}\right| \\
&\leq |a_{st\ldots t}|\,|x_t| + \left(\frac{۱}{(m-۲)^{\frac{m-۲}{۲}}} r_s^{t\,\Lambda_s\cap\Delta}(\mathcal{A}) + r_s^{t\,\Lambda_s\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A})\right)|x_s| \\
&+ \left(\frac{۱}{(m-۲)^{\frac{m-۲}{۲}}} r_s^{t\,\overline{\Lambda_s}\cap\Delta}(\mathcal{A}) + r_s^{t\,\overline{\Lambda_s}\cap\overline{\Delta}}(\mathcal{A})\right)|x_s|
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد

$$\left(|\lambda-\mu_s|-N_s^{t}(\mathcal{A},\mu_s)\right)|x_s| \leq |a_{st\ldots t}||x_t|. \tag{۳.۳}$$

هنگامی‌که $\left(|\lambda-\mu_t|-N_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right)\geq ۰$ یا $(|\lambda-\mu_s|-N_s^t(\mathcal{A},\mu_s))\geq ۰$ ، ضرب (۲.۳) و (۳.۳) بدست می‌دهد

$$\left(|\lambda-\mu_t|-N_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right)\left(|\lambda-\mu_s|-N_s^t(\mathcal{A},\mu_s)\right)\leq r_t^{\overline{\Omega_t}}(\mathcal{A},\mu_t)\,|a_{st\dots t}|$$

که برای یک s دلخواه نشان می‌دهد $\lambda\in\bigcap_{s\in[n],t\neq s}\mathcal{X}_{t,s}(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

اما هنگامی‌که $\left(|\lambda-\mu_t|-M_t^{\Omega_t}(\mathcal{A},\mu_t)\right)<۰$ و $(|\lambda-\mu_s|-M_s^t(\mathcal{A},\mu_s))<۰$ آنگاه برای یک s دلخواه $\lambda\in\bigcap_{s\in[n],t\neq s}\mathcal{Y}_{t,s}(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{D}(\mathcal{A})$. بنابراین، اثبات کامل می‌شود. □

در ادامه با یک مثال نشان می‌دهیم که مجموعه‌های معرفی شده در قضایای ۲.۳و ۷.۳ بهتر از نتایج در [۷، ۸، ۱۴، ۱۷، ۲۵، ۲۶، ۳۰، ۳۳، ۳۴، ۳۶، ۳۹، ۴۰] هستند.

مثال ۸.۳. اگر $\mathcal{A}=\left(a_{ijkl}\right)\in\mathbb{R}^{[۴,۲]}$ یک تانسور متقارن ضعیف با درایه‌های تعریف شده در زیر باشد.

$$a_{۱۱۱۱}=۷\quad a_{۲۲۲۲}=۴,\quad a_{۱۲۱۱}=a_{۱۱۲۲}=۳,\quad a_{۲۱۱۱}=a_{۲۲۱۱}=a_{۲۱۲۱}=a_{۲۱۱۲}=۱$$
$$a_{۱۱۲۱}=a_{۱۲۲۱}=a_{۱۱۱۲}=a_{۱۲۱۲}=a_{۲۲۱۲}=۰,\quad a_{۱۲۲۲}=۶,\quad a_{۲۱۲۲}=۵,\quad a_{۲۲۲۱}=۱۳.$$

با محاسبه، داریم

$$(\rho_Z(\mathcal{A}),x)=\left(۱۲/۰۹۹۵;(۰/۵۴۲۶;۰/۸۴۰۰)^T\right).$$

فرض کنید $\mu_۱=a_{۱۱۱۱}=۷$ و $\mu_۲=a_{۲۲۲۲}=۴$.

هنگامی‌که $i_۱=۱$، داریم:

$$\Lambda_۱\cap\Delta=\{(i_۲,i_۳,i_۴)\ :\ (۱,۲,۲),(۲,۱,۲),(۲,۲,۱)\}=\Lambda_۱\cap\Delta\cap\Omega_۱,$$
$$\Lambda_۱\cap\overline{\Delta}=\{(i_۲,i_۳,i_۴)\ :\ (۱,۱,۱)\}=\Lambda_۱\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_۱,$$
$$\overline{\Lambda_۱}\cap\Delta=\{(i_۲,i_۳,i_۴)\ :\ (۱,۱,۲),(۲,۱,۱),(۱,۲,۱)\}=\overline{\Lambda_۱}\cap\Delta\cap\Omega_۱,$$
$$\overline{\Lambda_۱}\cap\overline{\Delta}=\{(i_۲,i_۳,i_۴)\ :\ (۲,۲,۲)\},\qquad\overline{\Lambda_۱}\cap\overline{\Delta}\cap\Omega_۱=\emptyset,$$

که نشان می‌دهد $r_۱^{\overline{\Omega_۱}}(\mathcal{A})=۶,\ N_۱^{\Omega_۱}(\mathcal{A},\mu_۱)=N_۱^۲(\mathcal{A},\mu_۱)=\frac{۲۵}{۶},\ N_۱(\mathcal{A})=۱۶$.

هنگامی‌که ۲ $= i_1$، داریم:

$$\Lambda_2 \cap \Delta = \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,2,1), (2,1,1), (1,1,2)\} = \Lambda_2 \cap \Delta \cap \Omega_2,$$
$$\Lambda_2 \cap \overline{\Delta} = \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (2,2,2)\} = \overline{\Lambda_2} \cap \Delta \cap \Omega_2,$$
$$\overline{\Lambda_2} \cap \Delta = \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (2,1,2), (2,2,1), (1,2,2)\} = \overline{\Lambda_2} \cap \Delta \cap \Omega_2,$$
$$\overline{\Lambda_2} \cap \overline{\Delta} = \{(i_2, i_3, i_4) \ : \ (1,1,1)\}, \qquad \overline{\Lambda_2} \cap \overline{\Delta} \cap \Omega_2 = \emptyset,$$

که نشان می‌دهد $r_2^{\overline{\Omega_2}}(\mathcal{A}) = 1$, $N_2^{\Omega_2}(\mathcal{A}) = N_2^1(\mathcal{A}) = \frac{19}{2}$, $N_2(\mathcal{A}) = \frac{31}{2}$.

نتایج عددی بدست آمده از نتیجه‌ی ۳.۳، قضیه ۷.۳ و کران‌های متناظر از مراجع [۷، ۸، ۱۴، ۱۷، ۲۵، ۲۶، ۳۰، ۳۳، ۳۴، ۳۶، ۳۹، ۴۰] در جدول ۲ نمایش داده شده‌اند. از جدول ۲، مشاهده می‌شود که کران بدست آمده از نتیجه‌ی ۳.۳ و قضیه ۷.۳ نسبت به سایر کران‌ها بهتر است.

جدول ۲: کران‌های بالای Zـشعاع طیفی تانسور $\mathcal{A}$، مثال ۸.۳

نتیجه ۵.۴ [۳۰]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 26/0000$
قضیه ۳.۳ [۱۴]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/7771$
قضیه ۴.۳ [۴۰]، به‌طوری‌که $S = \{1\}$, $\overline{S} = \{2\}$	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/7382$
قضیه ۵.۴ [۳۴]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/7382$
قضیه۵.۳ [۷]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/6437$
قضیه ۶ [۸]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/6437$
قضیه ۴ [۳۳]، به‌طوری‌که $S = \{1\}$, $\overline{S} = \{2\}$	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/6437$
قضیه ۷ [۲۵]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/4807$
قضیه ۷ [۳۶]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 25/4907$
قضیه ۹.۲ [۱۷]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 23/8617$
قضیه ۵ [۳۹]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 22/5426$
قضیه ۱.۳ [۲۶]	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 21/8172$
نتیجه ۳.۳	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 16/0000$
قضیه ۷.۳	$\rho_Z(\mathcal{A}) \leq 15/0465$

۴. کاربرد

در ابتدای این بخش، برخی از شرایط کافی برای معین مثبت بودن و نیمه معین مثبت بودن تانسورها بیان می‌شود. در ادامه برای یک سیستم چندجمله‌ای زمان–پایا با تانسورها، پایداری سیستم غیر خطی با استفاده از معین مثبت بودن بررسی می‌شود.

۴.۱. *تانسورهای (نیمه) معین مثبت*

تابع چند جمله‌ای همگن $f(x)$ از درجه m را می توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \mathcal{A}x^m = x^T(\mathcal{A}x^{m-1}) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \tag{۴.۱}$$

به‌طوری‌که $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور متقارن و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک بردار باشد [۵].

تعریف ۴.۱. [۵] اگر برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f(x) > 0$، در اینصورت $f(x)$ معین مثبت نامیده می‌شود. تانسور $\mathcal{A}$ را معین مثبت گویند هرگاه $f(x)$ معین مثبت باشد.

به همین ترتیب، اگر برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$، در اینصورت $f(x)$ نیمه معین مثبت نامیده می‌شود. تانسور $\mathcal{A}$ نیمه معین مثبت است هرگاه $f(x)$ نیمه معین مثبت باشد.

معین مثبت بودن تانسورها نقش مهمی در مطالعه‌ی پایداری سیستم‌های غیر خطی ایفا می‌کند. در [۲۰] ثابت شده است که تانسورهای متقارن حقیقی مرتبه زوج معین مثبت (نیمه معین مثبت) هستند اگر و تنها اگر همه Z–مقادیر ویژه‌ی آن مثبت (نامنفی) باشند. همچنین در [۲۳] نشان داده شده است که هیچ تانسور (نیمه) معین مثبت از مرتبه فرد غیر صفر وجود ندارد. لی و همکارانش [۱۵] با استفاده از مجموعه‌های شامل Z–مقدار ویژه از نوع گرشگورین، قضیه زیر را برای بررسی معین مثبت بودن سیستم‌های چندجمله‌ای تعریف شده در (۴.۱) را پیشنهاد کردند.

قضیه ۴.۲. *[۱۵] فرض کنید $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور از مرتبه‌ی زوج $m \geq 4$ باشد. اگر یک بردار مثبت $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $i \in [n]$ داشته باشیم $\mu_i > R_i(\mathcal{A}, \mu_i)$، آنگاه $\mathcal{A}$ معین مثبت است و به همین ترتیب $f(x)$ تعریف شده در (۴.۱) معین مثبت است.*

بر اساس ویژگی تانسورهای متقارن ضعیف ارائه شده در [۲۹]، نتیجه زیر بدست آمد.

لم ۳.۴. *[۲۹] فرض کنید $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور متقارن ضعیف باشد. در اینصورت $f(x) = \mathcal{A}x^m$ معین مثبت است اگر و تنها اگر تمام Zـمقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشد.*

در ادامه، بر اساس مجموعه‌ی شامل Zـمقدار ویژه‌ی در قضیه های ۶.۳ و ۷.۳ شرایط کافی برای معین مثبت بودن تانسورهای متقارن ضعیف مرتبه‌ی زوج ارائه می‌شوند.

قضیه ۴.۴. *فرض کنید $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ یک تانسور متقارن ضعیف از مرتبه‌ی زوج $m \geq 4$ باشد. اگر یک بردار مثبت $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد آنگاه $\mathcal{A}$ معین مثبت (نیمه معین مثبت) است.*

(الف) $\mu_i > (\geq) N_i(\mathcal{A}, \mu_i)$, برای هر $i \in [n]$.

(ب) $\left(\mu_i - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i)\right)\left(\mu_j - N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right)\right) > (\geq) r_i^{\overline{\Omega_i}}(\mathcal{A}, \mu_i)\,|a_{ji\dots i}|$ و $\mu_i > (\geq) N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i)$ و $\mu_j > (\geq) N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right)$ برای هر $i, j \in [n]$ که $i \neq j$.

اثبات. ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A}$ معین مثبت است، و به روشی مشابه می‌توان ثابت کرد که $\mathcal{A}$ نیمه‌معین مثبت است.

اثبات قسمت (الف) : با برهان خلف فرض کنید $\lambda \leq 0$. از قضیه‌ی ۶.۳ داریم $\lambda \in \Phi(\mathcal{A}, \mu)$، پس یک اندیس $i_0 \in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda \in \Phi_{i_0}(\mathcal{A}, \mu)$، به عبارتی

$$\left|\lambda - \mu_{i_0}\right| \leq N_i(\mathcal{A}, \mu_{i_0}).$$

از طرف دیگر، چون $\mu_{i_0} > 0$ و طبق فرض خلف، $\lambda < 0$، پس نتیجه می‌شود

$$\left|\lambda - \mu_{i_0}\right| \geq \mu_{i_0} > N_i(\mathcal{A}, \mu_{i_0}).$$

این با قسمت (الف) فرض در تناقض است، بنابراین $\lambda > 0$. با توجه به اینکه تمام Zـمقادیر ویژه‌ی تانسور مرتبه زوج متقارن ضعیف، مثبت هستند، پس طبق لم ۳.۴ تانسور $\mathcal{A}$ معین مثبت است.

اثبات قسمت (ب) : فرض کنید $\lambda \leq 0$ (برهان خلف). از قضیه‌ی ۷.۳ داریم $\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mu)$. اکنون، دو حالت زیر را داریم:

حالت اول) اندیس‌های $i_\cdot, j_\cdot \in N$ با $i_\cdot \neq j_\cdot$ وجود دارند به‌طوری‌که $\lambda \in \mathcal{X}_{i_\cdot, j_\cdot}(\mathcal{A}, \mu)$، به عبارتی

$$\left(|\lambda - \mu_i| - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i)\right)\left(\left|\lambda - \mu_j\right| - N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right)\right) \leq r_i^{\overline{\Omega_i}}(\mathcal{A}, \mu_i)\,|a_{ji\dots i}|$$

از طرف دیگر، چون $\mu_{i_\cdot}, \mu_{j_\cdot} > ۰$ و طبق فرض خلف، $\lambda < ۰$، نتیجه می‌شود

$$\left(\mu_i - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i)\right)\left(\mu_j - N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right)\right) \geq r_i^{\overline{\Omega_i}}(\mathcal{A}, \mu_i)\,|a_{ji\dots i}|.$$

این با قسمت (ب) فرض در تناقض است. بنابراین $\lambda > ۰$.

حالت دوم) اندیس‌های $i_\cdot, j_\cdot \in N$ با $i_\cdot \neq j_\cdot$ وجود دارند به‌طوری‌که $\lambda \in \mathcal{Y}_{i_\cdot, j_\cdot}(\mathcal{A}, \mu)$، به عبارتی

$$\left(|\lambda - \mu_i| - N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i)\right) < ۰ \quad \text{و} \quad \left(\left|\lambda - \mu_j\right| - N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right)\right) < ۰.$$

از طرف دیگر چون $\mu_{i_\cdot}, \mu_{j_\cdot} > ۰$ ، طبق فرض خلف $\lambda < ۰$، لذا نتیجه می‌شود

$$\mu_i \geq N_i^{\Omega_i}(\mathcal{A}, \mu_i) \qquad \text{و} \qquad \mu_j \geq N_j^i\left(\mathcal{A}, \mu_j\right).$$

و این با قسمت (ب) فرض در تناقض است. بنابراین $\lambda > ۰$. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

برای نشان دادن کارایی قضیه‌ی ۴.۴، مثال زیر ارائه می‌شود.

مثال ۵.۴. فرض کنید $\mathcal{A} = \left(a_{ijkl}\right) \in \mathbb{R}^{[۴,۲]}$ یک تانسور متقارن ضعیف با درایه‌های تعریف شده در زیر باشد.

$$a_{۱۱۱۱} = ۶,\quad a_{۱۲۱۱} = ۳,\quad a_{۱۲۲۱} = a_{۱۲۱۲} = ۱,\quad a_{۱۱۲۱} = a_{۱۱۱۲} = ۰,\quad a_{۱۱۲۲} = ۴,\quad a_{۱۲۲۲} = \frac{۲}{۳};$$

$$a_{۲۱۱۱} = a_{۲۱۱۲} = a_{۲۱۲۱} = ۱,\quad a_{۲۲۱۱} = ۴,\quad a_{۲۲۲۱} = a_{۲۱۲۲} = ۰,\quad a_{۲۲۱۲} = ۲,\quad a_{۲۲۲۲} = ۶.$$

با محاسبات، کوچکترین Zـمقدار ویژه برابر با ۴/۹۴۷۹ است که نشان می‌دهد تانسور $\mathcal{A}$ معین مثبت است. اگر تانسور Zـهمانی $\mathcal{I}_Z$ را در هر دو حالت (الف) و (ب) در تعریف ۵.۲ درنظر بگیریم، آنگاه هیچ عدد حقیقی مثبت $\mu_۱$ وجود ندارد

که

$$\mu_1 > r_1(\mathcal{A}, \mu_1).$$

این نشان می‌دهد که شرایط قضیه ۲.۳ [۱۵] برقرار نیستند و درنتیجه معین مثبت بودن تانسور متقارن ضعیف $\mathcal{A}$ را بدست نمی‌دهند. اما با قرار دادن $\mu = (6, 6)^T$ در قسمت (الف) قضیه ۴.۴، داریم:

$$\mu_1 = 6 > 4/1667 = N_1(\mathcal{A}, \mu_1) \quad \text{و} \quad \mu_2 = 6 > 4 = N_2(\mathcal{A}, \mu_2),$$

که نشان می‌دهد تانسور $\mathcal{A}$ در شرایط قسمت (الف) قضیه‌ی ۴.۴ صدق می‌کند، پس $\mathcal{A}$ معین مثبت می‌باشد. درضمن شرایط قسمت (ب) قضیه‌ی ۴.۴ نیز برقرار است و اثبات آن مشابه قسمت (الف) می‌باشد.

۲.۴. *پایداری سیستم‌های چند جمله‌ای زمان‐پایا*

هر سیستم چندجمله‌ای زمان‐پایا را می‌توان به صورت زیر نوشت [۵].

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_2}x_{i_2} + \sum_{i_2,i_3=1}^{n} a_{1i_2i_3}x_{i_2}x_{i_3} + \cdots + \sum_{i_2,i_3,\ldots,i_m=1}^{n} a_{1i_2i_3\ldots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\ldots x_{i_m},\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= \sum_{i_2=1}^{n} a_{ni_2}x_{i_2} + \sum_{i_2,i_3=1}^{n} a_{ni_2i_3}x_{i_2}x_{i_3} + \cdots + \sum_{i_2,i_3,\ldots,i_m=1}^{n} a_{ni_2i_3\ldots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\ldots x_{i_m}.
\end{aligned}$$

که در آن $a_{i_1i_2\ldots i_m} \in \mathbb{R}$ تحت هر جایگشتی روی اندیس‌ها پایاست. در ادامه، سیستم چند جمله‌ای زمان‐پایا فوق با استفاده از تانسورها به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\dot{x} = \mathcal{A}^{(2)}x + \mathcal{A}^{(4)}x^3 + \cdots + \mathcal{A}^{(m)}x^{m-1}, \tag{۲.۴}$$

به‌طوری‌که $\mathcal{A}^{(t)} = (a_{i_1i_2\ldots i_t}) \in \mathbb{R}^{[t,n]}$ با $t = 2, 4, \ldots, m$ و $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ [۵]. در قضیه زیر، یک شرط کافی برای پایداری مجانبی سیستم غیر خطی (۲.۴) برای m های زوج ارائه شده است.

قضیه ۶.۴. *[۵، قضیه ۳.۳] برای سیستم غیرخطی معرفی شده در (۲.۴) هرگاه $\mathcal{A}^{(t)}-$ با $t = ۲, ۴, \dots, ۲k$ معین مثبت باشد، آنگاه نقطه‌ی تعادل آن به‌طور مجانبی پایدار است.*

با قضیه‌ی ۴.۴ و قضیه‌ی ۶.۴، می‌توان یک شرط کافی برای بررسی پایداری مجانبی سیستم (۲.۴) ارائه کرد.

نتیجه ۷.۴. *برای سیستم غیرخطی معرفی شده در (۲.۴) هرگاه تانسور $\mathcal{A}^{(t)}-$ با $t = ۲, ۴, \dots, ۲k$ در شرایط قضیه‌ی ۴.۴ صدق کند، آنگاه نقطه‌ی تعادل آن به طور مجانبی پایدار است.*

مثال ۸.۴. سیستم چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_۱ &= -۴x_۱ + ۱/۵x_۲ + ۱/۵x_۳ - ۱/۴x_۱^۳ + ۰/۳x_۱^۲x_۲ - ۳/۱۵x_۱x_۳^۲ - ۲/۵۵x_۱x_۲^۲ + ۰/۳x_۲x_۳^۲ + ۰/۱x_۲^۳ - ۰/۱x_۳^۳,\\
\dot{x}_۲ &= ۱/۵x_۱ - ۵x_۲ + ۲x_۳ + ۰/۱x_۱^۳ - ۳/۲x_۲^۳ - ۰/۳x_۲^۲x_۳ - ۰/۳x_۲x_۳^۲ - ۲/۵۵x_۱^۲x_۲ + ۰/۳x_۱x_۳^۲ + ۰/۳x_۱x_۲^۲,\\
\dot{x}_۳ &= ۱/۵x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ - ۰/۱x_۲^۳ - ۲/۶x_۳^۳ - ۳/۱۵x_۱^۲x_۳ - ۳x_۲^۲x_۳ + ۰/۶x_۱x_۲x_۳ - ۰/۳x_۱x_۳^۲.
\end{aligned}$$

دراینصورت دستگاه فوق می‌تواند به صورت $\dot{x} = \mathcal{A}^{(۲)}x + \mathcal{A}^{(۴)}x^۳$ نوشته شود، به‌طوری‌که در آن $x = (x_۱, x_۲, x_۳)^T$ و

$$\mathcal{A}^{(۲)} = \begin{bmatrix} -۴ & ۱/۵ & ۱/۵ \\ ۱/۵ & -۵ & ۲ \\ ۱/۵ & ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

و $\mathcal{A}^{(۴)} = (a_{ijkl}) \in \mathbb{R}^{[۴,۳]}$ با درایه‌های زیر می‌باشد:

$$a_{۱۱۱۱} = -۱/۴;\quad a_{۲۲۲۲} = -۳/۲;\quad a_{۳۳۳۳} = -۲/۶;$$
$$a_{۱۱۱۲} = a_{۱۱۲۱} = a_{۱۲۱۱} = a_{۱۲۲۲} = a_{۲۱۱۱} = a_{۲۱۲۲} = a_{۲۲۱۲} = a_{۲۲۲۱} = ۰/۱;$$
$$a_{۱۱۲۲} = a_{۱۲۱۲} = a_{۱۲۲۱} = a_{۲۱۱۲} = a_{۲۱۲۱} = a_{۲۲۱۱} = -۰/۸۵;$$
$$a_{۱۱۳۳} = a_{۱۳۱۳} = a_{۱۳۳۱} = a_{۳۱۱۳} = a_{۳۱۳۱} = a_{۳۳۱۱} = -۱/۰۵;$$
$$a_{۱۲۳۳} = a_{۱۳۲۳} = a_{۱۳۳۲} = a_{۲۱۳۳} = a_{۲۳۱۳} = a_{۲۳۳۱} = ۰/۱;$$
$$a_{۳۱۲۳} = a_{۳۱۳۲} = a_{۳۲۱۳} = a_{۳۲۳۱} = a_{۳۳۱۲} = a_{۳۳۲۱} = ۰/۱;$$
$$a_{۲۲۲۳} = a_{۲۲۳۲} = a_{۲۳۲۲} = a_{۳۲۲۲} = a_{۱۳۳۳} = a_{۳۱۳۳} = a_{۳۳۱۳} = a_{۳۳۳۱} = -۰/۱;$$
$$a_{۲۲۳۳} = a_{۲۳۲۳} = a_{۲۳۳۲} = a_{۳۲۲۳} = a_{۳۲۳۲} = a_{۳۳۲۲} = -۱/۰;$$
$$a_{ijkl} = ۰ \qquad o.w.$$

تانسور $\mathcal{A}^{(۲)}-$ معین مثبت است. اگر تانسور Zـ همانی $\mathcal{I}_Z$ را در هر دو حالت (الف) و (ب) در تعریف ۵.۲ درنظر بگیریم، آنگاه هیچ عدد حقیقی مثبت $\mu_۱$ وجود ندارد که

$$\mu_۱ > r_۱(-\mathcal{A}^{(۴)}, \mu_۱).$$

این نشان می‌دهد که شرایط [۱۵، قضیه ۲.۳] برقرار نیست و درنتیجه معین مثبت بودن تانسور متقارن $\mathcal{A}^{(۴)}-$ و به تبع آن پایداری مجانبی سیستم‌های چندجمله‌ای فوق را نتیجه نمی‌دهند.

برای تانسور متقارن $\mathcal{A}^{(۴)}$، با قرار دادن $\mu = (۲/۸۵, ۳/۰, ۲/۷)^T$ و تانسور Zـهمانی $\mathcal{I}_۲$ با درایه‌های

$$\begin{aligned}
&e_{۱۱۱۱} = e_{۲۲۲۲} = e_{۳۳۳۳} = ۱;\\
&e_{۱۱۲۲} = e_{۱۲۱۲} = e_{۱۲۲۱} = e_{۲۱۱۲} = e_{۲۱۲۱} = e_{۲۲۱۱} = \frac{۱}{۳};\\
&e_{۱۱۳۳} = e_{۱۳۱۳} = e_{۱۳۳۱} = e_{۳۱۱۳} = e_{۳۱۳۱} = e_{۳۳۱۱} = \frac{۱}{۳};\\
&e_{۲۲۳۳} = e_{۲۳۲۳} = e_{۲۳۳۲} = e_{۳۲۲۳} = e_{۳۲۳۲} = e_{۳۳۲۲} = \frac{۱}{۳};\\
&e_{ijkl} = ۰ \qquad\qquad o.w.
\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\mu_۱ &= ۲/۸۵ > N_۱\left(-\mathcal{A}^{(۴)}, \mu_۱\right) = ۲/۲۵۰,\\
\mu_۲ &= ۳/۰۰ > N_۲\left(-\mathcal{A}^{(۴)}, \mu_۲\right) = ۲/۳۲۵,\\
\mu_۳ &= ۲/۷۵ > N_۳\left(-\mathcal{A}^{(۴)}, \mu_۳\right) = ۲/۰۷۵.
\end{aligned}$$

بنابراین، از قضیه‌ی ۴.۴ نتیجه می‌شود که $\mathcal{A}^{(۴)}-$ معین مثبت است و با نتیجه‌ی ۷.۴ نقطه‌ی تعادل سیستم به‌طور مجانبی پایدار است.

نتیجه‌گیری

در ابتدای این مقاله، مجموعه‌های شامل Zـمقدار ویژه‌ی تانسورهای مرتبه زوج توسط تانسور Zـهمانی بدست آورده شد. سپس شرایط کافی برای معین مثبت بودن تانسورهای متقارن ضعیف و همچنین پایداری مجانبی سیستم‌های چند جمله‌ای زمان‌ـپایا ارائه گردید. در انتها با چندین مثال کارایی نتایج بدست آمده نسبت به نتایج موجود نشان داده شد.

مراجع

[1] Afshin, H. R., and Shojaeifard, A. R., The Sign-Real Spectral Radius for Real Tensors. *Wavelet and Linear Algebra*,**5**(1) (2018), 73-87.

[2] Chang, K. C., Pearson, K. J., and Zhang, T. . Some variational principles for Z-eigenvalues of nonnegative tensors. *Linear Algebra and its Applications*,**438**(11)(2013), 4166-4182.

[3] Che, M., Cichocki, A., and Wei, Y..*Neural networks for computing best rank-one approximations of tensors and its applications*. Neurocomputing, **267** (2017), 114-133.

[4] De Lathauwer, L., De Moor, B., and Vandewalle, J.. On the best rank-1 and rank-$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ approximation of higher-order tensors. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*,**21**(4) (2000), 1324-1342.

[5] Deng, C., Li, H., and Bu, C.. Brauer-type eigenvalue inclusion sets of stochastic/irreducible tensors and positive definiteness of tensors. Linear Algebra and its Applications, (2018) 556, 55-69.

[6] Gershgorin, S. A. (1931). Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv.*Akad. Nauk SSSR Ser. Mat*,**1**, 749-754.

[7] He, J.. Bounds for the largest eigenvalue of nonnegative tensors.*J. Comput. Anal. Appl*,**20**(7) (2016), 1290-1301.

[8] He, J., Liu, Y. M., Ke, H., Tian, J. K., and Li, X.. Bounds for the Z-spectral radius of nonnegative tensors.*SpringerPlus*, **5**(1) (2016), 1-8.

[9] He, J., and Huang, T. Z.. Upper bound for the largest Z-eigenvalue of positive tensors.*Applied Mathematics Letters*,**38** (2014), 110-114.

[10] He, J., Xu, G., and Liu, Y.. New Z-eigenvalue localization sets for tensors with applications.*Journal of Industrial and Management Optimization* (2021).

[11] Hillar, C. J., and Lim, L. H.. Most tensor problems are NP-hard.*Journal of the ACM (JACM)*,**60**(6) (2013), 1-39.

[12] Huang, Z., Wang, L., Xu, Z., and Cui, J.. Some new Z-eigenvalue localization sets for tensors and their applications.*Revista de la Unión Matemática Argentina*,**60**(1) (2019), 99-119.

[13] Kolda, T. G., and Mayo, J. R.. Shifted power method for computing tensor eigenpairs.*SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*,**32**(4) (2011), 1095-1124.

[14] Li, W., Liu, D., and Vong, S. W.. Z-eigenpair bounds for an irreducible nonnegative tensor.*Linear Algebra and its Applications*,**483** (2015),182-199.

[15] Li, C., Liu, Y., and Li, Y., Note on Z-eigenvalue inclusion theorems for tensors.*Journal of Industrial and Management Optimization*,**17**(2) (2021), 687.

[16] Li, G., Qi, L., and Yu, G., The Z-eigenvalues of a symmetric tensor and its application to spectral hypergraph theory. *Numerical Linear Algebra with Applications*,**20**(6) (2013), 1001-1029.

[17] Liu, Q., and Li, Y., Bounds for the Z-eigenpair of general nonnegative tensors. *Open Mathematics*, **14**(1) (2016), 181-194.

[18] Ng, M., Qi, L., and Zhou, G.. Finding the largest eigenvalue of a nonnegative tensor. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*,**31**(3) (2010), 1090-1099.

[19] Ni, Q., Qi, L. Q., and Wang, F., An eigenvalue method for the positive definiteness identification problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*,**53**(5) (2008), 1096-1107.

[20] Qi, L., Eigenvalues of a real supersymmetric tensor.*Journal of Symbolic Computation*,**40**(6). (2005), 1302-1324.

[21] Qi, L., Chen, H., and Chen, Y. . Tensor eigenvalues and their applications (Vol. 39). Singapore: Springer(2018).

[22] Qi, L., and Luo, Z., Tensor analysis: spectral theory and special tensors. Society for Industrial and Applied Mathematics, (2017).

[23] Qi, L., and Song, Y.. An even order symmetric B tensor is positive definite.*Linear Algebra and its Applications*,**457** , (2014), 303-312.

[24] Qi, L., Wang, F., and Wang, Y.. Z-eigenvalue methods for a global polynomial optimization problem.*Mathematical Programming*,**118**(2), 301-316.

[25] Sang, C.,A new Brauer-type Z-eigenvalue inclusion set for tensors.*Numerical Algorithms*,**80**(3), (2019), 781-794.

[26] Sang, C., and Zhao, J.. E-eigenvalue inclusion theorems for tensors.*Filomat*,**33**(12) (2019), 3883-3891.

[27] Sang, C., and Chen, Z., Optimal Z-eigenvalue inclusion intervals of tensors and their applications.*Journal of Industrial and Management Optimization* (2021).

[28] Schultz, T., and Seidel, H. P., Estimating crossing fibers: A tensor decomposition approach.*IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*,**14**(6), (2008) 1635-1642.

[29] Shen, F., Zhang, Y., and Wang, G.. Identifying the Positive Definiteness of Even-Order Weakly Symmetric Tensors via Z-Eigenvalue Inclusion Sets.*Symmetry*,**13**(7), (2021) 1239.

[30] Song, Y., and Qi, L.. Spectral properties of positively homogeneous operators induced by higher order tensors.*SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,***34**(4), (2013) 1581-1595.

[31] Sun, L., Wang, G., and Liu, L. (2021). Further study on Z-eigenvalue localization set and positive definiteness of fourth-order tensors. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences

Society, 44(1), 105-129.

[32] Varga, R. S. Geršgorin and his circles (Vol. 36). Springer Science and Business Medi, (2010).

[33] Wang, Y., and Wang, G. . Two S-type Z-eigenvalue inclusion sets for tensors. *Journal of Inequalities and Applications*,**2017**(1)(2017), 1-12.

[34] Wang, G., Zhou, G., and Caccetta, L. Z-eigenvalue inclusion theorems for tensors.*Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **22**(1), 187.

[35] Wei, Y., and Ding, W.. Theory and computation of tensors: multi-dimensional arrays. Academic Press, (2016).

[36] Xiong, L., and Liu, J. Z-eigenvalue inclusion theorem of tensors and the geometric measure of entanglement of multipartite pure states. *Computational and Applied Mathematics*, **39**(2). (2020), 1-11.

[37] Xiong, Liang, Jianzhou Liu, and Qi Qin. The geometric measure of entanglement of multipartite states and the Z-eigenvalue of tensors.*Quantum Information Processing***21**(3) (2022), 1-17.

[38] Xiong, Liang, Zhanfeng Jiang, Jianzhou Liu, and Qi Qin. New Z-eigenvalue localization set for tensor and its application in entanglement of multipartite quantum states.*Mathematics***10**(15) (2022), 2624.

[39] Zhao, J. A new Z-eigenvalue localization set for tensors.*Journal of Inequalities and Applications*,**2017**(1) (2017), 1-9.

[40] Zhao, J., and Sang, C.. Two new eigenvalue localization sets for tensors and theirs applications.*Open Mathematics*, **15**(1) (2017), 1267-1276.