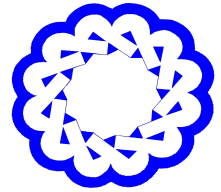


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

تحلیل پایداری یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای مدل کسری لوتکا-ولترا

مهدی کرمی^آ، سوده رزاقیان^ب، علی محیبیان^ب، مهران نامجو^{*آ}، مهران امینیان^آ

^آگروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان، کرمان، ایران
^بدانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان، کرمان، ایران

چکیده

در این مقاله، فرم مرتبه کسری از مدل لوتکا-ولترا معرفی می‌شود. تحلیل پایداری این سیستم کسری بطور کامل بحث می‌شود. به منظور مطالعه رفتار دینامیکی سیستم کسری ذکر شده، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد مرتبط با آن پیاده سازی و خواص مثبت بودن و کراننداری آن ثابت می‌شود. طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد پیشنهادی با روش‌های اویلر پیشرو و رانگ-کوتا مرتبه چهار مقایسه می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که پیاده سازی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد که برای مدل لوتکا-ولترا مرتبه کسری معرفی شده است، آسانتر و کاراتر از روش‌های اویلر پیشرو و رانگ-کوتا است.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۳) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۲ فروردین ۱۴۰۲
پذیرفته شده: ۲۹ مرداد ۱۴۰۲
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

سیستم لوتکا-ولترا، طرح
تفاضل متناهی غیراستاندارد،
معادلات دیفرانسیل کسری،
مشق کاپوتو، پایداری.

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: m.karami@vru.ac.ir (مهدی کرمی)، s.razaghian@stu.vru.ac.ir (سوده رزاقیان)،
a.mohebbian@stu.vru.ac.ir (علی محیبیان)، namjoo@vru.ac.ir (مهران نامجو)، mehran.aminian@vru.ac.ir (مهران امینیان)

<http://doi.org/10.22072/WALA.2023.1999901.1417>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۳) ©

۱. مقدمه

مدل‌های ریاضی بدست آمده به کمک سیستم‌های دینامیکی، تکامل سیستم‌ها را برحسب معادله حرکت و مقادیر اولیه تشریح می‌کنند. مثال‌های بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در مکانیک برای فیزیک، دینامیک‌های جمعیت در زیست‌شناسی و جنبش‌های شیمیایی در علم شیمی پیدا شده است [۷]. در بسیاری از شاخه‌های علوم کاربردی و مهندسی، رفتار یک سیستم دینامیکی را می‌توان به فرم یک دستگاه معادله دیفرانسیل در حالت پیوسته و یا یک سیستم تفاضلی برای حالت گسسته نظر گرفت. یک دستگاه معادله دیفرانسیل یا یک سیستم تفاضلی وضعیت کنونی یک سیستم را برحسب وضعیت گذشته آن به‌ازای داده‌های ثابت از ورودی‌ها و پارامترهای سیستم بیان می‌کند. پیشتر، مدل‌سازی یک سیستم دینامیکی محدود به سیستم‌های خطی بود که برای تحلیل رفتار این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گرفت. اخیراً، با ظهور کامپیوترهای قدرتمند و استفاده کردن از تکنیک‌های محاسباتی بهبودیافته آنالیز رفتار دینامیکی سیستم‌های غیرخطی آسان شده است. نظر به اینکه رفتار اکثر پدیده‌ها در دنیای واقعی به فرم غیرخطی نمایان می‌شود، از این‌رو مطالعه دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی در دهه‌های اخیر از جایگاه خاصی برخوردار بوده است. معادلات دیفرانسیل لوتکا-ولترا^۱ نقش مهمی در توسعه ریاضیات زیستی از زمان معرفی‌اشان در اوایل قرن بیستم ایفا کرده‌اند. مدل‌های لوتکا-ولترا فاقد پیچیدگی هستند و حقیقت مدل‌های جمعیت توسعه‌یافته را نشان می‌دهند، اما اکثر این دسته از مدل‌ها یک نقطه شروعی برای تحلیل سیستم‌های زیستی را بوجود می‌آورند. همانگونه که شناخته شده است، مدل‌های لوتکا-ولترا از نوع مدل‌های ریاضی با اهمیتی هستند که در حوزه ریاضیات زیستی به تشریح دینامیک جمعیت‌های چندگونه در محیط غیرخودگردان می‌پردازند. نتایج جذاب و بسیار مهمی بر رفتارهای دینامیکی سیستم‌های لوتکا-ولترا در [۲، ۱۰، ۱۱]، بیان شده است، که از آن جمله می‌توان به وجود و یکتایی جواب‌ها، ماندگاری، انقراض، رفتار مجانبی عمومی و انشعاب اشاره کرد. در سال ۲۰۲۲ در [۱۹]، آنالیز پایداری یک مدل لوتکا-ولترا تعمیم‌یافته با مشتق کسری کاپوتو بررسی شده است. اخیراً در سال ۲۰۲۳، تاثیرات مرتبه مشتق روی رفتار سیستم‌های لوتکا-ولترا کسری مطالعه شده است [۲۱]. به‌علاوه یک مدل ریاضی اصلاح شده شکار-شکارچی از مرتبه کسری معرفی و آنالیز پایداری نقاط تعادلی آن مورد مطالعه قرار گرفته شده است [۱۸].

تحلیل معادلات لوتکا-ولترا کسری که از معادلات لوتکا-ولترا کلاسیک در مدل‌سازی ریاضی با جایگزینی مشتقات مرتبه اول توسط مشتقات کسری از مرتبه α ، که در آن $0 < \alpha \leq 1$ ، بدست می‌آیند به یک موضوع جذاب در حال رشد در ریاضیات زیستی تبدیل شده است. در حقیقت، معادلات لوتکا-ولترا کسری، به دلیل این‌که جواب سیستم مرتبه کسری به مرتبه صحیح همگرا می‌شود و همچنین رفتار حقیقی آن‌ها، مورد توجه وسیعی از محققین قرار گرفته‌اند.

¹Lotka-Volterra

اکثر مدل‌های ریاضی ناشی شده از سیستم‌های لوتکا-ولترا به شکل خودگردان هستند. باید توجه داشت که براحتی نمی‌توان جواب دقیق یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از مرتبه اول را بدست آورد. از این رو به منظور بررسی رفتارهای جواب این چنین معادلاتی می‌توان از روش‌های عددی مفید به منظور شناسایی رفتار کمی جواب استفاده کرد. با اعمال یک روش عددی روی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، سیستم معادلات پیوسته به سیستم تفاضلی تبدیل می‌شود. وقتی که این روش عددی بکار گرفته می‌شود، ضروری است که سیستم معادله تفاضلی جدید شرایط مثبت بودن و رفتارهای کمی یکسانی از سیستم پیوسته نظیر پایداری و انشعاب را نشان دهد. در [۵]، نشان داده شده است که روش‌های عددی صریح نظیر اویلر^۲ پیشرو و رانگ-کوتا^۳ در ایجاد نوسان، انشعاب‌ها و آشوب ناسازگار هستند. به جای استفاده از روش‌های کلاسیک می‌توان از طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد به عنوان جایگزین برای بدست آوردن نتایج کمی بهتر و حذف ناپایداری‌های عددی استفاده کرد. این طرح‌ها برای جبران ضعف روش‌های تفاضل متناهی استاندارد، نظیر ناپایداری عددی که ممکن است با استفاده از روش‌های تفاضل متناهی استاندارد ایجاد شود، توسعه یافته‌اند. با انتخاب یک تابع مخرج مناسب به جای طول‌گام و اعمال گسسته‌سازی غیرموضعی می‌توان نتایج بهتری بدست آورد، که این مهمترین مزیت طرح‌های غیراستاندارد است. اگر طول‌گام، به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، نتایج بدست آمده بطور قابل ملاحظه‌ای تغییر نمی‌یابند اما اگر طول گام بزرگتر شود، مزیت استفاده از طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد مورد توجه قرار می‌گیرد [۸، ۱۲، ۱۳، ۱۴]. در [۲۰] آنالیز پایداری نقاط ثابت یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای سیستم دینامیکی شکار-شکارچی بررسی شده است. در یک شبکه غذایی، یک گونه پایه نامیده می‌شود اگر این گونه طعمه باشد اما شکارچی نباشد، همچنین یک گونه میانی نامیده می‌شود اگر هم طعمه و هم شکارچی باشد و همچنین بالایی نامیده می‌شود اگر تنها یک شکارچی باشد. ترکیب روابط طعمه و شکارچی در یک شبکه غذایی اشاره به ساختار تغذیه‌ای و سطوح شخصی اشاره به سطوح تغذیه‌ای می‌شود. در ادامه این مقاله، از کلمه جمعیت به معنی فراوانی یک گونه استفاده می‌کنیم. فرض کنید $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ به ترتیب جمعیت گونه‌های پایه، میانی و بالایی را در زمان t در یک شبکه غذایی نشان دهند. یک مدل قابل قبول برای ساختار تغذیه‌ای یک

²Euler³Runge-Kutta

جمعیت غذایی-شبهه در زمان t یک سیستم تعمیم یافته لوتکا-ولترا به فرم زیر است

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 - cxy - dxz, \\ y' = -ey + fxy - gyz, \\ z' = -hz + ixz + jyz, \\ x(\cdot) = x_0, \quad y(\cdot) = y_0, \quad z(\cdot) = z_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن همه پارامترهای a, b, \dots, j مثبت هستند. در این مدل، گونه پایه با جمعیت x دارای نرخ رشد ذاتی a با ظرفیت حمل محیطی $\frac{a}{b}$ و قدرت تأثیر شکار است. دو گونه دیگر، با ضرایب تعاملی c و d اندازه‌گیری می‌شوند. همچنین گونه‌های بالایی با جمعیت z از گونه‌های میانی و پایه شکار می‌کنند، که روابط تعاملی‌اشان xz و yz دارای ضرایب مثبت هستند، تحت تعامل با هر گونه دیگر افزایش می‌یابد. گونه‌های میانی با جمعیت y ، از طریق تعامل با گونه‌های پایه رشد می‌کنند اما از طریق تعامل با گونه‌های بالایی کاهش می‌یابند. این سیستم یک حالت خاص از مدل آبشار معروف لوتکا-ولترا است که توسط سیستم زیر داده می‌شود [۳]

$$x'_i(t) = x_i(t) \left(e_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j(t) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

که $x_i(t)$ جمعیت گونه‌های i ، e_i نرخ رشد یا کاهش ذاتی گونه‌های i و p_{ij} ضریب تعاملی میان گونه‌های i و j است. در این مقاله، حالت $n = 3$ را در نظر می‌گیریم و سپس از طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای پیش‌بینی جمعیت در حالت تنها گونه‌های پایه استفاده می‌کنیم، بطوریکه $p_{11} < 0$ و $p_{22} = p_{33} = 0$ در (۲.۱)، و با شکار سلسله مراتبی، به این معنی که هر گونه پی در پی گونه‌های زیرینش را شکار می‌کند. این بدان معناست که در (۲.۱) گونه‌های j گونه‌های i را شکار می‌کنند اگر و تنها اگر $j < i$ ، بطوریکه اگر $j < i$ ، آنگاه $p_{ij} < 0$ و اگر $i > j$ ، آنگاه $p_{ij} > 0$.
به منظور تجزیه و تحلیل بهتر برای سیستم، تعداد پارامترها را با استفاده از روش بدون بعد مانند [۷]، کاهش می‌دهیم.

فرض کنید

$$u(T) = \frac{b}{a}x(t), \quad v(T) = \frac{c}{a}y(t), \quad w(T) = \frac{d}{a}z(t),$$

که $T = at$ ، در نتیجه داریم

$$x'(t) = \frac{a'}{b}u'(T), \quad y'(t) = \frac{a'}{c}v'(T), \quad z'(t) = \frac{a'}{d}u'(T). \quad (۳.۱)$$

با جایگزینی (۳.۱) در (۱.۱) و نامیدن T به t ، نتیجه می‌دهد

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - u - v - w), \\ v' = v(-A + Bu - Cw), \\ w' = w(-D + Eu + Fv), \\ u(\cdot) = u., \quad v(\cdot) = v., \quad w(\cdot) = w., \end{cases} \quad (۴.۱)$$

که $A = \frac{e}{a}$, $B = \frac{f}{b}$, $C = \frac{g}{d}$, $D = \frac{h}{a}$, $E = \frac{i}{b}$ و $F = \frac{j}{c}$ با $u. = \frac{b}{a}x.$, $v. = \frac{c}{a}y.$ و $w. = \frac{d}{a}z.$

ساختار اصلی مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم، به طور مختصر به ویژگی‌های مهم ساختن طرح‌های تفاضل متناهی غیر استاندارد برای سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم و برخی تعاریف از حسابان کسری را بیان می‌کنیم. در بخش سوم، به معرفی سیستم لوتکا-ولترا مرتبه کسری می‌پردازیم و همچنین قضیه پایداری و شرایط پایداری رویترز-هورویتز^۴ کسری برای پایداری مجانبی سیستم‌های کسری داده می‌شود. در بخش چهارم، به تحلیل پایداری سیستم کسری خواهیم پرداخت. در بخش پنجم، خواص مثبت بودن و کراندارای طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد برای حل مدل شبکه غذایی لوتکا-ولترا کسری بررسی می‌شود. سرانجام، نتایج تئوری بدست آمده در بخش قبلی با روش‌های عددی اوایلر پیشرو و رانگ-کوتا مرتبه چهارم مقایسه می‌شود و نتایج عددی شبیه‌سازی شده داده می‌شود.

۲. پیشنهادها

در این بخش، برخی از تعاریف اساسی و ویژگی‌های گسسته‌سازی غیر استاندارد به همراه تئوری حسابان کسری مورد بحث قرار می‌گیرد.

⁴Routh-Hurwitz

۱.۲. طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد برای مسائل مقدار اولیه

اساس ساختار طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد، از طرح‌های تفاضل متناهی دقیق ناشی می‌شود. در [۵، ۶] می‌کنز^۵ یک رویکرد جدید به منظور توسعه طرح‌های تفاضل متناهی برای مسائل مقدار اولیه ارائه داد. تکنیک او شامل دوباره نرمال‌سازی تابع مخرج ظاهر شده در گسسته‌سازی مشتق مرتبه اول و تقریب غیرموضعی برای عبارات‌های خطی و غیرخطی در معادلات دیفرانسیل است. فواید طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد در بسیاری از کاربردهای عددی نشان داده شده است. در [۸، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷]، نامجو و همکارانش طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد را برای حل مدل‌های جمعیت، بیولوژیکی و معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای توسعه دادند. به منظور ساختن یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد، مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(\cdot) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.2)$$

که λ یک پارامتر است. فرض کنید گسسته‌سازی $t_n = nh$ داده شده است، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد توسط دو مرحله زیر استخراج می‌شود.

(آ) مشتق در معادله (۱.۲) با گسسته‌سازی از نوع پیشرو زیر جایگزین می‌شود

$$x'(t_n) \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\phi(h, \lambda)}, \quad (2.2)$$

که x_n تقریبی از $x(t_n)$ است.

(ب) عبارات‌های غیرخطی و خطی در معادله (۱.۲) با نمایش گسسته‌سازی غیرموضعی $F(t_n, x_{n+1}, x_n, \lambda)$ وابسته به این تقریب‌ها جایگزین می‌شوند. بنابراین طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد متناظر به معادله (۱.۲) به فرم زیر خواهد بود

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\phi(h, \lambda)} = F(t_n, x_{n+1}, x_n, \lambda). \quad (3.2)$$

گسسته‌سازی مشتق در معادله (۳.۲) تعمیمی از گسسته‌سازی مشتق کلاسیک است که با انتخاب $\phi(h, \lambda) = h$ بدست

⁵Mickens

می‌آید. تابع مخرج $\phi(h, \lambda)$ باید در شرط سازگاری زیر صدق کند

$$\phi(h, \lambda) = h + O(h^2), \quad (4.2)$$

که این سبب می‌شود مادامی‌که h به اندازه کافی کوچک انتخاب شود نمایش گسسته‌سازی (۲.۲) به مشتق $x'(t_n)$ همگرا شود. توابع h ، $\sin(h)$ و $(1 - e^{-\lambda h})/\lambda$ مثال‌هایی از تابع مخرج هستند که در شرط (۴.۲) صدق می‌کنند. مقالات [۵، ۶] یک رویکرد کلی برای تعیین تابع مخرج برای سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه داده‌اند. بطور کلی، برای یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی با عبارت چند جمله‌ای به فرم

$$x' = ax + \text{عبارت غیرخطی},$$

طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای عبارت خطی توسط میکنز به فرم زیر داده شده است [۶]

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\phi(h)} = ax_n + \text{عبارت غیرخطی}, \quad (5.2)$$

که در آن عبارت غیرخطی به صورت موضعی گسسته‌سازی می‌شود و تابع مخرج به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\phi(h, a) = \frac{e^{ah} - 1}{a}.$$

توجه کنید که اگر در معادله (۵.۲)، $a = 0$ ، آنگاه تابع مخرج به فرم $\phi(h) = h$ در نظر گرفته می‌شود.

اولین شرط در طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد این است که عبارت‌های غیرخطی ظاهر شده در معادله بر اساس گسسته‌سازی غیرموضعی روی یک افراز از زمان مدل بندی شوند. مثال‌های خاص از این نوع گسسته‌سازی غیراستاندارد به فرم زیر است

$$\begin{aligned} xy &\approx x_{n+1}y_n, & xy &\approx x_ny_{n+1}, \\ x^2 &\approx 2x_{n+1}x_n - x_n^2, & x^2 &\approx 2x_n \frac{x_{n+1} + x_n}{2}. \end{aligned}$$

۲.۲. حسابان کسری

امروزه، مسائل مقدار اولیه کسری به دلیل کاربرد وسیع آن‌ها در علوم مختلف مانند فیزیک، مکانیک، شیمی و مهندسی اهمیت قابل توجهی یافته‌اند [۹]. در سال‌های اخیر، رفتارهای دینامیکی معادلات دیفرانسیل کسری مورد توجه روزافزون قرار گرفته است. اگرچه مفهوم حسابان کسری هم‌زمان با حسابان صحیح مورد بحث قرار گرفت اما پیچیدگی و عدم استفاده از کاربرد مشتقات کسری، پیشرفت این شاخه از ریاضیات را تا چند دهه پیش به تاخیر انداخت. به تازگی بیشتر سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی براساس حسابان مرتبه صحیح به حسابان مرتبه کسری اصلاح شده‌اند، که این بدلیل درجه آزادی بیشتر و انعطاف‌پذیری است که می‌تواند دقیقاً با داده‌های تجربی بهتر از مدل‌سازی مرتبه صحیح سازگاری داشته باشد. به طور مثال، مبانی جدید در حوزه حسابان کسری برای اولین بار در سیستم‌های مرتبه صحیح مانند سیستم‌های ارائه شده در [۹] مورد بررسی قرار گرفته است.

در این بخش نخست تعریف مشتق کسری کاپوتو^۶ را ارائه می‌دهیم و در ادامه تقریب گرانوالد-لتینکوف^۷ را برای معادلات دیفرانسیل کسری معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $\alpha \in (0, 1)$ و $x(t)$ یک تابع حقیقی مقدار انتگرال‌پذیر باشد. مشتق کسری کاپوتو به فرم زیر تعریف

می‌شود

$${}^c D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t x'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau.$$

از اینرو تقریبی برای معادله دیفرانسیل کسری

$${}^c D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (6.2)$$

را می‌توان به فرم معادله تفاضلی زیر در نظر گرفت

$$\sum_{j=0}^{n+1} c_j^\alpha x_{n+1-j} = f(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $x_n, t_n = nh$ تقریبی از $x(t_n)$ و c_j^α ضرایب گرانوالد-لتینکوف نامیده می‌شوند که به طور بازگشتی به فرم زیر

⁶Caputo

⁷Grünwald-Letinkov

محاسبه می‌شوند

$$c_j^\alpha = h^{-\alpha}, \quad c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha, \quad j = 1, 2, \dots$$

بنابراین یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای مسئله مقدار اولیه کسری (۶.۲) به فرم زیر است

$$x_{n+1} = \frac{1}{c_n^\alpha} \left(- \sum_{j=1}^{n+1} c_j^\alpha x_{n+1-j} + f(x_{n+1}) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $c_n^\alpha = \phi(h)^{-\alpha}$ و $\phi(h) = h + O(h^2)$.

۳. مدل شبکه غذایی لوتکا-ولترا کسری

در این بخش، به معرفی مدل کسری متناظر با مدل (۴.۱) از سیستم لوتکا-ولترا می‌پردازیم. سیستم جدید توسط یک سیستم معادله دیفرانسیل کسری از مرتبه‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ به فرم زیر خواهد بود

$$\begin{cases} {}^c D^{\alpha_1} u = u(1 - u - v - w), \\ {}^c D^{\alpha_2} v = v(-A + Bu - Cw), \\ {}^c D^{\alpha_3} w = w(-D + Eu + Fv), \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن برای $i = 1, 2, 3$ ، $0 < \alpha_i \leq 1$. به منظور تجزیه و تحلیل پایداری سیستم کسری (۱.۳) قضیه پایداری برای سیستم‌های کسری و شرایط پایداری رویترز-هورویتز برای مسائل مقدار اولیه کسری معرفی می‌شوند.

قضیه ۱.۳. [۴] مسئله مقدار اولیه کسری زیر را در نظر بگیرید

$${}^c D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (2.3)$$

که $x \in \mathbb{R}^n$ و $0 < \alpha \leq 1$. در این صورت نقاط تعادلی سیستم (۲.۳) پایدار مجانبی موضعی هستند هرگاه همه مقادیر ویژه λ از ماتریس ژاکوبی متناظر با نقطه تعادلی، در شرط $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ صدق کنند.

ماتریس ژاکوبی سیستم (۱.۳) در نقطه تعادلی $E = (u, v, w)$ به فرم زیر محاسبه می‌شود

$$J(E) = \begin{pmatrix} 1 - 2u - v - w & -u & -u \\ Bv & -A + Bu - Cw & -Cv \\ Ew & Fw & -D + Eu + Fv \end{pmatrix}. \quad (۳.۳)$$

در ادامه شرایط پایداری موضعی متناظر با نقطه تعادلی مدل بیان می‌شوند. فرض کنید $D(P)$ ، مبین متناظر با چندجمله‌ای

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (۴.۳)$$

باشد که به صورت زیر تعریف شده باشد

$$D(P) = 1 \lambda a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2)^2 - 4 a_3 (a_1)^3 - 4 (a_2)^3 - 2 \gamma (a_3)^2.$$

با استفاده از نتایج بیان شده در [۱] شرایط پایداری برای سیستم مرتبه کسری (۲.۳) به صورت زیر است

(آ) اگر $D(P) > 0$ ، آنگاه شرایط لازم و کافی برای آنکه نقطه تعادلی E ، پایدار مجانبی موضعی باشد این است که

$$a_1 > 0 \text{ و } a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

(ب) اگر $D(P) < 0$ ، $a_1 \geq 0$ ، $a_2 \geq 0$ و $a_3 > 0$ ، آنگاه نقطه تعادلی E ، برای $\alpha < \frac{2}{3}$ پایدار مجانبی موضعی

است. همچنین، اگر $D(P) < 0$ ، $a_1 < 0$ ، $a_2 < 0$ و $\alpha > \frac{2}{3}$ ، آنگاه همه ریشه‌های معادله (۴.۳) در شرط

$$|\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{3} \text{ صدق می‌کنند.}$$

(پ) اگر $D(P) < 0$ ، $a_1 > 0$ ، $a_2 > 0$ و $a_1 a_2 - a_3 = 0$ ، آنگاه نقطه تعادلی E به‌ازای هر $\alpha \in [0, 1)$ پایدار

مجانبی موضعی است.

۴. تحلیل پایداری سیستم لوتکا-ولترا کسری

برای تعیین نقاط تعادلی سیستم (۱.۳)، فرض کنید

$$\begin{cases} u(1 - u - v - w) = 0, \\ v(-A + Bu - Cw) = 0, \\ w(-D + Eu + Fv) = 0. \end{cases}$$

لذا نقاط تعادلی عبارتند از $E_1 = (0, \frac{D}{F}, -\frac{A}{C})$, $E_2 = (1, 0, 0)$, $E_3 = (\frac{D}{E}, 0, 1 - \frac{D}{E})$, $E_4 = (0, 0, 0)$ و $E_5 = (d_1, d_2, d_3)$ که

$$d_1 = \frac{AF - CD + CF}{BF - CE + CF},$$

$$d_2 = \frac{-AE + BD + CD - CE}{BF - CE + CF},$$

$$d_3 = \frac{AE - AF - BD + BF}{BF - CE + CF}.$$

تنها نقاط تعادلی E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 دارای معنی زیست‌شناسی هستند. مولفه‌های نقاط تعادلی E_1, E_3, E_4 و E_5 نامنفی هستند هرگاه

$$A < B, \quad D < E, \quad \frac{A}{B} < \frac{AF - CD + CF}{BF - CE + CF} < \frac{D}{E}.$$

شرایط پایداری موضعی نقاط تعادلی به شرح زیر است.

(آ) در نقطه تعادلی E_1 ، ماتریس ژاکوبی (۳.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$J(0, \frac{D}{F}, -\frac{A}{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}.$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = -A$ و $\lambda_3 = -D$. پس نقطه تعادلی E ، ناپایدار است.

(ب) در نقطه تعادلی E_2 ، ماتریس ژاکوبی (۳.۳) به فرم زیر است

$$J(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -A+B & 0 \\ 0 & 0 & E-D \end{pmatrix}.$$

از این رو، مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = -A+B$ و $\lambda_3 = E-D$. بنابراین با استفاده

از قضیه ۳.۱، نقطه تعادلی E_2 پایدار مجانبی موضعی است اگر و تنها اگر $A > B$ و $D > E$.

(پ) در نقطه تعادلی E_3 ماتریس ژاکوبی متناظر با آن برابر است با

$$J\left(\frac{D}{E}, 0, 1 - \frac{D}{E}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{D}{E} & -\frac{D}{E} & -\frac{D}{E} \\ 0 & -\frac{EC-DB+EA-CD}{E} & 0 \\ -D+E & \frac{(-D+E)F}{E} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

بنابراین معادله مشخصه متناظر با ماتریس ژاکوبی (۱.۴) به فرم زیر است

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

که

$$a_1 = \frac{EC - DB + EA - CD + D}{E},$$

$$a_2 = \frac{D(-DE + E^2 + EC - DB + EA - CD)}{E^2},$$

$$a_3 = \frac{(-D + E)D(EC - DB + EA - CD)}{E^2}.$$

همچنین مبین $D(P)$ ، متناظر با چندجمله‌ای $P(\lambda)$ ، به فرم زیر است

$$D(P) = \frac{(D^2 + 4ED^2 - 4DE^2)(DE(E - D) - D\xi + \xi^2)^2}{E^6},$$

که در آن $\xi = EC - DB + EA - CD$ مقدار ویژه متناظر با ماتریس ژاکوبی (۱.۴) عبارتند از

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{(EC - DB + EA - CD)}{E}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \frac{D - \sqrt{D^2 + 4ED^2 - 4DE^2}}{E}, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} \frac{D + \sqrt{D^2 + 4ED^2 - 4DE^2}}{E}.\end{aligned}$$

اگر $E > D$ و $AE + CE > BD + CD$ آنگاه $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ و $a_1 a_2 - a_3 > 0$. حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: اگر $D^2 + 4ED^2 - 4DE^2 > 0$ ، آنگاه $D(P) > 0$. در نتیجه طبق قسمت (آ) شرایط پایداری رویترز-هورویتز، نقطه تعادلی E_3 به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، پایدار مجانبی موضعی است.

حالت ۲: اگر $D^2 + 4ED^2 - 4DE^2 < 0$ ، آنگاه $D(P) < 0$. از اینرو بر طبق قسمت (ب) شرایط پایداری رویترز-هورویتز نقطه تعادلی E_3 به ازای هر $\frac{2}{3} < \alpha < 1$ ، پایدار مجانبی موضعی است.

(ت) ماتریس ژاکوبی در نقطه تعادلی E_4 ، به فرم زیر است

$$J\left(\frac{A}{B}, 1 - \frac{A}{B}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{A}{B} & -\frac{A}{B} & -\frac{A}{B} \\ B - A & \cdot & \frac{(A-B)C}{B} \\ \cdot & \cdot & \frac{-DB+EA-FA+FB}{B} \end{pmatrix}.$$

بنابراین معادله مشخصه ماتریس ژاکوبی به فرم زیر است

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

که

$$a_1 = -\frac{-DB + EA - FA + FB - A}{B},$$

$$a_2 = -\frac{A(-DB + EA - FA + FB + AB - B^2)}{B^2},$$

$$a_3 = \frac{(-DB + EA - FA + FB)(A - B)A}{B^2}.$$

همچنین

$$D(P) = \frac{(A^2 + 4BA^2 - 4AB^2)(-v^2 - Av + AB(A - B))^2}{B^6},$$

که $v = -DB + EA - FA + FB$. بنابراین، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی متناظر با نقطه تعادلی E_4 عبارتند از

$$\lambda_1 = \frac{-DB + EA - FA + FB}{B},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{A - \sqrt{A^2 + 4BA^2 - 4AB^2}}{B},$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \frac{A + \sqrt{A^2 + 4BA^2 - 4AB^2}}{B}.$$

اگر $B > A$ و $AF + DB > AE + BF$ ، آنگاه $a_1 > 0$ ، $a_2 > 0$ ، $a_3 > 0$ و $a_1 a_2 - a_3 > 0$. اینک دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: اگر $A^2 + 4BA^2 - 4AB^2 > 0$ ، آنگاه $D(P) > 0$. لذا بر طبق قسمت (آ) شرایط پایداری رویترز-هورویتز، نقطه تعادلی E_4 ، به ازای هر $0 < \alpha < 1$ پایدار مجانبی موضعی است.

حالت ۲: اگر $A^2 + 4BA^2 - 4AB^2 < 0$ ، آنگاه $D(P) < 0$ و لذا طبق قسمت (ب) شرایط پایداری رویترز-هورویتز نقطه تعادلی E_4 ، به ازای هر $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ ، پایدار مجانبی موضعی است.

(ث) برای نقطه تعادلی E_5 ، محاسبه ماتریس $J(E_5)$ بسیار پیچیده است که این موضوع بررسی پایداری نقطه تعادلی E_5 را غیر ممکن می‌سازد.

۵. طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد برای مدل لونا-ولترا کسری

بر اساس معادلات سیستم (۱.۳) و استفاده از روش میکنز با جایگزینی طول گام h با تابع مخرج مناسب، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_1} u_{n+1-j} &= u_n - u_{n+1}u_n - u_{n+1}v_n - u_{n+1}w_n, \\ \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_2} v_{n+1-j} &= -Av_{n+1} + Bu_{n+1}v_n - Cv_{n+1}w_n, \\ \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_3} w_{n+1-j} &= -Dw_{n+1} + Eu_{n+1}w_n + Fv_{n+1}w_n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

این طرح را می‌توان به فرم سیستم تفاضلی صریح زیر نوشت

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_1} u_{n+1-j} + u_n}{c^{\alpha_1} + u_n + v_n + w_n}, \\ v_{n+1} &= \frac{-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_2} v_{n+1-j} + Bu_{n+1}v_n}{c^{\alpha_2} + A + Cv_n}, \\ w_{n+1} &= \frac{-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_3} w_{n+1-j} + Eu_{n+1}w_n + Fv_{n+1}w_n}{c^{\alpha_3} + D}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

که در آن

$$c^{\alpha_1} = \phi_1(h)^{-\alpha_1}, \quad c^{\alpha_2} = \phi_2(h)^{-\alpha_2}, \quad c^{\alpha_3} = \phi_3(h)^{-\alpha_3},$$

به طوری که

$$\phi_1(h) = e^h - 1, \quad \phi_2(h) = \frac{e^{Ah} - 1}{A}, \quad \phi_3(h) = \frac{e^{Dh} - 1}{D}.$$

گزاره ۱.۵. طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (۲.۵) برای $1 > \alpha > 0$ ، خاصیت مثبت بودن جواب‌ها را حفظ می‌کند.

اثبات. چون به ازای $1 \leq i \leq 3$ ، $c_i^{\alpha} > 0$ ، لذا براساس رابطه بازگشتی

$$c_j^{\alpha_i} = \left(1 - \frac{1 + \alpha_i}{j}\right) c_{j-1}^{\alpha_i}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

به ازای هر $0 < j < \alpha_i$ ، بنابراین طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (۲.۵) برای هر $1 > \alpha_i > 0$ ، در خاصیت مثبت بودن صدق می‌کند.

به منظور کراندار بودن جواب‌های عددی تولید شده سیستم تفاضلی (۱.۵)، نخست لم زیر را ثابت می‌کنیم.

۲.۵. لم اگر $L_1 = \max\{u_0, 1\}$ ، آنگاه به ازای هر $n \geq 0$ ، $u_n \leq L_1$.

اثبات. داریم $u_0 \leq L_1$ فرض کنید به ازای هر $k \leq n$ ، $u_k \leq L_1$ در این صورت داریم

$$-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha} u_{n+1-j} \leq c_0^{\alpha} L_1.$$

چون $u_n \leq L_1$ ، بنابراین

$$u_{n+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha} u_{n+1-j} + u_n}{c_0^{\alpha} + u_n + v_n + w_n} \leq \frac{-\sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha} u_{n+1-j} + u_n}{c_0^{\alpha} + u_n} \leq L_1.$$

□

بنابراین به ازای هر n ، $u_n \leq L_1$.

قضیه ۳.۵. فرض کنید $M = \max\{\frac{c_i^{\alpha}}{c_j^{\alpha}} | 1 \leq i, j \leq 3\}$ ، اگر $\alpha = \min\{\frac{C}{F}, \frac{B}{E}\}$ ، $L_2 = \max\{v_0, \frac{BL_1}{A}\}$ و

$$L_3, \text{ آنگاه } w, \frac{BL_1}{\alpha D}$$

$$Bu_n + v_n + \alpha w_n \leq M(BL_1 + L_2 + \alpha L_3).$$

اثبات. نخست به ازای هر k ، نابرابری زیر را ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned} & B|c_{n+1-k}^{\alpha_1}|u_k + |c_{n+1-k}^{\alpha_2}|v_k + \alpha|c_{n+1-k}^{\alpha_3}|w_k \\ & \leq B|c_{n+1-k}^{\alpha_1}|L_1 + |c_{n+1-k}^{\alpha_2}|L_2 + \alpha|c_{n+1-k}^{\alpha_3}|L_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

اگر $k = 0$ ، آنگاه درستی نامساوی واضح است. اکنون فرض کنید به ازای هر $0 \leq k \leq n$ ، نامساوی درست باشد. قرار دهید

$$S = Bu_n + (\alpha E - B)u_{n+1}w_n - Bu_{n+1}u_n - Av_{n+1} + (\alpha F - C)v_{n+1}w_n - D\alpha w_{n+1}.$$

اگر $S \geq 0$ ، آنگاه $Bu_n \leq BL_1$ ، $Av_{n+1} + \alpha Dw_{n+1} \leq Bu_n \leq BL_1$. بنابراین $v_{n+1} \leq \frac{BL_1}{A}$ و $w_{n+1} \leq \frac{BL_1}{\alpha D}$. لذا

$$Bc_j^{\alpha_1} u_{n+1} + c_j^{\alpha_2} v_{n+1} + \alpha c_j^{\alpha_3} w_{n+1} \leq Bc_j^{\alpha_1} L_1 + c_j^{\alpha_2} L_2 + \alpha c_j^{\alpha_3} L_3.$$

بنابراین در این حالت نامساوی برای $k = n + 1$ برقرار است. حال فرض کنید $S < 0$ ، لذا

$$B \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_1} u_{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_2} v_{n+1-j} + \alpha \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{\alpha_3} w_{n+1-j} \leq 0.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & Bc_j^{\alpha_1} u_{n+1} + c_j^{\alpha_2} v_{n+1} + \alpha c_j^{\alpha_3} w_{n+1} \\ & \leq - \sum_{j=1}^{n+1} (Bc_j^{\alpha_1} u_{n+1-j} + c_j^{\alpha_2} v_{n+1-j} + \alpha c_j^{\alpha_3} w_{n+1-j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\sum_{j=1}^{n+1} (Bc_j^{\alpha_1} L_1 + c_j^{\alpha_2} L_2 + \alpha c_j^{\alpha_3} L_3) \\
&= -BL_1 \sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_1} - L_2 \sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_2} - \alpha L_3 \sum_{j=1}^{n+1} c_j^{\alpha_3} \\
&\leq BL_1 c^{\alpha_1} + L_2 c^{\alpha_2} + \alpha L_3 c^{\alpha_3}.
\end{aligned}$$

بنابراین نامساوی (۳.۵) برای هر k درست است. اکنون با کمک استقراء به بررسی درستی نامساوی موجود در صورت قضیه می‌پردازیم. اگر $n = 0$ ، درستی نامساوی واضح است. اکنون فرض کنید برای $k = n$ ، نامساوی داده شده درست باشد. قرار دهید $k = n + 1$ ، بنابراین از نامساوی ثابت شده قبل داریم

$$Bc^{\alpha_1} u_{n+1} + c^{\alpha_2} v_{n+1} + \alpha c^{\alpha_3} w_{n+1} \leq BL_1 c^{\alpha_1} + L_2 c^{\alpha_2} + \alpha L_3 c^{\alpha_3}.$$

فرض کنید $h^* = \min\{c^{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq 3\}$ در نتیجه

$$\begin{aligned}
&Bu_{n+1} + v_{n+1} + \alpha w_{n+1} \\
&\leq B \frac{c^{\alpha_1}}{h^*} u_{n+1} + \frac{c^{\alpha_2}}{h^*} v_{n+1} + \alpha \frac{c^{\alpha_3}}{h^*} w_{n+1} \\
&\leq \frac{1}{h^*} (Bc^{\alpha_1} L_1 + c^{\alpha_2} L_2 + \alpha c^{\alpha_3} L_3) \\
&= B \frac{c^{\alpha_1}}{h^*} L_1 + \frac{c^{\alpha_2}}{h^*} L_2 + \alpha \frac{c^{\alpha_3}}{h^*} L_3 \\
&\leq BML_1 + ML_2 + \alpha ML_3 \\
&= M(BL_1 + L_2 + \alpha L_3).
\end{aligned}$$

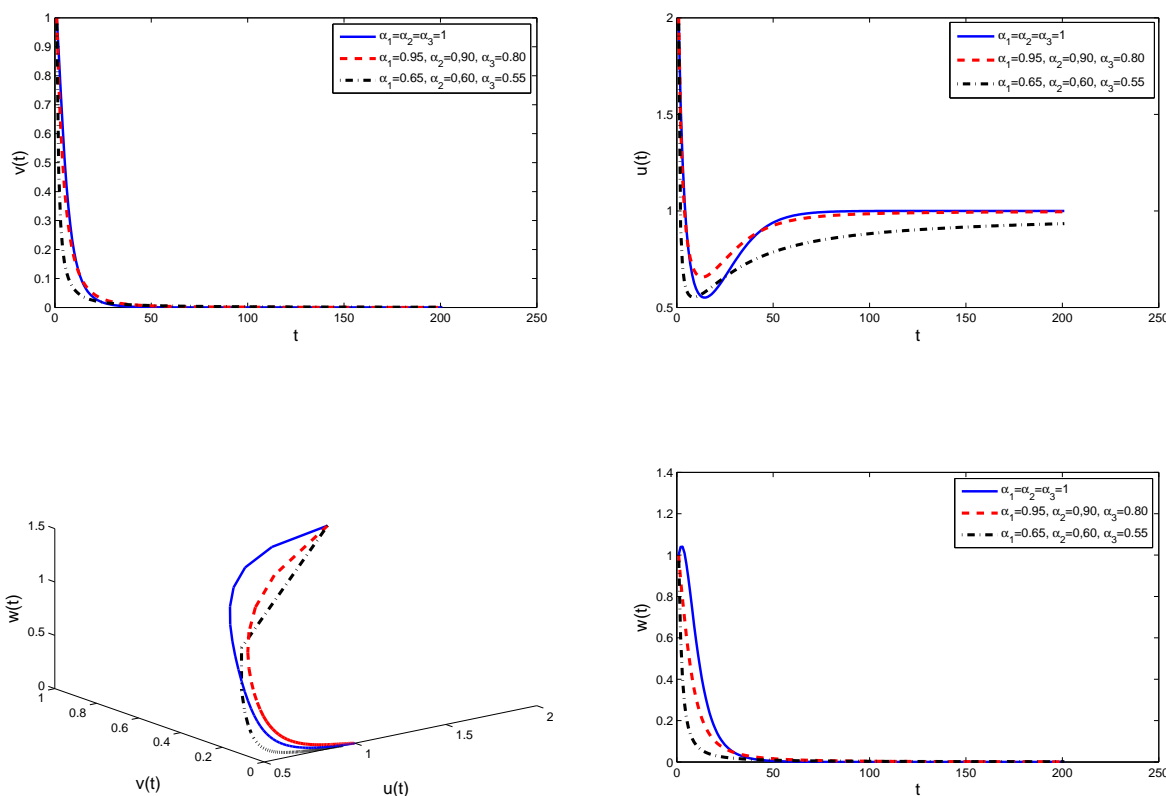
□

ازاین‌رو نامساوی به ازای هر $n \geq 0$ ، برقرار است.

۶. نتایج عددی و تحلیل زیست‌شناسی

در این بخش، شبیه‌سازی عددی سیستم لوتکا-ولترا مرتبه کسری بررسی شده است. با استفاده از این شبیه‌سازی‌ها رفتار

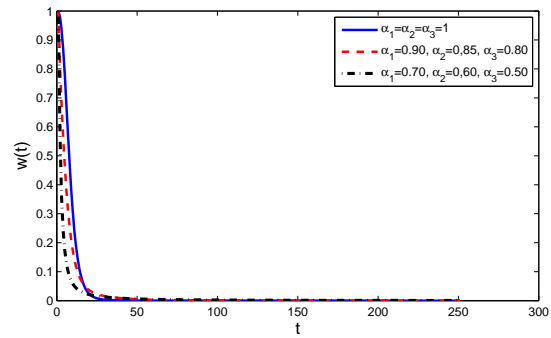
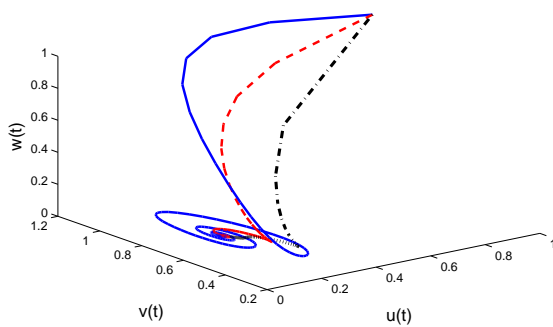
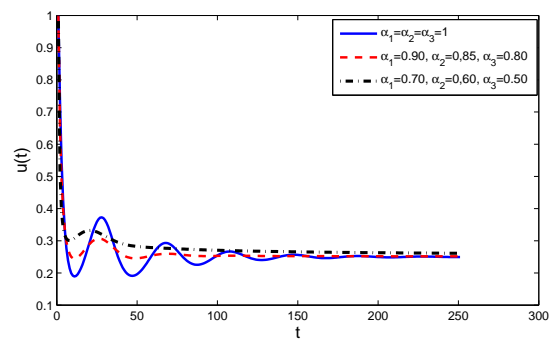
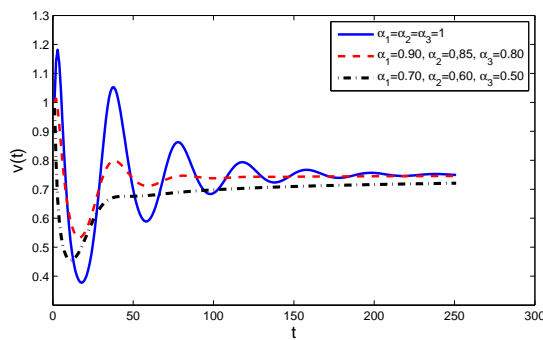
مرتب‌ه مشتق کسری را بر پایداری نقاط تعادل این سیستم نشان خواهیم داد. به علاوه جمعیت گونه‌های پایه، میانی و بالایی که از دیدگاه زیست‌شناسی اهمیت ویژه‌ای دارد را با استفاده از این شبیه‌سازی‌ها مطالعه خواهیم کرد. در شکل ۱، مسیر سیستم لوتکا-ولترا کسری به ازای مقادیر متفاوت $0 < \alpha_i \leq 1$ و پارامترهای $A = 2, B = 1, C = 1, D = 2, E = 1$ و $F = 1$ ، با شرط اولیه $(u(0), v(0), w(0)) = (1, 1, 1)$ ، و انتخاب طول‌گام $h = 0.1$ نشان داده شده است. با انتخاب این پارامترها نقاط تعادلی سیستم (۱.۳) عبارتند از $E_1 = (0, 0, 0)$ و $E_2 = (1, 0, 0)$ ، که تنها نقطه تعادلی پایدار آن $(1, 0, 0)$ خواهد بود. این شکل تأیید می‌کند که اگر نرخ مرگ A ، از گونه‌های میانی بیشتر از نرخ تعامل B ، بین گونه‌های پایه و بالایی باشد، و همچنین نرخ مرگ D ، از گونه‌های بالایی از نرخ تعامل E ، بین گونه‌های پایه و بالایی بیشتر باشد، آنگاه جمعیت گونه‌های پایه به ظرفیت حمل نزدیک می‌شود درحالی‌که گونه‌های میانی و بالایی منقرض می‌شوند.



شکل ۱: نمودار جمعیت‌های u, v, w ، نسبت به زمان برای مقادیر مختلف $0 < \alpha_i \leq 1$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، با انتخاب طول‌گام $h = 0.1$.

در شکل ۲، مسیر سیستم لوتکا-ولترا کسری (۱.۳) با مقادیر $A = 1, B = 4, C = 1, D = 2, E = 1$ و

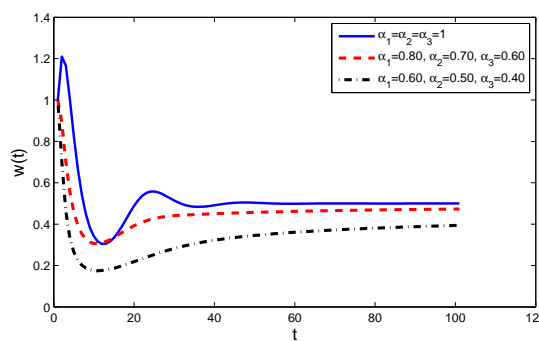
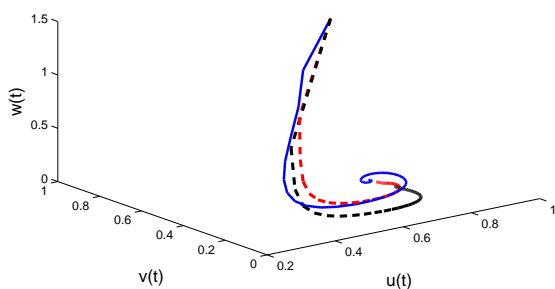
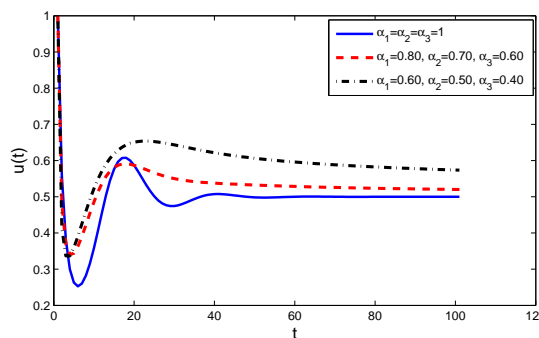
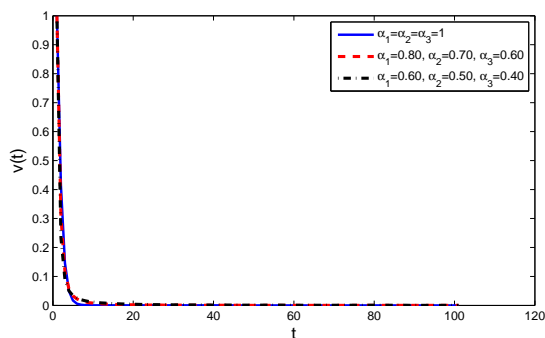
$F = 1$ ، تحت شرط اولیه $(u(0), v(0), w(0)) = (1, 1, 1)$ و انتخاب طول گام $h = 0.2$ ، برای مرتبه‌های مشتق کسری متفاوت نشان داده شده است. در این حالت نقاط تعادلی سیستم عبارتند از $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ و $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$. از این شکل استنباط می‌شود، چون نرخ مرگ D ، از گونه‌های بالایی بیشتر از نرخ تعامل E ، بین گونه‌های بالایی و پایه است و همچنین اگر نرخ مرگ A ، از گونه‌های میانی کوچکتر از نرخ تعامل B ، بین گونه‌های بالایی و میانی باشد، آنگاه جمعیت گونه‌های پایه به $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}$ میل می‌کند درحالی‌که جمعیت گونه‌های میانی به $1 - \frac{A}{B}$ میل می‌کند. در این حالت گونه‌های بالایی منقرض می‌شوند.



شکل ۲: نمودار جمعیت‌های u ، v و w ، نسبت به زمان برای مقادیر مختلف $0 < \alpha_i \leq 1$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، با انتخاب طول گام $h = 0.2$.

در شکل ۳، وضعیت گونه‌های پایه، میانی و بالایی سیستم لوتکا-ولترا کسری با انتخاب مقادیر $A = 2$ ، $B = 1$ ، $C = 1$ ، $D = 1$ ، $E = 2$ و $F = 1$ تحت شرط اولیه $(u(0), v(0), w(0)) = (1, 1, 1)$ با انتخاب طول گام $h = 0.5$ همراه با مرتبه‌های مشتق مساوی یک و متفاوت نشان داده شده است، که به نقطه تعادلی $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$ پایدار خواهد بود. به طور کلی، اگر نرخ مرگ D ، از گونه‌های بالایی کوچکتر از نرخ تعامل E ، بین گونه‌های بالایی و پایه باشد و

همچنین نرخ مرگ A ، از گونه‌های میانی بیشتر از نرخ تعامل B ، بین گونه‌های بالایی و میانی باشد، آنگاه جمعیت گونه‌های پایه به $\frac{D}{E}$ و جمعیت گونه‌های بالایی به $1 - \frac{D}{E}$ میل می‌کند در حالی که گونه‌های میانی رو به انقراض می‌روند.



شکل ۳: نمودار جمعیت‌های u ، v و w ، نسبت به زمان برای مقادیر مختلف $0 < \alpha_i \leq 1$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، با انتخاب طول گام $h = 0.5$.

در ادامه نشان می‌دهیم که برای انتخاب مناسب ثابت‌های A و $C - F$ ، یک مقدار B وجود دارد که با انتخاب آن تغییری در خواص پایداری ایجاد می‌شود. با در نظر گرفتن $A = 1$ ، $C = 1$ ، $D = 1$ ، $E = 4$ و $F = 1$ به وضعیت پایداری نقطه تعادلی $E_B = (\frac{1}{B-3}, \frac{B-7}{B-3}, \frac{3}{B-3})$ خواهیم پرداخت بطوری‌که نقطه تعادلی E_B به ازای $B \geq 7$ ، یک نقطه تعادلی پایدار است.

چندجمله‌ای متناظر با ماتریس ژاکوبی این نقطه تعادلی به فرم

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{B-3}\lambda^2 + \frac{B^2 - 4B - 9}{(B-3)^2}\lambda + \frac{3B - 21}{(B-3)^2}$$

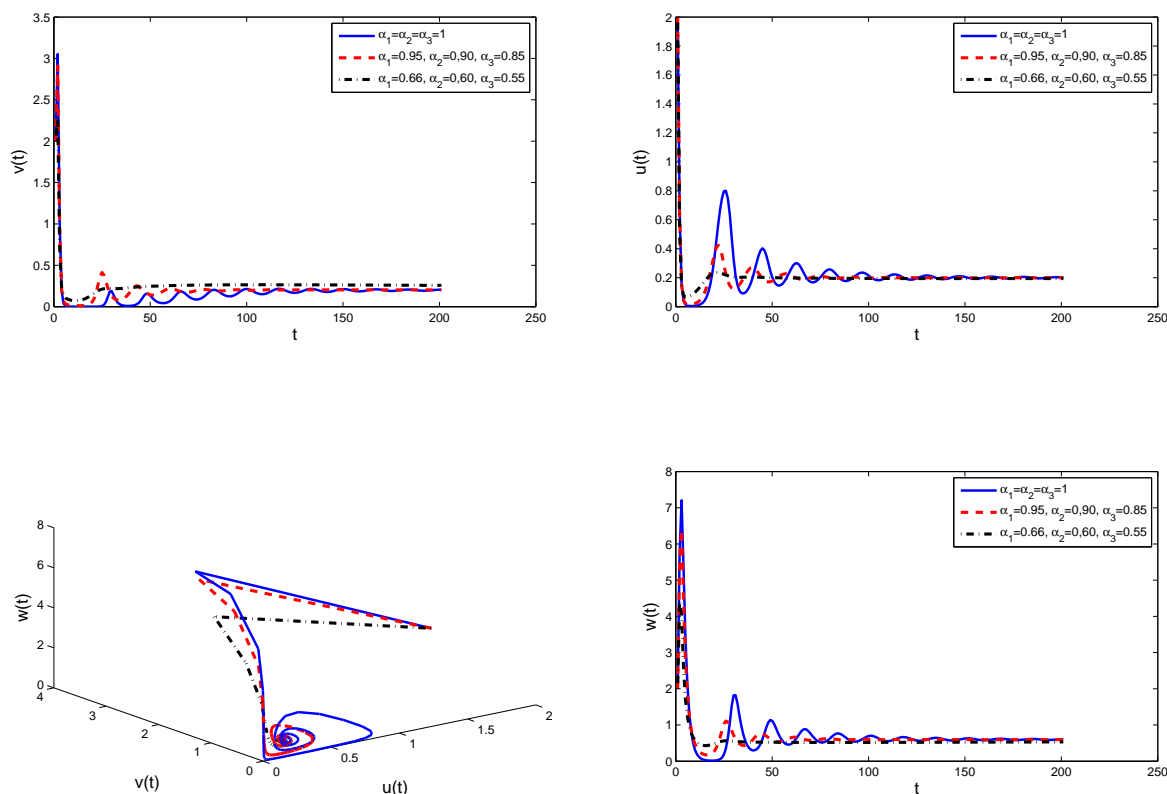
است، که در آن

$$a_1 = \frac{1}{B-3}, \quad a_2 = \frac{B^2 - 4B - 9}{(B-3)^2}, \quad a_3 = \frac{3B-21}{(B-3)^2}.$$

اگر $B > 7$ ، آنگاه $a_1 > 0$ ، $a_2 > 0$ ، $a_3 > 0$ و

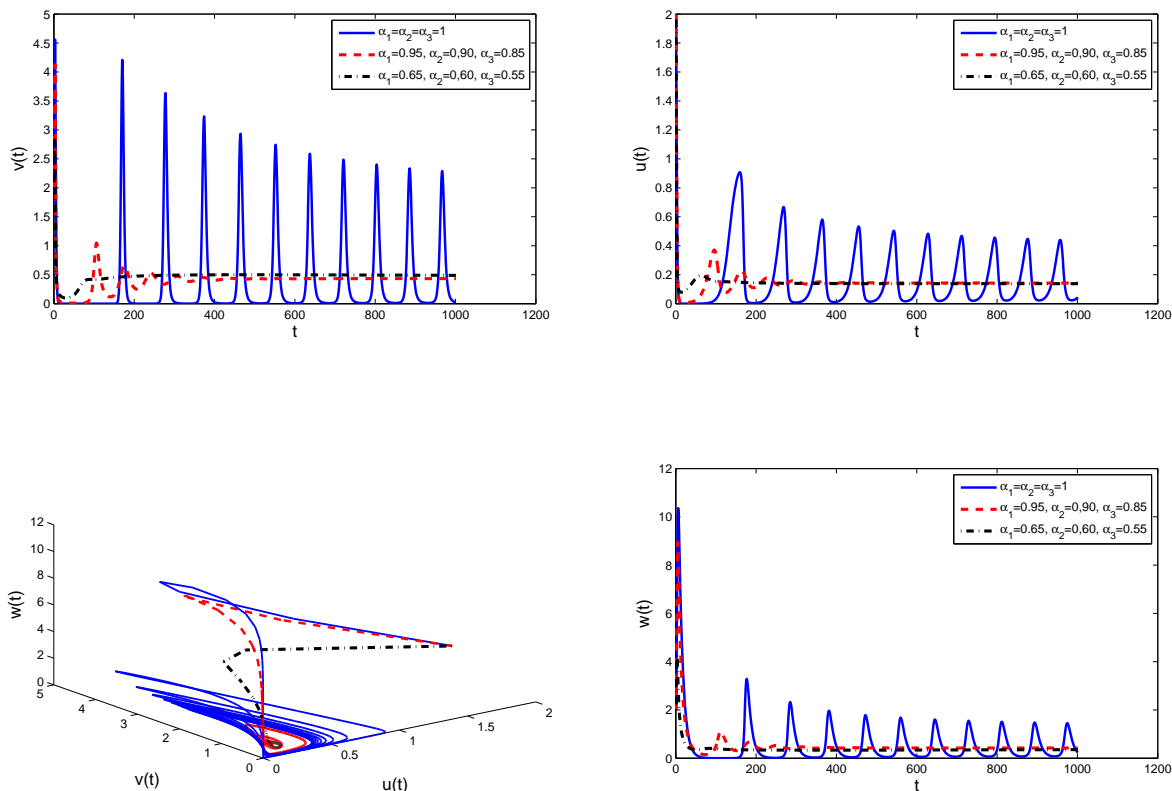
$$D(P) = -\frac{4(B^6 - 12B^5 + 68B^4 - 872B^3 + 7739B^2 - 26616B + 28656)}{(B-3)^6} < 0.$$

در نتیجه، طبق قسمت (ب) شرایط پایداری رویتر-هورویتز نقطه تعادلی E_B به ازای $\frac{2}{3} < \alpha$ ، پایدار مجانبی موضعی است. شکل ۴ تحلیل سیستم لوتکا-ولترا کسری (۱.۳) به ازای مرتبه‌های کسری متفاوت با انتخاب مقادیر $A = 1$ ، $B = 8$ ، $C = 1$ ، $D = 1$ ، $E = 4$ و $F = 1$ به همراه شرط اولیه $(u(0), v(0), w(0)) = (2, 2, 2)$ با انتخاب طول گام $h = 0.5$ نشان می‌دهد. با انتخاب این مقادیر نقاط تعادلی عبارتند از $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, 0)$ ، $(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ و $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ ، که تنها نقطه تعادلی پایدار $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ است.



شکل ۴: نمودار جمعیت‌های u ، v و w ، نسبت به زمان برای مقادیر مختلف $0 < \alpha_i \leq 1$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، با انتخاب طول گام $h = 0.5$.

در شکل ۵، وضعیت گونه‌های سیستم لوتکا-ولترا کسری با در نظر گرفتن مقادیر $A = 1$ ، $B = 11$ ، $C = 1$ ، $D = 1$ ، $E = 4$ و $F = 1$ ، تحت شرط اولیه $(u(0), v(0), w(0)) = (2, 2, 2)$ با طول گام $h = 0.1$ ، نشان داده شده است. این شکل تایید می‌کند که نقطه تعادلی $(\frac{1}{V}, \frac{3}{V}, \frac{3}{V}) = (d_1, d_2, d_3)$ پایدار مجانبی موضعی است.



شکل ۵: نمودار جمعیت‌های u, v و w ، نسبت به زمان برای مقادیر متفاوت $0 < \alpha_i \leq 1$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، با انتخاب طول گام $h = 0.1$.

در جدول‌های ارائه شده، طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد پیشنهاد شده برای سیستم (۴.۱) با روش‌های اویلر پیشرو و رانگ-کوتا کلاسیک مرتبه چهار مقایسه شده است. همانگونه که از این جدول‌ها مشاهده می‌شود طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد پیشنهاد شده حتی به ازای انتخاب طول گام‌های بزرگ خاصیت پایداری عددی را حفظ می‌کند درحالی‌که برای روش‌های اویلر و رانگ-کوتا خاصیت پایداری عددی به ازای طول گام‌های بزرگ حفظ نمی‌شود. علاوه بر این هزینه محاسباتی طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد برای طول گام‌های بزرگ به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

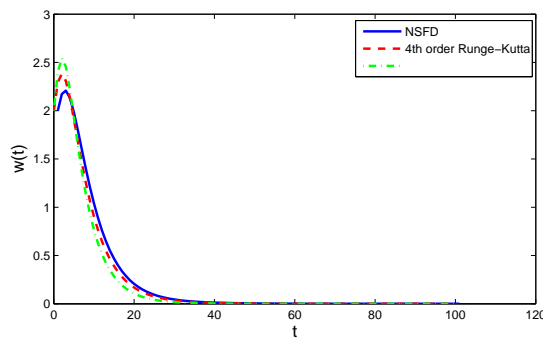
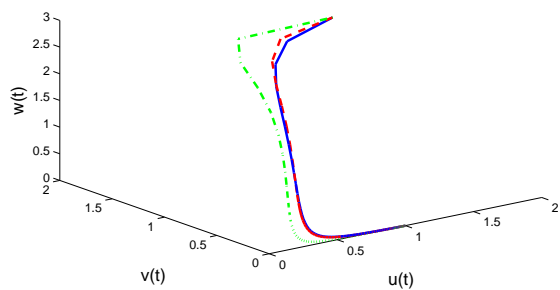
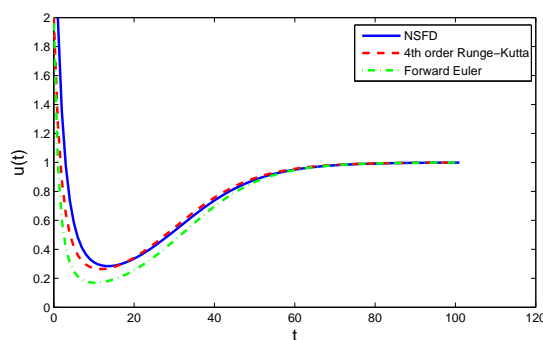
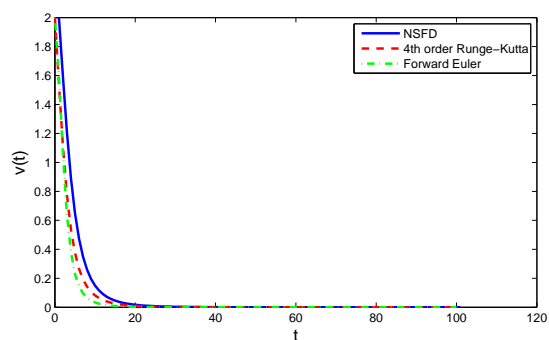
طرح غیراستاندارد	رنگ-کوتا	اوایلر	طول گام
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۰۰۱
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۱
پایدار	پایدار	ناپایدار	۰/۲
پایدار	پایدار	ناپایدار	۰/۵
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱۰

جدول ۱: نتایج کیفی نقطه تعادلی E_2 ، با انتخاب طول گام‌های زمانی متفاوت.

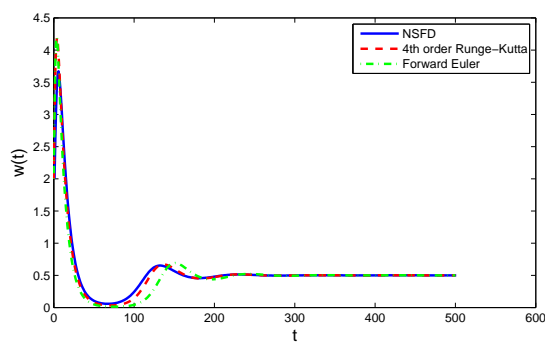
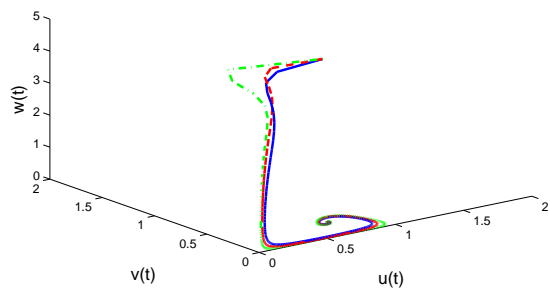
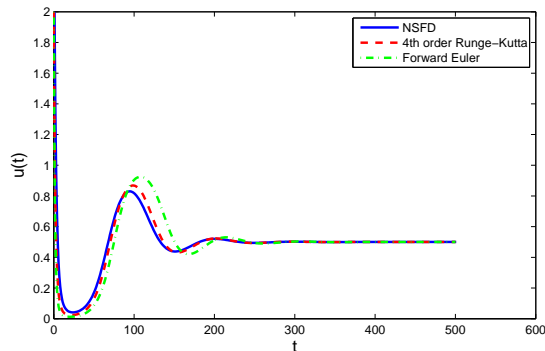
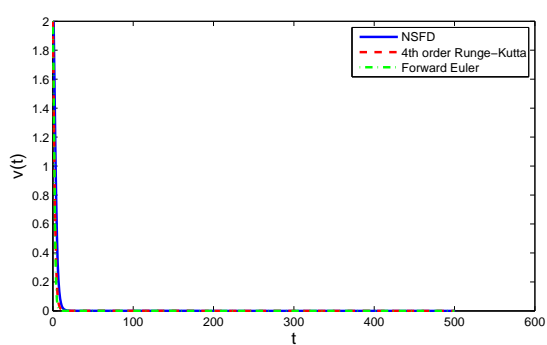
طرح غیراستاندارد	رنگ-کوتا	اوایلر	طول گام
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۰۰۱
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۱
پایدار	پایدار	ناپایدار	۰/۴
پایدار	پایدار	ناپایدار	۰/۵
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱۰

جدول ۲: نتایج کیفی نقطه تعادلی E_3 ، با انتخاب طول گام‌های زمانی متفاوت.

در شکل‌های ۶ و ۷، پایداری جواب‌های عددی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد به نقاط تعادلی E_2 و E_3 ، نشان داده شده است و همچنین روش‌های رنگ-کوتا مرتبه چهار و اوایلر پیشرو با طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد مقایسه شده‌اند.



شکل ۶: مقایسه طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد، با روش‌های رانگ-کوتا مرتبه چهار و اویلر پیشرو برای نقطه تعادلی پایدار E_2 با انتخاب طول گام $h = 0.1$.



شکل ۷: مقایسه طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد، با روش‌های رنگ-کوتا مرتبه چهار و اوایلر پیشرو برای نقطه تعادلی E_3 ، با انتخاب طول گام $h = 0.1$.

در جدول‌های ۳ و ۴، نتایج پایداری طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد از نقاط تعادلی E_4 و E_5 ، با روش‌های کلاسیک اویلر پیشرو و رانگ-کوتا مرتبه چهار برای طول گام‌های متفاوت h مقایسه شده است. اگر طول گام به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، نتایج طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد مشابه نتایج دو روش عددی دیگر است، اما اگر طول گام بزرگتر انتخاب شود، آنگاه برتری طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد به وضوح دیده می‌شود.

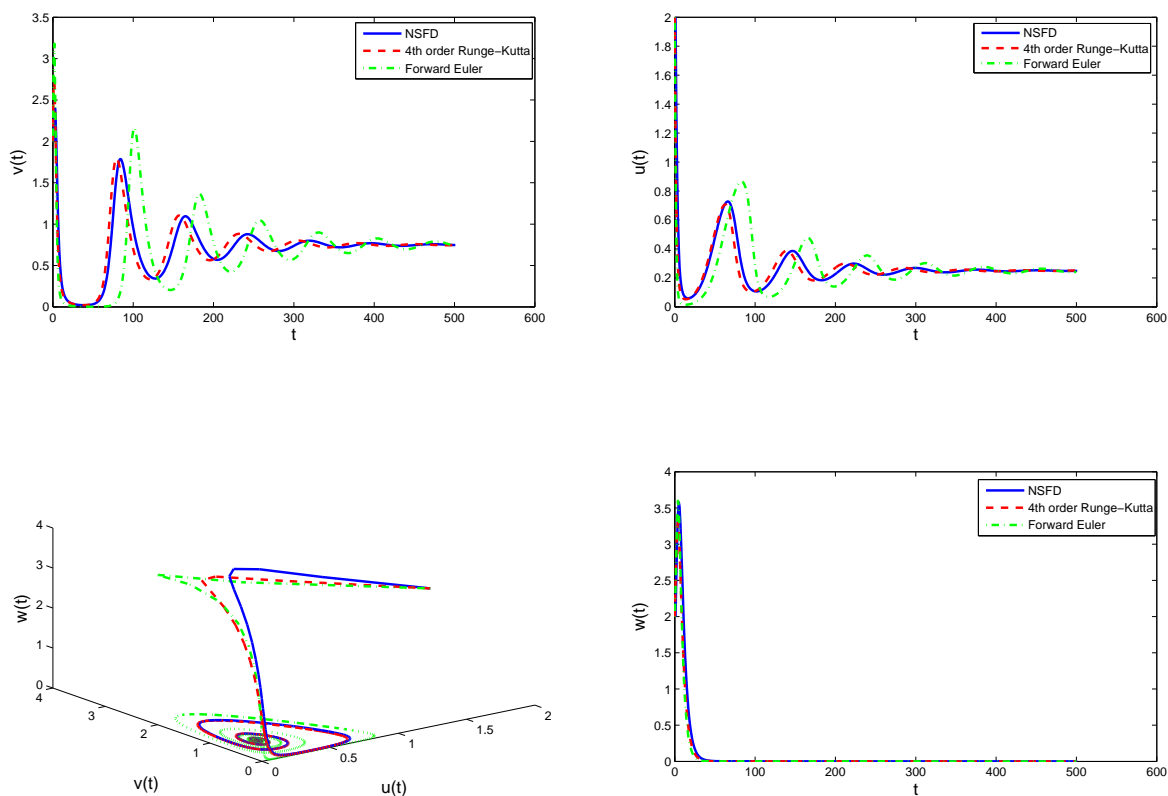
طرح غیراستاندارد	رانگ-کوتا	اویلر	طول گام
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۰۰۱
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۰/۴
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۰/۵
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱۰

جدول ۳: نتایج کیفی نقطه تعادلی E_4 ، با انتخاب طول گام‌های زمانی متفاوت.

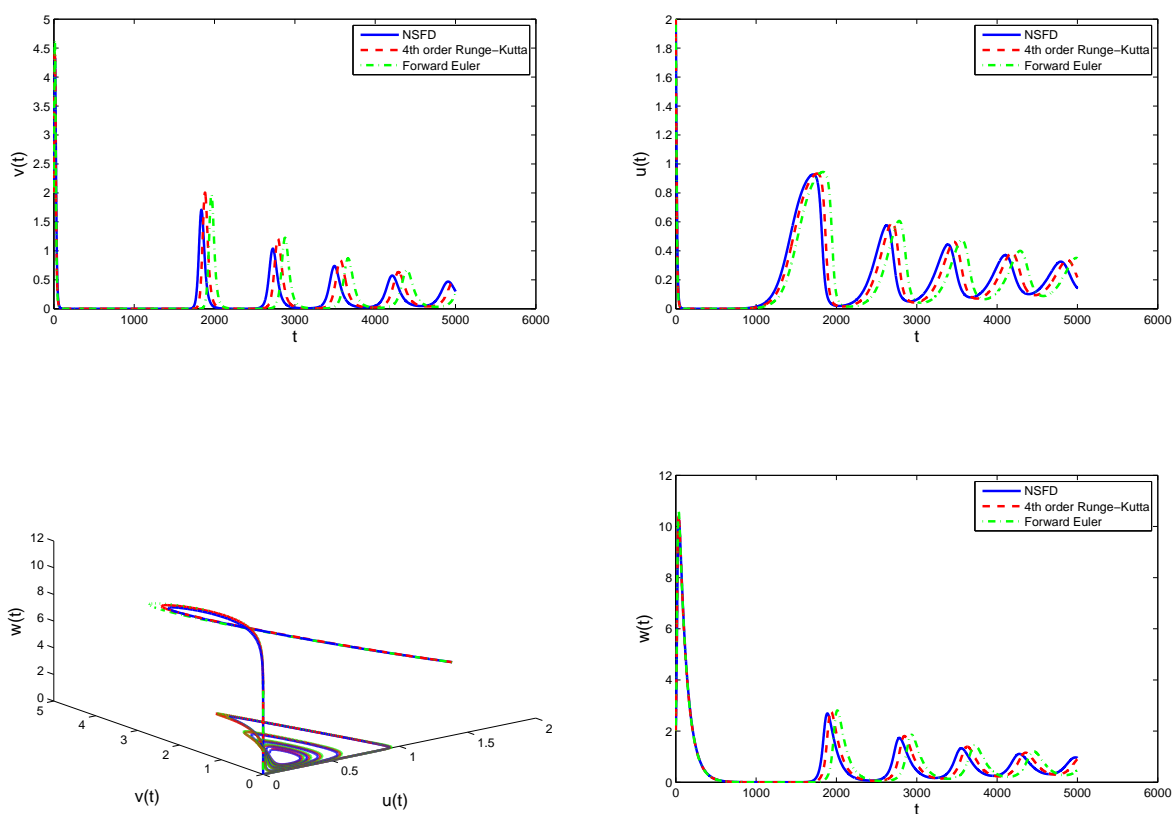
طرح غیراستاندارد	رانگ-کوتا	اویلر	طول گام
پایدار	پایدار	پایدار	۰/۰۰۱
پایدار	پایدار	ناپایدار	۰/۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۰/۴
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۰/۵
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱
پایدار	ناپایدار	ناپایدار	۱۰

جدول ۴: نتایج کیفی نقطه تعادلی E_5 ، با انتخاب طول گام‌های زمانی متفاوت.

در شکل‌های ۸ و ۹، پایداری جواب‌های عددی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد به نقاط تعادلی E_4 و E_5 ، نشان داده شده است و همچنین روش‌های رانگ-کوتا مرتبه چهار و اویلر پیشرو با طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد مقایسه شده‌اند.



شکل ۸: مقایسه طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد، با روش‌های رانگ-کوتا مرتبه چهار و اوایلر پیشرو برای نقطه تعادلی E_4 ، با انتخاب طول گام $h = 0.1$.



شکل ۹: مقایسه طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد، با روش‌های رانگ-کوتا مرتبه چهار و اوایلر پیشرو برای نقطه تعادلی E_{Δ} ، با انتخاب طول گام $h = 0.1$.

۷. نتیجه

در این مقاله فرم کسری سیستم لوتکا-ولترا سه بعدی معرفی شده است. دلیل در نظر گرفتن این سیستم مرتبه کسری به جای سیستم مرتبه صحیح آن، این است که سیستم لوتکا-ولترا کسری علاوه بر تعمیم معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح رفتار طبیعی‌تری را از خود نشان می‌دهد. در ادامه، با استفاده از طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد پایداری نقاط تعادلی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. سرانجام، نتایج عددی بدست آمده از این طرح پیشنهادی با روش‌های اوایلر پیشرو و رانگ-کوتا مرتبه چهار مقایسه گردیده است. نتایج عددی بدست آمده کارایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد را نسبت به روش‌های اوایلر پیشرو و رانگ-کوتا مرتبه چهار نشان می‌دهد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان وظیفه خود می‌دانند از داوران محترمی که نظرات ارزشمند آن‌ها موجب بهبود نگارش این مقاله شد، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

- [1] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed and H. A. A. El-Saka, On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems, *Phys. Lett. A*, **358**(2006), 1-4.
- [2] S. Ahmad and A. C. Lazer, Average conditions for global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Anal.*, **40**(1)(2000), 37-49.
- [3] X. Chen and J. Cohen, Transient dynamics and food-web complexity in the Lotka-Volterra cascade model, *Proc. Bio. Sci.*, **1469**(2001), 869-877.
- [4] D. Matignon, Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, *Computational engineering in systems applications*, 1996.
- [5] R. E. Mickens, *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, Wiley-Interscience, Singapore, 2005.
- [6] R. E. Mickens, Calculation of denominator functions for nonstandard finite difference schemes for differential equations satisfying a positivity condition, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **23**(2007), 672-691.
- [7] J. D. Murray, *Mathematical Biology I, II.*, Third edition, Springer, 2003.

- [8] M. Namjoo and S. Zibaei, Numerical solutions of FitzHugh–Nagumo equation by exact finite-difference and NSFD schemes, *Comp. Appl. Math.*, (2016), 1–17.
- [9] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [10] P. Van Den Driessche and M. L. Zeeman, Three–dimensional competitive Lotka–Volterra systems with no periodic orbits, *SIAM J. Appl. Math.*, **58**(1)(1998), 227–234.
- [11] X. P. Yan and W. T. Li, Stability and Hopf bifurcation for a delayed cooperative system with diffusion effects, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **18**(2)(2008), 441–453.
- [12] M. Zeinadini and M. Namjoo, A Numerical Method for Discrete Fractional–Order Chemostat Model Derived from Nonstandard Numerical Scheme, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **43**(5)(2017), 1165–1182.
- [13] S. Zibaei and M. Namjoo, A Nonstandard Finite Difference Scheme for Solving Fractional–Order Model of HIV–1 Infection of CD 4⁺ T–cells, *Iran. J. Math. Chem.*, **6**(2)(2015), 145–160.
- [14] S. Zibaei, M. Zeinadini and M. Namjoo, Numerical solutions of Burgers–Huxley equation by exact finite difference and NSFD schemes, *J. Difference Equ. Appl.*, (2016), 1–16.
- [15] M. Namjoo and S. Zibaei, A NSFD scheme for the solving fractional–order competitive prey–predator system, *Thai Journal of Mathematics*, **18**(4)(2020), 1933–1945.
- [16] M. Namjoo, M. Zeinadini and S. Zibaei, Nonstandard finite difference scheme to approximate the generalized Burgers–Fisher equation, *Mathematical methods in Applied Sciences*, **41**(17)(2018), 8212–8228.
- [17] D. Baleanu, S. Zibaei, M. Namjoo and A. Jajarmi, A nonstandard finite difference scheme for the modeling and nonidentical synchronization of a novel fractional chaotic system, *Advances in Differential Equations*, (2021), 1–19.
- [18] A. Zeeshan, F. Rabiei and K. Hosseini, A fractal–fractional-order modified Predator–Prey mathematical model with immigrations. *Mathematics and Computers in Simulation* **207**(2023) 466–481.
- [19] M. Higazy, M., SAM. Alsallami, S. Abdel-Khalek, and A. El-Mesady. Dynamical and structural study of a generalized Caputo fractional order Lotka-Volterra model. *Results in Physics* **37** (2022): 105478.
- [20] Z. Eskandari, Z. Avazzadeh, R. Khoshsiar Ghaziani, and B. Li, Dynamics and bifurcations of a discrete–time Lotka–Volterra model using nonstandard finite difference discretization method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022.

- [21] M. Xu, Influences of the Order of Derivative on the Dynamical Behavior of Fractional-Order Antisymmetric Lotka–Volterra Systems. *Fractal and Fractional* 7(5) (2023), 360.