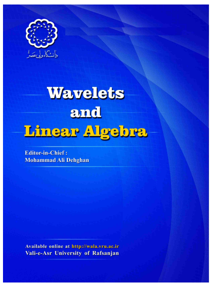
موجک‌ها و جبرخطی ۱۱(۳) (۱۴۰۳) ۱۱۱-۱۳۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

بررسی زیرمدول‌های Sـاول از مدول‌های آزاد با تولید متناهی روی دامنه‌های یکتایی تجزیه

سمیه کریم‌زاده[آ]*، زهرا پورشفیعی[ب]

[آ]ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، کرمان، ایران
[ب]دانشکده ریاضی و کامپیوتر، مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده:۹ تیر ۱۴۰۲
پذیرفته شده:۲۲ مهر ۱۴۰۲
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

زیرمدول Sـاول، دامنه یکتایی تجزیه، ماتریس.

چکیده

در این مقاله، زیرمدول‌های Sـاول از Rـمدول آزاد R^n که با ماتریس $A_{m\times n}$ تولید می‌شوند بررسی شده و شرایط معادل Sـاول بودن آن‌ها با توجه به ماتریس $A_{m\times n}$ مشخص شده است. در انتها، rad_s یک زیرمدول معرفی و rad_s یک زیرمدول دوری از مدول آزاد R^n، و همچنین rad_s زیرمدول تولید شده توسط ماتریس $A_{۲\times ۲}$ از مدول آزاد $F = R \oplus R$ روی یک دامنه ایده‌آل اصلی R مشخص شده است.

۱. مقدمه

در سرتاسر این مقاله تمام حلقه‌ها یکدار و جابجایی و مدول‌ها یکانی هستند. مفهوم ایده‌آل اول به روش‌های زیادی تعمیم یافته است. یکی از تعمیم‌های مفهوم ایده آل اول، ایده‌آل Sـاول می‌باشند که توسط حامد و مالک در [۱]، معرفی و خواص

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: Karimzadeh@vru.ac.ir (سمیه کریم‌زاده)، zhpoorshafiee@gmail.com (زهرا پورشفیعی)
http://doi.org/10.22072/WALA.2023.2005958.1426

آن بررسی شده است، که در ادامه تعریف ایده‌آل Sـاول را بیان می‌کنیم:

فرض کنیم R حلقه جابجایی، $S \subset R$ یک زیرمجموعه بسته ضربی و I ایده‌آلی از R باشد که $I \cap S = \emptyset$. در این صورت I را Sـاول گوییم، هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I$، آنگاه $sa \in I$ یا $sb \in I$. در این حالت گوییم s برای I کار می‌کند.

می‌دانیم زیرمدول‌های اول، تعمیم ایده‌آل‌های اول در مدول‌ها می‌باشند، همچنین، زیرمدول‌های اول برای مشخص کردن کلاس‌هایی از مدول‌ها استفاده می‌شوند. حال مفهوم زیر مدول اول را بیان می‌کنیم:

زیرمدول سره N از Rـمدول M را اول گوییم، هرگاه به‌ازای هر $a \in R$ و $m \in M$ که $am \in N$ نتیجه دهد $m \in N$ یا $a \in (N :_R M)$ (برای مشاهده جزییات بیشتر به [۴] مراجعه شود).

رادیکال یک زیرمدول برای اولین بار توسط مکسلاند در [۵]، تعریف شده است:

رادیکال زیرمدول N از Rـمدول M که با $rad(N)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از اشتراک تمام زیرمدول‌های اول از M که شامل N می‌باشند. هرگاه مجموعه زیرمدول‌های اول شامل N تهی باشد، آنگاه $rad(N) = M$.

اخیرا، هدایت و نکویی در [۲]، رادیکال بعضی از زیرمدول‌های یک مدول آزاد روی دامنه ایده‌آل اصلی را مشخص کرده‌اند.

مشابه ایده‌آل‌های Sـاول، سویم و همکارانش [۶]، زیرمدول‌های Sـاول را به عنوان تعمیمی از زیرمدول‌های اول معرفی کرده و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. در زیر تعریف زیرمدول Sـاول بیان می‌شود:

فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و N زیرمدول سره از Rـمدول M باشد که $(N :_R M) \cap S = \emptyset$. در این صورت N یک زیرمدول Sـاول از Rـمدول M گوییم، هرگاه $s \in S$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in N$ نتیجه شود $sr \in (N :_R M)$ یا $sm \in N$. در این حالت می‌گوییم s برای N کار می‌کند.

فرض کنیم m, n دو عدد طبیعی باشند و $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ روی R باشد.

زیرمدول N از Rـمدول آزاد $F = R^n$ که با سطرهای ماتریس A تولید شده باشد را با $\langle A \rangle$ و هر یک از عناصر N را با $(r_1, \dots, r_m)A$ که $r_i \in R$، نشان می‌دهیم. فرض کنیم B یک ماتریس $n \times n$ روی R باشد. $\acute{B}$ را ماتریس الحاقی B گوییم، هرگاه $B\acute{B} = \acute{B}B = (detB)I_n$ که I_n ماتریس همانی $n \times n$ می‌باشد [۲].

فرض کنیم $\{a_1, \dots, a_n\}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از حلقه جابجایی R باشد. $d \in R$ را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $\{a_1, \dots, a_n\}$ گوییم، هر گاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $d \mid a_i$، همچنین، اگر $c \in R$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $c \mid a_i$، آنگاه $c \mid d$. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $\{a_1, \dots, a_n\}$ را به صورت $d = (a_1, \dots, a_n)$ب.م.م نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک همواره وجود ندارد، همچنین، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک در صورت وجود یکتا نیست، در ضمن می‌دانیم هر دو بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $\{a_1, \dots, a_n\}$ شریک‌اند [۳].

در این مقاله، زیرمدول‌های Sـاول از یک مدول آزاد R^n روی دامنه یکتایی تجزیه(دامنه ایده‌آل اصلی) R که توسط ماتریس‌های $m \times n$ تولید می‌شوند مطالعه شده‌اند.

ابتدا، در قضیه ۹.۲، شرایط معادل اینکه زیرمدول تولید شده توسط ماتریس $A_{m\times n}$، یک زیرمدول Sـاول از Rـمدول آزاد R^n باشد مشخص شده است، که $A_{m\times n}$ یک ماتریس با رتبه m روی دامنه یکتای تجزیه R است.

سپس، در مثال ۱۰.۲، با استفاده از قضیه ۹.۲، در $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$، نشان داده‌ایم زیرمدول تولید شده توسط ماتریس $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$، زیرمدول Sـاول از F است و همچنین، زیرمدول تولید شده توسط ماتریس $\begin{pmatrix} ۵ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$، زیرمدول Sـاول از F نیست، که در آن‌ها $S = \mathbb{Z} \setminus ۳\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است.

در ادامه، در قضیه ۱۱.۲، زیرمدول N، تولید شده توسط ماتریس $A_{n\times n}$ که یک ماتریس از رتبه n روی دامنه یکتایی تجزیه R باشد درنظر گرفته شده و شرایط معادل اینکه N زیرمدول Sـاول از مدول آزاد R^n باشد مشخص شده است.

بعد، در مثال ۱۳.۲، سه زیرمدول از یک مدول آزاد آورده شده‌اند که با توجه به قضیه ۱۱.۲، زیرمدول Sـاول بودن آن‌ها بررسی شده است.

در نهایت، sـرادیکال زیرمدول N از Rـمدول M تعریف کرده‌ایم و آن را با $rad_s(N)$ نشان داده‌ایم. پس از آن، در قضایای ۱۶.۲ و ۱۹.۲، با به کاربردن قضایای ۹.۲ و ۱۱.۲، تحت شرایطی $rad_sR(a_۱, \dots, a_n)$ در مدول آزاد R^n و به‌علاوه $rad_s(N)$ برای زیرمدول N تولید شده توسط ماتریس $\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{pmatrix}$، در مدول آزاد $R \oplus R$، روی دامنه ایده‌آل اصلی R مشخص شده‌اند.

۲. زیرمدول‌های Sـ اول

ابتدا تعریف زیرمدول Sـ اول را می‌آوریم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و N زیرمدول سره از Rـ مدول M باشد که $(N :_R M) \cap S = \emptyset$. N زیرمدول Sـ اول از Rـ مدول M گوییم اگر $s \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in N$ داشته باشیم $sr \in (N :_R M)$ یا $sm \in N$. در این حالت می‌گوییم s برای N کار می‌کند.

گزاره ۲.۲. *[۶] فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R، $s \in S$ و M یک Rـ مدول باشد. اگر N زیرمدول Sـ اول از M و s برای N کار کند، آن‌گاه $(N :_R M)$ یک ایده‌آل Sـ اول از R می‌باشد که s برای آن کار می‌کند.*

لم ۳.۲. *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و N یک زیرمدول اول از Rـ مدول M باشد به‌طوری‌که $(N :_R M) \cap S = \emptyset$. در این صورت N زیرمدول Sـ اول است.*

در مثال بعد یک زیرمدول Sـ اول ارایه می‌شود که زیرمدول اول نیست.

مثال ۴.۲. $M := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۳ \oplus \mathbb{Z}_۵$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $s = ۱۵$ و

$$S = \{۳^j ۵^k | j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{۱\}.$$

نشان می‌دهیم $N = ۰ \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus ۰ \oplus ۰$ یک زیرمدول Sـ اول است. فرض کنیم $k \in \mathbb{Z}$، $m = (a/b, \bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \bar{a}_۳) \in M$ و $km \in N$. اگر $sk \notin (N :_{\mathbb{Z}} M) = ۰$، آن‌گاه $a/b = ۰$. درنتیجه $sm = (۰, s\bar{a}_۱, ۰, ۰) \in N$. ازاین‌رو N یک زیرمدول Sـ اول است. به آسانی دیده می‌شود که N زیرمدول اول نیست.

در ادامه چند نکته در مورد زیرمدول‌های تولید شده توسط ماتریس $A_{m\times n}$ از مرجع [۲] آورده شده است.

لم ۵.۲. *[۲] فرض کنیم $A \in Mat_{n\times n}(R)$، $detA \neq ۰$، $x_۱, \ldots, x_n \in R$ و $\acute{A} = (\acute{a}_{ij})$ ماتریس الحاقی A باشد. $(x_۱, \ldots, x_n) \in \langle A\rangle$ اگروفقط‌اگر برای هر $۱ \leq i, j \leq n$ داشته باشیم $detA \mid \Sigma_{i=۱}^{n} x_i\acute{a}_{ij}$.*

لم ۶.۲. *[۲] فرض کنیم $A \in M_{m\times n}(R)$ و $rankA = m$. در این صورت هر ستون ناصفر A در یک زیرماتریس $m \times m$ از A مانند B قرار می‌گیرد که $detB \neq ۰$.*

نتیجه ۷.۲. *[۲] اگر $A \in Mat_{n\times n}(R)$، آن‌گاه $detA \in (\langle A\rangle :_R R^n)$.*

لم ۸.۲. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح، $F = R^n$، $A \in M_{m\times n}(R)$ و $m < n$. اگر $rankA = m$ و $N = \langle A\rangle$، آن‌گاه $(N :_R F) = ۰$.*

اثبات. فرض کنیم $r \in (N :_R F)$، B زیرماتریس $m \times m$ از A باشد که $det(B) \neq ۰$ و $j_۱, \dots, j_m$ ستون‌هایی از A باشند که B را تشکیل داده‌اند. $j \in \{۱, \dots, n\} \setminus \{j_۱, \dots, j_m\}$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی‌که $rF \subseteq N$، پس $(۰, \dots, ۰, \underbrace{r}_{j-th}, ۰, \dots, ۰) \in N$. ازاین‌رو $r_۱, \dots, r_m \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$(r_۱, \dots, r_m)A = (۰, \dots, ۰, \underbrace{r}_{j-th}, ۰, \dots, ۰).$$

چون $(r_۱, \dots, r_m)B = (۰, \dots, ۰)$، لذا برای هر $۱ \leq i \leq m$، $r_i detB = ۰$. درنتیجه برای هر $۱ \leq i \leq m$، $r_i = ۰$، بنابراین $r = ۰$. □

در قضیه بعد شرایط معادل اینکه $N = \langle A_{m\times n}\rangle$ ، $m < n$، یک زیرمدول Sـاول از R^n روی دامنه یکتایی تجزیه R باشد مشخص شده است.

قضیه ۹.۲. *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از دامنه یکتایی تجزیه R و $F = R^n$. همچنین فرض کنیم $A \in M_{m\times n}(R)$، $m < n$، $rankA = m$، $N = \langle A\rangle$ و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دترمینان تمام زیرماتریس‌های $m \times m$ از A باشد. N یک زیرمدول Sـاول است اگروتنهااگر $s \in S$ وجود داشته باشد که $(d, s) = d$ب.م.م.*

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم N یک زیرمدول Sـاول و $s \in S$ برای N کار کند. B زیر ماتریس $m \times m$ از A را درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که $detB \neq ۰$ و B از ستون‌های $j_۱ < j_۲ < \cdots < j_m$، A تشکیل شده باشد. برای $۱ \leq i \leq m$ قرار می‌دهیم

$$(x_۱, \dots, x_n) = (\acute{b}_{i۱}, \acute{b}_{i۲}, \dots, \acute{b}_{im})A.$$

از آنجایی که $\acute{B}B = (detB)I_m$، لذا برای هر $۱ \leq k \leq m$ که $k \neq i$، $x_{j_i} = detB$ و $x_{j_k} = ۰$.

فرض کنیم برای $j \in \{۱, \dots, n\} \setminus \{j_۱, j_۲, \dots, j_m\}$، ماتریس C_j زیرماتریس $m \times m$ از A باشد که از ستون‌های $j_۱, \dots, j_{i-۱}, j_{i+۱}, \dots, j_m$ و ستون jـام A تشکیل شده است. درنتیجه $x_j = \pm detC_j$.

از این‌رو $x_j \mid d$، $(1 \leq j \leq n)$. بنابراین $(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_n}{d}) \in F$. چون N یک زیرمدول Sـاول است و $d(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_n}{d}) \in N$ لذا

$$s(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_n}{d}) \in N \text{ یا } sdF \subseteq N.$$

اگر $sd \in (N :_R F)$، بنا به لم ۸.۲، $sd = 0$، که این یک تناقض است. ازاین‌رو $sdF \nsubseteq N$ و $s(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_n}{d}) \in N$. لذا $t_1, \ldots, t_m \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$(t_1, \ldots, t_m)A = s(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_n}{d}).$$

درنتیجه

$$s(x_1, \ldots, x_n) = s(\acute{b_{i1}}, \acute{b_{i2}}, \ldots, \acute{b_{im}})A = d(t_1, \ldots, t_m)A.$$

بنابراین

$$s(\acute{b_{i1}}, \acute{b_{i2}}, \ldots, \acute{b_{im}})B = d(t_1, \ldots, t_m)B \text{ و } s\acute{b_{ij}}detB = dt_j detB.$$

پس برای $1 \leq j \leq m$، $d \mid s\acute{b_{ij}}$. که این نتیجه می‌دهد به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq m$، $d \mid s\acute{b_{ij}}$. لذا $d^m \mid s^m det\acute{B}$. ازاین‌رو $d^m \mid s^m(detB)^{m-1}$. درنتیجه $d \mid s^m$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $s \in S$ وجود داشته باشد که $(d, s) = d$ب.م.م. بنا به لم ۸.۲، $(N :_R F) = 0$ درنتیجه $(N :_R F) \cap S = \emptyset$. ابتدا فرض کنیم $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ مجموعه تمام زیرماتریس‌های $m \times m$ از A است که به‌ازای هر $1 \leq i \leq k$، $detB_i \neq 0$ و برای هر $1 \leq i \leq m$، ستون‌های ماتریس B_i، ستون‌های $j(i, 1) < \cdots < j(i, m)$ از ماتریس A باشند. چون $rankA = m$ پس $\mathscr{B} \neq \emptyset$. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $k = 1$. پس $detB_1 = d$. لذا بنا به لم ۶.۲، تمام ستون‌های A غیر از ستون‌هایی که در B_1 هستند همه صفرند. در این حالت به راحتی ثابت می‌شود که N زیرمدول اول است و لذا Sـاول

است.

حالت دوم: فرض کنیم $k \neq ۱$، $R \ni r \neq ۰$ و $(x_۱, \dots, x_n) \in F$ که $r(x_۱, \dots, x_n) \in N$. نشان می‌دهیم $s(x_۱, \dots, x_n) \in N$.

حال فرض کنیم $d_۱ = detB_۱$ و برای هر $۱ \leq i \leq k-۱$، $d_{i+۱} = $ب.م.م$(d_i, detB_{i+۱})$. مشابه اثبات قضیه ۵.۲ در [۲]، برای هر $۱ \leq l \leq k-۱$، $r_{l_۱}, \dots, r_{l_m} \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq i \leq l+۱$،

$$(x_{j(i,۱)}, \dots, x_{j(i,m)}) = \frac{۱}{d_{l+۱}}(r_{l_۱}, \dots, r_{l_m})B_i.$$

اگر $l = k-۱$، آنگاه به‌ازای هر $۱ \leq i \leq k$،

$$(x_{j(i,۱)}, \dots, x_{j(i,m)}) = \frac{۱}{d}(r_{(k-۱)۱}, \dots, r_{(k-۱)m})B_i.$$

با توجه به لم ۶.۲، به‌دست می‌آوریم

$$(x_۱, \dots, x_n) = \frac{۱}{d}(r_{(k-۱)۱}, \dots, r_{(k-۱)m})A.$$

چون $d \mid s$، پس $\acute{d} \in R$ وجود دارد که $s = d\acute{d}$. درنتیجه

$$s(x_۱, \dots, x_n) = s\frac{۱}{d}(r_{(k-۱)۱}, \dots, r_{(k-۱)m})A = \acute{d}(r_{(k-۱)۱}, \dots, r_{(k-۱)m})A.$$

بنابراین $s(x_۱, \dots, x_n) \in N$. لذا N زیرمدول Sـ‌اول است.

□

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح، $S = \mathbb{Z} \setminus ۳\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از $\mathbb{Z}$ و همچنین $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ـ‌مدول آزاد باشد.

(۱) فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ و $s = ۵$. دترمینان زیر ماتریس‌های ۲×۲ از ماتریس A عبارتند از

$$\{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}\}.$$

بنابراین $rankA = ۲$ و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها $d = ۵$. چون $d = (d, s)$ب.م.م بنا به قضیه ۹.۲، $N = \langle A \rangle$ زیرمدول S- اول از F است.

(۲) فرض کنیم $B = \begin{pmatrix} ۵ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$. دترمینان زیر ماتریس‌های ۲×۲ از ماتریس B عبارتند از

$$\{\begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۵ & ۵ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}\}.$$

بنابراین $rankB = ۲$ و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها $d = ۹$. به‌ازای هر $s \in S$، $(s, ۹) = ۱$ب.م.م.
حال فرض کنیم $۳(۲, ۱, ۲) = (۵, ۱, ۵) + (۱, ۲, ۱) \in \langle B \rangle$. بنا به لم ۸.۲، $(\langle B \rangle : F) = ۰$، درنتیجه به‌ازای هر $s \in S$، $۳s \notin (\langle B \rangle : F)$.

بنا به برهان خلف، فرض کنیم $s \in S$ وجود دارد که $s(۲, ۱, ۲) \in \langle B \rangle$. درنتیجه $r, t \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که

$$s(۲, ۱, ۲) = r(۵, ۱, ۵) + t(۱, ۲, ۱).$$

بنابراین

$$\begin{cases} ۵r + t = ۲s \\ r + ۲t = s. \end{cases} \tag{۱.۲}$$

از حل دستگاه معادلات (۱.۲)، به‌دست می‌آوریم $t = \frac{s}{۳}$. که با توجه به تعریف مجموعه S، $\frac{s}{۳}$ عددی صحیح نیست

که این یک تناقض است. پس $\langle B\rangle$ زیرمدول Sـاول نیست.

در قضیه بعد، زیرمدول $N = \langle A_{n\times n}\rangle$ که $rankA = n$ را درنظر می‌گیریم و با توجه به دترمینان ماتریس A شرایط معادل Sـاول بودن N به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنیم R یک دامنه یکتایی تجزیه و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R، $s \in S$ و $F = R^n$. به‌علاوه فرض کنیم $A \in M_{n\times n}(R)$، $rankA = n$، $\acute{A} = (\acute{a}_{ij})$ ماتریس الحاقی A، $N = \langle A\rangle$ و $(N :_R F)\cap S = \emptyset$. در این صورت N یک زیرمدول Sـاول از F است اگروفقط‌اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد:*

(۱) *عنصر تحویل‌ناپذیر $p \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و عدد صحیح مثبت α وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha \leq n$، $(detA, s) = ۱$ب.م.م، $detA = up^{\alpha}$ و $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$.*

(۲) *عناصر تحویل‌ناپذیر $p_۱, \dots, p_k, p \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و $\gamma_۱, \dots, \gamma_k, \alpha_۱, \dots, \alpha_k, \alpha \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha \leq n$، $(detA, s) = p_۱^{\gamma_۱}\dots p_k^{\gamma_k}$ب.م.م، $detA = up_۱^{\alpha_۱}\dots p_k^{\alpha_k}p^{\alpha}$ و $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$.*

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم N یک زیرمدول Sـاول از F باشد و s برای N کار کند. دو حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $(detA, s) = ۱$ب.م.م. نشان می‌دهیم عنصر تحویل‌ناپذیر p در حلقه R وجود دارد که $detA = up^{\alpha}$. بنا به برهان خلف، فرض کنیم عناصر غیر صفر و غیر یکه $r, t \in R$ وجود دارند که $(r,t) = ۱$ب.م.م و $detA = rt$. بنا به نتیجه ۷.۲، $rt \in (N :_R F)$. چون N یک زیرمدول Sـاول است بنا به گزاره ۲.۲، $(N :_R F)$ ایده‌آل Sـاول است، پس

$$sr \in (N :_R F) \text{ یا } st \in (N :_R F).$$

درنتیجه به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $rt \mid sr\acute{a}_{ij}$ یا $rt \mid st\acute{a}_{ij}$. بنابراین به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$،

$$t \mid s\acute{a}_{ij} \text{ یا } r \mid s\acute{a}_{ij}.$$

چون $(s,t) = ۱$ب.م.م و $(s,r) = ۱$ب.م.م، لذا به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $t \mid \acute{a}_{ij}$ یا $r \mid \acute{a}_{ij}$.

ازاین‌رو

$$t^n \mid det(\acute{A}) = r^{n-۱}t^{n-۱} \text{ یا } r^n \mid det(\acute{A}) = r^{n-۱}t^{n-۱}.$$

پس $r \mid t^{n-۱}$ یا $t \mid r^{n-۱}$، که با فرض $(t, r) = ۱$ب.م.م در تناقض است. بنابراین عنصر تحویل‌ناپذیر p و عنصر یکه u در R، عدد طبیعی α وجود دارند به‌طوری‌که $detA = up^{\alpha}$.

در ادامه نشان می‌دهیم به‌ازای هر $n \leq i, j \leq ۱$، $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$. چون $N \neq F$ بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $N \not\ni (۱, ۰, \ldots, ۰)$. بنا به نتیجه ۷.۲، $detA = up^{\alpha} \in (N :_R F)$، پس $(p^{\alpha}, ۰, \ldots, ۰) \in N$. فرض کنیم β کوچکترین عدد طبیعی باشد که $(p^{\beta}, ۰, \ldots, ۰) \in N$. چون $p(p^{\beta-۱}, ۰, \ldots, ۰) \in N$ و N زیرمدول Sـاول است بنابراین

$$s(p^{\beta-۱}, ۰, \ldots, ۰) \in N \text{ یا } sp \in (N :_R F).$$

به آسانی دیده می‌شود که $s(p^{\beta-۱}, ۰, \ldots, ۰) \notin N$. لذا $sp \in (N :_R F)$. بنابراین به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $detA = up^{\alpha} \mid sp\acute{a}_{ij}$. درنتیجه به‌ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$. بنابراین

$$p^{(\alpha-۱)n} \mid det\acute{A} = (detA)^{n-۱} = u^{n-۱}p^{\alpha(n-۱)}.$$

ازاین‌رو $(\alpha - ۱)n \leq \alpha(n - ۱)$، پس $\alpha \leq n$.

حالت دوم: فرض کنیم $(detA, s) = p_۱^{\gamma_۱} \ldots p_k^{\gamma_k}$ب.م.م. لذا $\acute{s} \in R$ و اعداد طبیعی $\beta_۱, \ldots, \beta_k$ وجود دارند که $s = p_۱^{\beta_۱} \ldots p_k^{\beta_k}\acute{s}$.

نشان می‌دهیم عنصر تحویل‌ناپذیر p در R ، عنصر یکه $u \in R$ و $\alpha_۱, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $detA = up_۱^{\alpha_۱} \ldots p_k^{\alpha_k}p^{\alpha}$. بنا به برهان خلف، فرض کنیم عناصر غیر یکه $r, t \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$(r, t) = ۱ \text{ ب.م.م}, \ (rt, p_۱ \ldots p_k) = ۱ \text{ ب.م.م}, \ detA = p_۱^{\alpha_۱} \ldots p_k^{\alpha_k}(rt).$$

بنا به نتیجه ۷.۲، $detA = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}(rt) \in (N :_R F)$. بنا به گزاره ۲.۲، $(N :_R F)$ یک ایده‌آل Sـاول است، درنتیجه

$$sp_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} r \in (N :_R F) \text{ یا } st \in (N :_R F).$$

با توجه به لم ۵.۲، به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$،

$$detA = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}(rt) \mid sp_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} r\acute{a}_{ij},$$

یا

$$detA = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}(rt) \mid st\acute{a}_{ij}.$$

با محاسبات ساده به‌دست می‌آوریم $t \mid s\acute{a}_{ij}$ یا $r \mid s\acute{a}_{ij}$. با توجه به اینکه ب.م.م$(t, s) = 1$ و ب.م.م$(r, s) = 1$، درنتیجه $t \mid \acute{a}_{ij}$ یا $r \mid \acute{a}_{ij}$. ازاین‌رو

$$t^n \mid det\acute{A} = (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^{n-1}(rt)^{n-1},$$

یا

$$r^n \mid det\acute{A} = (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^{n-1}(rt)^{n-1}.$$

آنگاه

$$t \mid (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^{n-1} r^{n-1} \text{ یا } r \mid (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^{n-1} t^{n-1}.$$

که با فرض ب.م.م$(r, t) = 1$ و ب.م.م$(rt, p_1 \dots p_k) = 1$ در تناقض است. لذا عنصر تحویل‌ناپذیر $p \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود دارند که

$$detA = up_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} p^{\alpha}.$$

اگر $\alpha = ۰$، آنگاه $l \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر k ، $۱ \leq i \leq k$، $\alpha_i \leq \beta_i l$. درنتیجه $s^l \mid detA$، ازاین‌رو $s^l \in (N :_R F)$ که با فرض اینکه N زیرمدول Sـاول است در تناقض است. با روندی مشابه اثبات $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$ در قسمت (۱) می‌توان ثابت کرد به‌ازای هر n ، $۱ \leq i, j \leq n$، $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$ و $\alpha \leq n$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم گزاره (۱) برقرار باشد. بنا به قضیه ۵.۲ در [۲]، N زیرمدول اول است. از آنجایی‌که N زیرمدول اول است و $(N :_R F) \cap S = \emptyset$ پس N یک زیرمدول Sـاول است.

حال فرض کنیم گزاره (۲) برقرار باشد، لذا اعداد طبیعی $\beta_۱, \dots, \beta_k$ و $\acute{s} \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$s = p_۱^{\beta_۱} \dots p_k^{\beta_k} \acute{s} \text{ و } \text{ب.م.م}(p_۱ \dots p_k, \acute{s}) = ۱.$$

بنابراین عدد طبیعی l وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر k ، $۱ \leq i \leq k$، $\alpha_i \leq l\beta_i$.

اگر $r(x_۱, \dots, x_n) \in N$ و $x_۱, \dots, x_n, r \in R$، آنگاه بنا به لم ۵.۲، به‌ازای هر n ، $۱ \leq j \leq n$، $detA \mid \Sigma_{i=۱}^n r x_i \acute{a}_{ij}$. دو حالت را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $p \mid r$. چون به‌ازای هر n ، $۱ \leq i, j \leq n$، $p^{\alpha-۱} \mid \acute{a}_{ij}$. درنتیجه $p^\alpha \mid r\acute{a}_{ij}$. از این‌رو $detA \mid s^l r\acute{a}_{ij}$. بنا به لم ۵.۲،

$$s^l rF \subseteq N. \tag{۲.۲}$$

حالت دوم: فرض کنیم $p \nmid r$. لذا $p^\alpha \mid \Sigma_{i=۱}^n x_i \acute{a}_{ij}$. درنتیجه $detA \mid s^l \Sigma_{i=۱}^n x_i \acute{a}_{ij}$. بنا به لم ۵.۲،

$$s^l(x_۱, \dots, x_n) \in N. \tag{۳.۲}$$

با توجه به (۲.۲) و (۳.۲)، N زیرمدول Sـاول است.

□

نتیجه ۱۲.۲. *فرض کنیم R یک دامنه یکتایی تجزیه و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R، $s \in S$، $F = R^n$، $A \in M_{n\times n}(R)$ و $\acute{A} = (\acute{a}_{ij})$ ماتریس الحاقی A باشد. به‌علاوه فرض کنیم $\acute{s} \in R$، عناصر تحویل‌ناپذیر*

$p_1, \dots, p_k \in R$ و اعداد طبیعی $\nu_1, \dots, \nu_k, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $rankA = n$، $(detA, s) =$ب.م.م $p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$، $s = \acute{s} p_1^{\nu_1} \dots p_k^{\nu_k}$، $N = \langle A \rangle$ و $(N :_R F) \cap S = \emptyset$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) N یک زیرمدول Sـاول از F است و s برای آن کار می‌کند.

(۲) عنصر تحویل‌ناپذیر $p \in R$، عنصر یکه $u \in R$، اعداد طبیعی $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k, u_1, \dots, u_k$ وجود دارند به‌طوری‌که $detA = up_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} p^{\alpha}$، $(p_1 \dots p_k, p) =$ب.م.م 1، $0 \leq u_i \leq \alpha_i - 1$ و $b = p_1^{u_1} \dots p_k^{u_k} p^{\alpha - 1}$ که $b =$ب.م.م $(\acute{a}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ و همچنین برای هر $1 \leq i \leq k$، $\alpha_i \leq \nu_i + u_i$.

مثال ۱۳.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح، $S := \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از $\mathbb{Z}$ و همچنین $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد باشد.

(۱) فرض کنیم

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

یک ماتریس روی $\mathbb{Z}$، $L = \langle C \rangle$ یک زیرمدول از F و $s = 5$. درنتیجه $detC = 3^3$، $rankC = 3$ و

$$\acute{C} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

ماتریس الحاقی C است. لذا $(K : F) = 9\mathbb{Z}$ و $(K : F) \cap S = \emptyset$. چون $3^2 \mid \acute{c}_{ij}$ و $(s, detC) =$ب.م.م 1، پس شرایط قسمت (۱) از قضیه ۱۱.۲، برقرار است. درنتیجه L یک زیرمدول Sـاول از F است.

(۲) فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix},$$

یک ماتریس روی $\mathbb{Z}$، $N = \langle A \rangle$ یک زیرمدول از F و $s = ۲$. درنتیجه $rankA = ۳$، $detA = ۳^۳ \times ۲$ و

$$\acute{A} = \begin{pmatrix} ۱۸ & -۹ & -۳۶ \\ ۱۸ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۸ \end{pmatrix},$$

ماتریس الحاقی A است که $۳^۲$ تمام درایه‌های آن را عاد می‌کند و $(s, detA) = ۲$ب.م.م. چون $(N : F) =$ $۶\mathbb{Z}$، پس $(N : F) \cap S = \emptyset$. بنا به قسمت (۲) از قضیه ۱۱.۲، N زیرمدول Sـاول است.

(۳) فرض کنیم

$$B = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix},$$

یک ماتریس روی $\mathbb{Z}$ و $K = \langle B \rangle$ زیرمدول از F باشد.

درنتیجه $rankB = ۳$، $detB = ۳^۳ \times ۲$ و

$$\acute{B} = \begin{pmatrix} ۱۸ & -۳ & -۶ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۸ \end{pmatrix},$$

ماتریس الحاقی B است. بنابراین $(K:F)=18\mathbb{Z}$ و $(K:F)\cap S=\emptyset$. چون $3^2 \nmid b'_{12}$، پس شرایط قضیه ۱۱.۲ برقرار نیست. از آنجایی‌که

$$(9,6,6)=3(3,1,1)+(0,6,0)+(0,0,3)\in K,$$

لذا $3(3,2,2)\in K$.

چون $(K:F)=18\mathbb{Z}$، پس به‌ازای هر $s\in S$ داریم $3s\notin(K:F)$. حال نشان می‌دهیم به‌ازای هر $s\in S$، $s(3,2,2)\notin K$. بنا به برهان خلف، فرض کنیم $s(3,2,2)\in K$. درنتیجه $r_1,r_2,r_3\in\mathbb{Z}$ وجود دارند که

$$s(3,2,2)=r_1(3,1,1)+r_2(0,6,0)+r_3(0,0,3).$$

بنابراین

$$\begin{cases} 3r_1=3s \\ 2s=r_1+6r_2 \\ 2s=r_1+3r_3. \end{cases} \tag{4.2}$$

از حل دستگاه معادلات (۴.۲)، به‌دست می‌آوریم $s \mid 3$. که این یک تناقض است. لذا به‌ازای هر $s\in S$، $s(3,2,2)\notin K$. درنتیجه K یک زیرمدول Sـاول نیست.

تعریف ۱۴.۲. فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه‌ی R، $s\in S$ و K زیرمدولی از Rـمدول M باشد. sـرادیکال K را اشتراک تمام زیرمدول‌های Sـاول که s برای آن کارکند و شامل K باشند تعریف می‌کنیم و با $rad_s(K)$ نشان می‌دهیم. اگر زیرمدول Sـاولی که s برای آن کار کند و شامل K باشد وجود نداشته باشد، آن‌گاه $rad_s(K)=F$ قرار می‌دهیم.

در گزاره بعد $rad_s(R(a_1,\ldots,a_n))$ که R دامنه یکتایی تجزیه می‌باشد تحت شرایطی مشخص گردیده است.

گزاره ۱۵.۲. *فرض‌کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از دامنه یکتایی تجزیه R، $s\in S$ و $F=R^n$. به‌علاوه فرض کنیم برای $a_1,\ldots,a_n\in R$، $K=R(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$، ب.م.م$(a_1,\ldots,a_n)=d$ و $rad_s(K)\neq F$. در*

این صورت

(۱) اگر $s \mid d$، آن‌گاه $rad_s(K) = K$.

(۲) اگرعناصر تحویل‌ناپذیر $p_1, \dots, p_m \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و اعداد طبیعی $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $d = usp_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$، در این صورت $1 \leq k \leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$rad_s(K) = Rsp_1 \dots p_k(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \text{ یا } rad_s(K) = Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

اثبات. (۱) بنا به قضیه ۹.۲، K زیرمدول Sـاول است و s برای K کار می‌کند. درنتیجه $rad_s(K) = K$.

(۲) ابتدا دو زیرمدول Sـاول شامل K می‌یابیم. چون $s = (s\frac{a_1}{d}, \dots, s\frac{a_n}{d})$ب.م.م، پس بنا به قضیه ۹.۲،

$$Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}),$$

یک زیرمدول Sـاول است و s برای آن کار می‌کند، همچنین $K \subseteq Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$. حال فرض کنیم $1 \leq i \leq m$ و $\langle p_i \rangle \cap S = \emptyset$، آن‌گاه بنا به قضیه ۱۱.۲، sp_iF زیرمدول Sـاول بوده که شامل زیرمدول K است.

فرض کنیم N زیرمدول Sـاول از F باشد که s برای آن کار می‌کند و شامل زیرمدول K باشد. چون $d = (a_1, \dots, a_n)$ب.م.م، پس $d(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N$. از آنجایی‌که N زیرمدول Sـاول از F است، لذا

$$s(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N \text{ یا } sd \in (N :_R F).$$

اگر $s(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N$، آن‌گاه $Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$ زیرمدول N است.

حال فرض کنیم $sd \in (N :_R F)$. چون N زیرمدول Sـاول است، پس بنا به گزاره ۲.۲، $(N :_R F)$ ایده‌آل Sـاول است، لذا بنا به گزاره ۱ در [۱]، $1 \leq i \leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که $sp_i \in (N :_R F)$. با توجه به اینکه $sp_iF \subseteq N$، لذا $(sp_iF :_R F) \subseteq (N :_R F)$. چون N زیرمدول Sـاول است و $(N :_R F) \cap S = \emptyset$،

پس $(sp_iF :_R F) \cap S = \emptyset$. درنتیجه $\langle p_i \rangle \cap S = \emptyset$ و sp_iF زیرمدول Sـاول است. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $1 \leq k \leq m$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $1 \leq i \leq k$، $\langle p_i \rangle \cap S = \emptyset$ و به‌ازای هر $k < j \leq m$، $\langle p_j \rangle \cap S \neq \emptyset$. درنتیجه

$$rad_s(K) = Rsp_1 \dots p_k(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

حالت دوم: به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، $\langle p_i \rangle \cap S \neq \emptyset$، از این‌رو

$$rad_s(K) = Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

$\square$

قضیه ۱۶.۲. *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از دامنه ایده‌آل اصلی R، $s \in S$ و $F = R^n$. به‌علاوه فرض کنیم برای $a_1, \dots, a_n \in R$، $0 \neq K = R(a_1, \dots, a_n)$، $d = (a_1, \dots, a_n)$ب.م.م و $rad_s(K) \neq F$. در این صورت*

(۱) اگر $s \mid d$، آن‌گاه $rad_s(K) = K$.

(۲) اگرعناصر تحویل‌ناپذیر $p_1, \dots, p_m \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $d = usp_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$، آن‌گاه $1 \leq k \leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$rad_s(K) = Rsp_1 \dots p_k(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \text{ یا } rad_s(K) = Rs(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

(۳) اگر عناصر $\acute{d}, \acute{s} \in R$، عناصر تحویل‌ناپذیر $p_1, \dots, p_m \in R$، عنصر یکه $u \in R$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\acute{d} = (d, s)$ب.م.م، $s = \acute{s}\acute{d}$ و $d = u\acute{d}p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$، آن‌گاه $1 \leq k \leq m$

وجود دارد به‌طوری‌که

$$rad_s(K) = R\acute{d}p_1 \dots p_k(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \text{ یا } rad_s(K) = R\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

اثبات. بنا به گزاره ۱۵.۲، نتایج (۱) و (۲) بدست می‌آیند.

(۳) چون $\acute{d} = (\acute{d}\frac{a_1}{d}, \dots, \acute{d}\frac{a_n}{d})$ب.م.م و $\acute{d} = (\acute{d}, s)$ب.م.م، بنا به قضیه ۹.۲،

$$R\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}),$$

یک زیرمدول Sـاول است و s برای آن کار می‌کند همچنین $K \subseteq R\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$.

به‌علاوه از آنجایی‌که R یک دامنه ایده‌آل اصلی است و $\acute{d} = (s, d)$ب.م.م، بنابراین عناصر $a, b \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $as + bd = \acute{d}$.

حال فرض کنیم N یک زیرمدول Sـاول شامل زیرمدول K باشد. چون $d = (a_1, \dots, a_n)$ب.م.م، لذا $d(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N$. از آنجایی که N زیرمدول Sـاول از F است، پس

$$s(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N \text{ یا } sd \in (N :_R F).$$

ابتدا فرض کنیم $s(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N$. نشان می‌دهیم $R\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \subseteq N$. چون

$$s(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N \text{ و } d(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N,$$

پس

$$as(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) + bd(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) = \acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in N.$$

ازاین‌رو $R\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \subseteq N$.

حال فرض کنیم $sd \in (N :_R F)$. از آنجایی‌که $d = u\acute{d}p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ و N یک زیرمدول Sـاول است، لذا

بنا به گزاره ۱ در [۱]، $(N:F)$ $s\acute{d} \in$ یا $sp_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m} \in (N:F)$. چون $s \mid \acute{d}$ و $(N:F)\cap S = \emptyset$،
بنابراین $s\acute{d} \notin (N:F)$. درنتیجه $sp_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m} \in (N:F)$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: به‌ازای هر $1 \le i \le m$، $\langle p_i\rangle \cap S \neq \emptyset$. از این‌رو به‌ازای هر $1 \le i \le m$، $sp_i \notin (N:F)$. پس برای هر زیرمدول Sـاول N، $R\acute{d}(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \subseteq N$. درنتیجه

$$rad_s(K) = R\acute{d}(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}).$$

حالت دوم: $1 \le k \le m$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $1 \le i \le k$، $\langle p_i\rangle \cap S = \emptyset$ و به‌ازای هر $k < j \le m$، $\langle p_j\rangle \cap S \neq \emptyset$.

قرار می‌دهیم $T := Rsp_1\dots p_k(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d})$. نشان می‌دهیم به‌ازای هر زیرمدول Sـاول N، $T \subseteq N$.

مشابه ابتدای اثبات، چون $d(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \in N$ و N زیرمدول Sـاول از F است، پس

$$s(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \in N \text{ یا } sd \in (N :_R F).$$

اگر $s(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \in N$ آن‌گاه $T \subseteq N$.

حال اگر $sd \in (N :_R F)$، آن‌گاه $1 \le i \le k$، وجود دارد به طوریکه $sp_i \in (N:F)$. پس $T \subseteq N$.

درنتیجه $T \subseteq rad_s(K)$. چون $K \subseteq rad_s(K)$ و $dp_1\dots p_k(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \in rad_s(K)$، بنابراین

$$asp_1\dots p_k(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) + bdp_1\dots p_k(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) =$$

$$\acute{d}p_1\dots p_k(\frac{a_1}{d},\dots,\frac{a_n}{d}) \in rad_s(K).$$

فرض کنیم $(b_۱, \dots, b_n) \in rad_s(K)$. چون $rad_s(K) \subseteq R\acute{d}(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$، لذا $r \in R$ وجود دارد که $(b_۱, \dots, b_n) = r\acute{d}(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$. داریم به‌ازای هر $۱ \leq i \leq k$، $\langle p_i\rangle \cap S = \emptyset$، پس بنا به قضیه ۵.۲ در [۲]، p_iF یک زیرمدول اول است. از آنجایی‌که $K \subseteq p_iF$، بنابراین $rad_s(K) \subseteq p_iF$. ازاین‌رو $r\acute{d}(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \in p_iF$. چون $(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) = ۱$ب.م.م، بنابراین $۱ \leq j \leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که $p_i \nmid \frac{a_j}{d}$. لذا $(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}) \notin p_iF$. درنتیجه

$$r\acute{d} \in \langle p_i\rangle = (p_iF : F).$$

چون $\langle p_i\rangle \cap S = \emptyset$، پس $p_i \nmid \acute{d}$. لذا $p_i \mid r$ و $p_۱ \dots p_k \mid r$. بنابراین $\acute{r} \in R$ وجود دارد که $(b_۱, \dots, b_n) = \acute{r}p_۱ \dots p_n\acute{d}(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d})$. ازاین‌رو

$$rad_s(K) = R\acute{d}p_۱ \dots p_k(\frac{a_۱}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}).$$

□

مثال ۱۷.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح، $S := \mathbb{Z} \setminus ۳\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از $\mathbb{Z}$ و همچنین $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد باشد.

(۱) $K = \mathbb{Z}(۵, ۱۰, ۵)$، $s = ۲۵$ را درنظر گرفتیم. چون $(۵, ۱۰, ۵) = ۵$ب.م.م $= d$ و $d \mid s$، ازاین‌رو بنا به قسمت (۱) قضیه ۱۶.۲،

$$rad_{۲۵}(K) = \mathbb{Z}(۵, ۱۰, ۵).$$

(۲) $K = \mathbb{Z}(۱۵, ۳۰, ۱۵)$، $s = ۵$ را درنظر گرفتیم. چون $(۱۵, ۳۰, ۱۵) = ۱۵ = ۳ \times ۵$ب.م.م $= d$، $(d, s) = s$ب.م.م و $\langle ۳\rangle \cap S = \emptyset$، بنابراین بنا به قسمت (۲) قضیه ۱۶.۲،

$$rad_{۵}(K) = \mathbb{Z}۱۵(۱, ۲, ۱).$$

(۳) $K = \mathbb{Z}(۱۰, ۲۰, ۱۰)$، $s = ۵$ را درنظر گرفتیم. چون $(۱۰, ۲۰, ۱۰) = ۱۰ = ۲ \times ۵$ب.م.م $= d$،

$s = $ب.م.م$(d, s)$ و $\langle ۲\rangle \cap S \neq \emptyset$، درنتیجه بنا به قسمت (۲) قضیه ۱۶.۲،

$$rad_{۵}(K) = \mathbb{Z}۵(۱, ۲, ۱).$$

(۴) $K = \mathbb{Z}(۱۵, ۳۰, ۱۵)$، $s = ۱۰$ را درنظر گرفتیم. چون $۵ \times ۳ = ۱۵ = $ب.م.م$(۱۵, ۳۰, ۱۵) = d$، $۵ = $ب.م.م$(d, s)$ و $\langle ۳\rangle \cap S = \emptyset$، لذا بنا به قسمت (۳) قضیه ۱۶.۲،

$$rad_{۱۰}(K) = \mathbb{Z}۱۵(۱, ۲, ۱).$$

(۵) $K = \mathbb{Z}(۱۰, ۲۰, ۱۰)$، $s = ۳۵$ را درنظر گرفتیم. چون $۵ \times ۲ = ۱۰ = $ب.م.م$(۱۰, ۲۰, ۱۰) = d$، $۵ = $ب.م.م$(d, s)$ و $\langle ۲\rangle \cap S \neq \emptyset$، پس بنا به قسمت (۳) قضیه ۱۶.۲،

$$rad_{۳۵}(K) = \mathbb{Z}۵(۱, ۲, ۱).$$

گزاره ۱۸.۲. *فرض‌کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از دامنه ایده‌آل اصلی R، $s \in S$، $F = R \oplus R$ و $A = (a_{ij}) \in Mat_{۲\times۲}(R)$. به‌علاوه فرض‌کنیم $K = \langle A\rangle$، $detA \neq ۰$، $d = $ب.م.م$(a_{۱۱}, a_{۱۲})$، $\lambda = $ب.م.م$(detA, s)$ و عنصر تحویل‌ناپذیر p از R وجود دارد به‌طوری‌که $p \nmid s$، $p \nmid d$، $\lambda p \mid detA$، $\lambda = \acute{\lambda}\gamma$ و $\acute{\lambda} = $ب.م.م$(\lambda p, d)$. در این صورت دقیقا یک زیرمدول Sـ‌اول شامل K وجود دارد که*

$$N = R(x_{۱}, x_{۲}) + R(y_{۱}, y_{۲}),$$

$x_{۱}y_{۲} - x_{۲}y_{۱} = \gamma p$ و s برای N کار می‌کند.

اثبات. چون R دامنه ایده‌آل اصلی و $d = $ب.م.م$(a_{۱۱}, a_{۱۲})$، بنابراین عناصر u, v در R وجود دارند که

$$ua_{۱۱} + va_{۱۲} = d.$$

از آنجایی‌که $\lambda \mid \acute{\lambda}$ از این‌رو $\gamma \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda = \gamma\acute{\lambda}$. قرار می‌دهیم

$$C = \begin{pmatrix} \gamma pv & \gamma p(-u) \\ \frac{a_{۱۱}}{d} & \frac{a_{۱۲}}{d} \end{pmatrix}.$$

داریم $detC = \gamma p$. حال ثابت می‌کنیم $K \subseteq N. = \langle C \rangle$. واضح است $(a_{۱۱}, a_{۱۲}) = d(\frac{a_{۱۱}}{d}, \frac{a_{۱۲}}{d}) \in N.$. از طرفی چون $\lambda p \mid detA$، پس عنصر $c \in R$ وجود دارد که $\lambda pc = detA$. چون $\acute{\lambda} = (\lambda p, d)$ب.م.م بنابراین $d' \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $d = \lambda' d'$. ازاین‌رو $d' \mid \gamma pc$. چون $۱ = (\gamma p, d')$ب.م.م لذا $d' \mid c$. درنتیجه

$$\begin{aligned} a_{۲۱} &= \frac{ua_{۱۱}a_{۲۱}}{d} + \frac{va_{۱۲}a_{۲۱}}{d} \\ &= \frac{ua_{۱۱}a_{۲۱}}{d} + \frac{v(a_{۱۱}a_{۲۲} - \lambda pc)}{d} \\ &= (ua_{۲۱} + va_{۲۲})\frac{a_{۱۱}}{d} + (-\frac{c\lambda'}{d})(\gamma pv), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} a_{۲۲} =& \frac{ua_{۱۱}a_{۲۲}}{d} + \frac{va_{۱۲}a_{۲۲}}{d} \\ =& \frac{u\lambda pc + a_{۱۲}a_{۲۱}u}{d} + \frac{va_{۱۲}a_{۲۲}}{d} \\ =& (ua_{۲۱} + va_{۲۲})\frac{a_{۱۲}}{d} + (-\frac{c\lambda'}{d})(\gamma p(-u)), \end{aligned}$$

پس $(a_{۲۱}, a_{۲۲}) \in N.$، و لذا $K \subseteq N.$. چون $\gamma = (\gamma p, s)$ب.م.م $= (detC, s)$ب.م.م، بنابراین بنا به قضیه ۱۱.۲، s برای $N.$ کار می‌کند.

در ادامه نشان می‌دهیم $N.$ منحصر به فرد زیرمدول Sـاول با این خاصیت است. حال فرض کنیم N زیرمدول Sـاول

باشد و s برای N کارکند و $K \subseteq N$. قرار دهید

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

که $detD = \gamma p$ و $N = \langle D \rangle$.

چون $(a_1, a_2) \in N$ بنا به لم ۵.۲، $\gamma p \mid x_1 a_{12} - x_2 a_{11}$. همچنین $d \mid x_1 a_{12} - x_2 a_{11}$. حال چون $(\gamma p, d) = 1$ب.م.م. پس $\gamma p \mid x_1 \frac{a_{12}}{d} - x_2 \frac{a_{11}}{d}$ و همچنین $\gamma p \mid x_1 \gamma p u - x_2 \gamma p v$ و لذا بنا به لم ۵.۲، $(x_1, x_2) \in N.$.

همچنین می‌توان نشان داد $\gamma p \mid a_{11} y_2 - a_{12} y_1$. درنتیجه $(y_1, y_2) \in N.$ و لذا $N \subseteq N.$. به طور مشابه $N. \subseteq N$ و لذا $N = N.$.

□

قضیه ۱۹.۲. *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از دامنه ایده‌آل اصلی R، $s \in S$، $F = R \oplus R$،*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(R),$$

$detA \neq 0$، $K = \langle A \rangle$ زیرمدول سره از F و $rad_s(K) \neq F$. به‌علاوه فرض کنیم $(a_1, a_2) = d_1$ب.م.م، $(b_1, b_2) = d_2$ب.م.م، $(d_1, d_2) = d$ب.م.م، عناصر تحویل ناپذیر $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ وجود داشته باشند که

$$(detA, s) = \lambda = \lambda_1^{\gamma_1} \dots \lambda_k^{\gamma_k} \text{ب.م.م} \text{ و } (\frac{a_1}{d_1})u_1 + (\frac{a_2}{d_1})v_1 = (\frac{b_1}{d_2})u_2 + (\frac{b_2}{d_2})v_2 = 1$$

که $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$. در این صورت

(۱) اگر عنصر یکه $u \in R$، عناصر تحویل‌ناپذیر $q_1, \dots, q_n \in R$ و $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $d = usq_1^{\beta_1} \dots q_n^{\beta_n}$، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $(sq_iF : F) \cap S = \emptyset$ و $\frac{detA}{d^2}$ یکه باشد، آن‌گاه

$$rad_s(K) = sq_1 \dots q_n F.$$

(۲) اگر $s \mid d$، $detA = \lambda p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ *یک تجزیه به عوامل تحویل‌ناپذیر* R *باشد و* $l \leq m$ *وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هر* $1 \leq i \leq l$، $\lambda \mid \lambda'_i = (\lambda p_i, d_1)$*ب.م.م، به‌ازای هر* $l+1 \leq j \leq m+1$ *،* $\lambda \nmid (\lambda p_j, d_1)$*ب.م.م،* $\lambda \mid \lambda'_j = (\lambda p_j, d_2)$*ب.م.م و همچنین به ازای هر* $1 \leq k \leq m+1$، $\lambda = \lambda'_k \lambda^*_k$، *آن‌گاه*

$$rad_s(K) \subseteq [R\lambda^*_1 \dots \lambda^*_l p_1 \dots p_l(v_1, -u_1) + R(\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_1})]$$
$$\cap [R\lambda^*_{l+1} \dots \lambda^*_{m+1} p_{l+1} \dots p_{m+1}(v_2, -u_2) + R(\frac{b_1}{d_2}, \frac{b_2}{d_2})],$$

که درآن $\lambda^*_{m+1} = p^*_{m+1} = 1$.

(۳) اگر $d = sq_1^{\beta_1} \dots q_n^{\beta_n}$، $(sq_iF : F) \cap S = \emptyset$، $\lambda_\circ = (\frac{detA}{d^2}, s)$*ب.م.م،* $\lambda \mid \lambda_\circ$ *و* $\frac{detA}{d^2} = u\lambda_\circ p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ *تجزیه به عوامل تحویل‌ناپذیر باشد به‌علاوه* $l \leq m$ *وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر* $1 \leq i \leq l$، $\lambda \mid \lambda'_i = (\lambda_\circ p_i, \frac{d_1}{d})$*ب.م.م و برای هر* $l+1 \leq j \leq m+1$، $\lambda \nmid (\lambda_\circ p_j, \frac{d_1}{d})$*ب.م.م،* $\lambda \mid \lambda'_j = (\lambda_\circ p_j, \frac{d_2}{d})$*ب.م.م همچنین* $1 \leq k \leq m+1$، $\lambda = \lambda'_k \lambda^*_k$، *آن‌گاه*

$$rad_s(K) \subseteq [R\lambda^*_1 \dots \lambda^*_l p_1 \dots p_l(v_1, -u_1) + R(\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_1})]$$
$$\cap [R\lambda^*_{l+1} \dots \lambda^*_{m+1} p_{l+1} \dots p_{m+1}(v_2, -u_2) + R(\frac{b_1}{d_2}, \frac{b_2}{d_2})]$$
$$\cap q_1 \dots q_m F,$$

که درآن $\lambda^*_{m+1} = p^*_{m+1} = 1$.

اثبات. (۱) بنا به اثبات قضیه ۳.۳ در [۲]، $K = dF$. حال اگر N یک زیرمدول Sـاول از F شامل K باشد و s برای N کار کند، آن‌گاه $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $sq_iF \subseteq N$. چون $(sq_iF :_R F) \cap S = \emptyset$، پس بنا به قضیه ۱۱.۲، sq_iF یک زیرمدول Sـاول شامل K است که s برای آن کار می‌کند. درنتیجه

$$rad_s(K) = \cap_{i=1}^n sq_iF = sq_1 \dots q_nF.$$

(۲) فرض کنیم $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(R)$ و $N = \langle B \rangle$ زیرمدول Sـاول شامل K باشد که s برای آن کار می‌کند. بنابراین $r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$ وجود دارند که

$$(a_1, a_2) = (r_1, r_2)B \text{ و } (b_1, b_2) = (r_3, r_4)B.$$

بنا به قضیه ۱۱.۲، دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: عنصر تحویل‌ناپذیر q در حلقه R و برای هر $1 \leq i \leq k$، اعداد صحیح مثبت η_i وجود دارند که $\eta_i \leq \gamma_i$، $detB = \lambda_1^{\eta_1} \dots \lambda_k^{\eta_k} q^2$، $(q, s) = 1$ب.م.م و q تمام عناصر x_1, x_2, y_1, y_2 را عاد می‌کند. چون برای $i = 1, 2$،

$$r_1 x_i + r_2 y_i = a_i \text{ و } r_3 x_i + r_4 y_i = b_i,$$

لذا $q \mid d$. چون $s \mid d$ و $q \mid d$ بنابراین $q \mid s$. که با فرض $(q, s) = 1$ب.م.م در تناقض است.

حالت دوم: عنصر تحویل‌ناپذیر q در حلقه R و برای هر $1 \leq i \leq k$، اعداد صحیح مثبت η_i وجود دارند که

$$\eta_i \leq \gamma_i,\ q \nmid s \text{ و } detB = \lambda_1^{\eta_1} \dots \lambda_k^{\eta_k} q.$$

چون

$$detA = (r_1 r_4 - r_2 r_3)(detB),$$

درنتیجه $\lambda_1^{\eta_1} \dots \lambda_k^{\eta_k} q \mid detA$. از آنجایی‌که $(q, \lambda) = 1$ب.م.م و $detA = \lambda p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$، لذا $1 \leq j \leq m$ وجود دارد که $q = p_j$. اگر $1 \leq j \leq l$، $(\lambda p_j, d_1) = \lambda'_j$ب.م.م، $\lambda = \lambda'_j \lambda^*_j$ و $\lambda_j p_j \mid detA$، آن‌گاه بنا به اثبات گزاره ۱۸.۲،

$$N = R\lambda^*_j p_j(v_1, -u_1) + R(\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_1}),$$

زیرمدول Sـاول شامل K می‌باشد.

حال فرض کنیم $k+1 \leq j \leq m+1$ و $q = p_j$. ثابت می‌کنیم $\lambda \mid (\lambda p_j, d_2)$. بنا به برهان خلف، فرض کنیم $\lambda \nmid (\lambda p_j, d_2)$. چون $\lambda \nmid (\lambda p_j, d_1)$، پس $p_j \mid d_1$ و $p_j \mid d_2$. درنتیجه $p_j \mid d$. پس $q \mid d$. چون $s \mid d$، بنابراین $s \mid q$ که با فرض $s \nmid q$ در تناقض است. بنابراین $\lambda \mid (\lambda p_j, d_2) = \lambda'_j$، لذا بنا به اثبات گزاره ۱۸.۲،

$$N = R\lambda_j^* p_j(v_2, -u_2) + R(\frac{b_1}{d_2}, \frac{b_2}{d_2}),$$

زیرمدول Sـاول شامل K می باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} rad_s(K) \subseteq & [R\lambda_1^* \dots \lambda_l^* p_1 \dots p_l(v_1, -u_1) + R(\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_1})] \\ & \cap [R\lambda_{l+1}^* \dots \lambda_{m+1}^* p_{l+1} \dots p_{m+1}(v_2, -u_2) + R(\frac{b_1}{d_2}, \frac{b_2}{d_2})]. \end{aligned}$$

(۳) فرض کنیم

$\acute{K} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a_1}{d} & \frac{a_2}{d} \\ \frac{b_1}{d} & \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \right\rangle$ و N زیرمدول Sـاول شامل K باشد که s برای آن کار کند. چون

$$d(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}), d(\frac{b_1}{d}, \frac{b_2}{d}) \in N,$$

پس $s\acute{K} \subseteq N$ یا $dF = s\acute{d}F \subseteq N$. چون

$$(a_1, a_2) = d(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}) = s\acute{d}(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}),$$

پس $(a_1, a_2) \in s\acute{K}$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(b_1, b_2) \in s\acute{K}$. بنابراین $K \subseteq s\acute{K}$. لذا

$$rad_s(dF) \cap rad_s(s\acute{K}) = rad_s(K).$$

ازاین‌رو با توجه به قسمت‌های (۱) و (۲) اثبات کامل می‌شود.

□

مراجع

[1] A. Hamed and A. Malek, S-prime ideals of a commutative ring, *Beitr Algebra Geom.*, **61** (2020), 533–542.

[2] S. Hedayat and R. Nekooei , Characterization of prime submodules of a finitely generated free module over a PID, *Houston Journal of Mathematics*, **31** (2005), 75–85.

[3] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer, 1980.

[4] C. P. Lu, Prime submoduler of modules, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, **22** (1984), 61–69.

[5] R. L. McCasland, Some commutative ring results generalized to unitary modules, Ph.D. Thesis, University of Texas at Arlington, (1983).

[6] E. Sengelen Sevim, T. Arabaci, U. Tekir and S. Koc, On S-prime submodules, *Turk. J. Math.*, **43** (2019), 1036–1046.