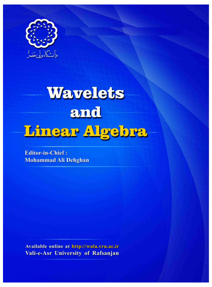
موجک‌ها و جبرخطی ۱۱(۳) (۱۴۰۳) ۴۵-۶۰



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

انقباض‌های $\mathcal{MT}$ـ دوری

حسین لکزیان[آ]*، صدیقه باروط کوب[ب]

[آ] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[ب] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده:۱۷ مهر ۱۴۰۲
پذیرفته شده:۱۷ اسفند ۱۴۰۲
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

خاصیت UC، بهترین نقطه تقریبی، انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری

چکیده

در این مقاله، انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری هاردی‌ـراجرز را معرفی خواهیم کرد و با استفاده از آن وجود بهترین نقطه تقریبی برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متری بررسی خواهد شد. یکتایی این نقطه با افزودن یک شرط که آن را خاصیت UC خواهیم نامید حاصل خواهد شد. در انتها یک کاربرد ارائه خواهیم داد تا نتایجمان را توصیف کند.

۱. مقدمه

اخیراً نظریه‌های نقطه ثابت و بهترین نقطه تقریب مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرارگرفته است. به عنوان مثال مراجع [۱-۶] را ببینید. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از فضای متری (X, d) باشند. نگاشت $T : A\cup B \to A\cup B$

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: h-lakzian@pnu.ac.ir (حسین لکزیان)، s.barutkub@ub.ac.ir (صدیقه باروطکوب)

http://doi.org/10.22072/WALA.2023.2012568.1434

دوری نامیده می‌شود، هرگاه $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$. برای مطالعه بیشتر [۶] و [۱۲] را ببینید. برای زیر مجموعه‌های ناتهی A و B از X، قرار دهید

$$dist(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

نقطه $x \in A \cup B$ یک بهترین نقطه تقریبی T نامیده می‌شود هرگاه، $d(x, Tx) = dist(A, B)$. توجه کنید که اگر $A = B$، آن‌گاه بهترین نقطه تقریبی T تبدیل به نقطه ثابت T خواهد شد.

تعریف ۱.۱. [۹] فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های ناتهی یک فضای متری (X, d) باشند. نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ یک انقباض دوری نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

(۱) $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$؛

(۲) $k \in (۰, ۱)$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + (۱ - k)dist(A, B)$، برای هر $x \in A, y \in B$.

نکته ۲.۱. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی بسته و ناتهی از یک فضای متری کامل (X, d) باشند و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک انقباض دوری باشد. دراین‌صورت اگر $A \cap B \neq \emptyset$، آن‌گاه $dist(A, B) = ۰$ و T یک انقباض روی فضای کامل $(A \cap B, d)$ است. بنابراین با استفاده از اصل انقباض باناخ T یک نقطه ثابت یکتا در $A \cap B$ دارد.

اخیرا با در نظر گرفتن شرایط ضعیف تر برای T، وجود و یکتایی بهترین نقطه تقریبی توسط نویسندگان بسیاری بررسی شده است، برای مثال [۱-۵] و مراجع داخل آن‌ها را ببینید. در [۹]، قضیه بهترین نقطه تقریبی زیر اثبات شد.

قضیه ۳.۱ ([۹]، گزاره ۲.۳). *فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی بسته و ناتهی از یک فضای متری کامل X باشند و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری باشد. $x_۰ \in A$ را در نظر گرفته و تعریف کنید $x_n = Tx_{n-۱}$، $n \in \mathbb{N}$. دراین‌صورت اگر $\{x_{۲n}\}$ یک زیر دنباله همگرا در A داشته باشد، آن‌گاه یک $x \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x, Tx) = dist(A, B)$.*

مفهوم خاصیت UC در [۱۴] به‌صورت زیر تعریف شد.

گوییم زوج (A, B) دارای خاصیت UC است، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

(UC) اگر $\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ و $\{(x'_n)_{n=1}^{\infty}\}$ دنباله‌هایی در A باشند و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله در B باشد، به‌طوری‌که اگر

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = dist(A, B), \quad \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y_n) = dist(A, B),$$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$.

مفهوم $\mathcal{MT}$–تابع در [۷] معرفی شد.

تعریف ۴.۱. [۸] یک تابع $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ یک $\mathcal{MT}$–تابع نامیده می‌شود، هرگاه در شرط میزوگوچی–تاکاهاشی صدق کند. یعنی $\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) < 1$ برای هر $t \in [0, \infty)$.

نکته ۵.۱. [۸] واضح است که اگر $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ یک تابع یکنوا باشد، آن‌گاه φ یک $\mathcal{MT}$–تابع است. بنابراین مجموعه $\mathcal{MT}$–تابع‌ها یک رده بزرگ و غنی است. البته لازم به ذکر است که توابعی وجود دارند که $\mathcal{MT}$–تابع نیستند.

مثال ۶.۱. [۸] فرض کنید $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ به‌صورت

$$\varphi(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in (0, \frac{\pi}{2}] \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. دراین‌صورت با توجه به اینکه $\limsup_{s\to 0^+} \varphi(s) = 1$، φ یک $\mathcal{MT}$–تابع نیست.

در ادامه برای راحتی خوانندگان، برخی انقباض‌های $\mathcal{MT}$–دوری در فضاهای متری کامل را که در بعضی مقالات تعریف شده اند، ذکر خواهیم کرد.

نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ با خاصیت $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$؛ را در نظر بگیرید.

[۶] T یک انقباض $\mathcal{MT}$–دوری نامیده می‌شود، هرگاه

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y) + (1 - \varphi(d(x, y)))dist(A, B);$$

[۱۳] T یک انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری کانان نامیده می‌شود، هرگاه

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{۱}{۲}\varphi(d(x,y))\Big(d(x,Tx)+d(y,Ty)\Big)+(۱-\varphi(d(x,y)))dist(A,B);$$

[۴] T یک انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری ریچ نامیده می‌شود، هرگاه

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{۱}{۳}\varphi(d(x,y))\Big(d(x,y)+d(x,Tx)+d(y,Ty)\Big)+(۱-\varphi(d(x,y)))dist(A,B);$$

[۲] T یک انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری تعمیم یافته نامیده می‌شود، هرگاه

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}+(۱-\varphi(d(x,y)))dist(A,B).$$

برای مثالی از یک نگاشت T که انقباض $\mathcal{MT}$ باشد اما انقباض دوری نباشد [۶] را ببینید.

قضیه زیر در سال ۱۹۷۳ توسط هاردی‌ـراجرز در [۱۰] اثبات شد.

قضیه ۷.۱. *[۱۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل باشد و $T:X\to X$ یک نگاشت انقباضی هاردی‌ـراجرز باشد. یعنی مقادیر ثابت $k_i\in[۰,۱)$، $i=۱,۲,\ldots,۵$، با خاصیت $\sum_{i=۱}^{۵}k_i$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

$$d(Tx,Ty)\leq k_1d(x,y)+k_2d(x,Tx)+k_3d(y,Ty)+k_4d(x,Ty)+k_5d(y,Tx), \quad (1.1)$$

برای هر $x,y\in X$. دراین‌صورت T دارای یک نقطه ثابت یکتا است.

هدف از نگارش این مقاله تعمیم قضیه ۷.۱ با به کارگیری یک $\mathcal{MT}$ـتابع کمکی φ است.

۲. بهترین نقطه تقریبی برای انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری هاردی راجرز

در این بخش نتیجه اصلی مقاله بیان و اثبات خواهد شد. ابتدا انقباض $\mathcal{MT}$ـدوری تعمیم یافته را نسبت به $\mathcal{MT}$ـتابع کمکی φ معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از یک فضای متری (X, d) باشند. دراین‌صورت نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ را یک انقباض $\mathcal{MT}$-دوری هاردی-راجرز نسبت به φ روی $A \cup B$ نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد.

$(H۱)$ $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$؛

$(H۲)$ یک $\mathcal{MT}$-تابع $\varphi : [۰, \infty) \to [۰, ۱)$ وجود دارد که

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\varphi(d(x, y))}{۵}\Big(d(x, y) + d(x, Tx) + d(Ty, y) + d(x, Ty) + d(Tx, y)\Big)$$
$$+(۱ - \varphi(d(x, y)))dist(A, B),$$

برای هر $x \in A$ و $y \in B$.

در ادامه قضیه زیر را که یکی از مهم ترین نتایج این مقاله برای بهترین نقطه تقریبی است، بیان خواهیم کرد.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی ناتهی از یک فضای متری (X, d) باشند و (A, B) دارای خاصیت UC باشد. همچنین فرض کنید $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت دوری و φ یک $\mathcal{MT}$-تابع باشد. دراین‌صورت اگر A کامل باشد و T یک انقباض $\mathcal{MT}$-دوری هاردی-راجرز نسبت به φ باشد، آن‌گاه موارد زیر برقرارند.*

(آ) T دارای یک بهترین نقطه تقریبی z در A است.

(ب) z یک نقطه ثابت $T^۲$ در A است.

(ج) T حداقل یک بهترین نقطه تقریبی در B دارد.

(د) $T(B)$ تک عضوی است یا $dist(A, B) = ۰$.

(ه) z در قسمت (الف) یکتاست.

اثبات. (آ) برای $x \in A$ قرار دهید $x_n = T^n x$. دراین‌صورت از $(H۲)$ نتیجه می‌شود

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\varphi(d(x_{m-۱}, x_{n-۱}))}{۵}\Big(d(x_{m-۱}, x_{n-۱}) + d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{m-۱}, x_m)$$
$$+ d(x_m, x_{n-۱}) + d(x_{m-۱}, x_n)\Big) + (۱ - \varphi(d(x_{m-۱}, x_{n-۱})))dist(A, B)$$

بنابراین با قرار دادن $d^*(x,y) = d(x,y) - dist(A,B)$، برای هر $x, y \in X$، و

$$K(T,x,n) = \max\{d^*(T^t x, T^s x); ۰ \leq t, s \leq n\}$$

برای هر $۰ < t, s \leq n$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
d^*(x_t, x_s) &\leq \frac{\varphi(d(x_{t-۱}, x_{s-۱}))}{۵}\Big((d(x_{t-۱}, x_{s-۱}) + d(x_s, x_{s-۱}) + d(x_{t-۱}, x_t) \\
&+ d(x_t, x_{s-۱}) + d(x_{t-۱}, x_s)\Big) - \varphi(d(x_{t-۱}, x_{s-۱}))dist(A,B) \\
&= \frac{\varphi(d(x_{t-۱}, x_{s-۱}))}{۵}\Big(d^*(x_{t-۱}, x_{s-۱}) + d^*(x_s, x_{s-۱}) + d^*(x_{t-۱}, x_t) \\
&+ d^*(x_t, x_{s-۱}) + d^*(x_{t-۱}, x_s)\Big) \\
&\leq \varphi(d(x_{t-۱}, x_{s-۱}))K(T,x,n) \\
&\leq \lambda K(T,x,n).
\end{aligned}$$

که در آن $\lambda = \sup_{t,s} \varphi(d(x_{t-۱}, x_{s-۱}))$ و با توجه به اینکه $۰ \leq \lambda < ۱$ نتیجه خواهد شد برای هر $۰ < t, s \leq n$، $d^*(x_t, x_s) < K(T,x,n)$. یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد طبیعی $r \leq n$ وجود دارد که

$$K(T,x,n) = \max\{d^*(T^t x, T^s x); ۰ \leq t, s \leq n\} = d^*(x_r, x_.) = d^*(x_r, x).$$

بنابراین برای هر $n \geq ۲$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
d^*(x_r, x) &\leq d^*(x_r, x_۲) + d(x_۲, x) \\
&\leq \lambda K(T,x,n) + d(x_۲, x) \\
&= \lambda d^*(x_r, x) + d(x_۲, x).
\end{aligned}$$

یعنی $K(T,x,n) = d^*(x_r, x) \leq \frac{۱}{۱-\lambda} d(T^۲ x, x)$.

حال برای $m > n$، عدد طبیعی $1 \leq k \leq m - n + 1$ وجود دارد که

$$\begin{aligned} d^*(x_m, x_n) &= d^*(T^{m-n+1}x_{n-1}, Tx_{n-1}) \\ &\leq \lambda K(T, x_{n-1}, m-n+1) \\ &= \lambda d^*(T^k x_{n-1}, x_{n-1}) \\ &= \lambda d^*(T^{k+1}x_{n-2}, Tx_{n-2}x) \\ &\leq \lambda(\lambda K(T, x_{n-2}, k+1) \\ &\leq \lambda^2 K(T, x_{n-2}, m-n+2) \quad (\text{است. صعودی}K(T, x, .)) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \lambda^n K(T, x, m) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(T^2 x, x), \end{aligned}$$

و چون $\lambda \in [0, 1)$، $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ و در نتیجه

$$\lim_{n,m,k} d(x_{2k+1}, x_{2m}) = dist(A, B) = \lim_{n,m,k} d(x_{2k+1}, x_{2n}).$$

اکنون از خاصیت UC نتیجه می‌شود

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_{2n}, x_{2m}) = 0.$$

بنابراین برای هر $x \in A$، $\{T^{2n}x\}$ کوشی و در نتیجه همگرا به یک $z \in A$ است. حال داریم

$$dist(A, B) \leq d(T^{2n-1}x, z) \leq d(T^{2n-1}x, T^{2n}x) + d(T^{2n}x, z) \to dist(A, B). \qquad (2.1)$$

یعنی $\lim_n d(T^{2n-1}x, z) = dist(A, B)$ و در نتیجه $\lim_n d^*(T^{2n-1}x, z) = 0$.
از طرفی با قرار دادن $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \varphi(d(x_n, z))$، و به کار بردن $(H2)$خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} d^*(x_{2n+1}, Tz) &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{5}\lambda(d^*(z, x_{2n}) + d^*(z, Tz) + d^*(x_{2n}, x_{2n+1})\\ &+ d^*(z, x_{2n+1}) + d^*(x_{2n}, Tz))\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{5}\lambda(- dist(A, B) + d^*(z, Tz) + d^*(x_{2n}, x_{2n+1})\\ &, d^*(z, x_{2n+1}) + d^*(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Tz))\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{5}\lambda(d^*(z, Tz) + d^*(x_{2n+1}, Tz)).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{5})d^*(x_{2n+1}, Tz) &\le \limsup_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{5}\lambda)d^*(x_{2n+1}, Tz)\\ &\le \frac{1}{5}\lambda d^*(z, Tz).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\limsup_{n\to\infty} d^*(x_{2n+1}, Tz) \le \frac{1}{4}\lambda d^*(z, Tz) \le d^*(z, Tz).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d^*(z, Tz) &= \limsup_{n\to\infty} d^*(x_{2n}, Tz) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{5}\varphi(d(z, x_{2n-1}))(d^*(z, x_{2n-1}) + d^*(z, Tz) + d^*(x_{2n-1}, x_{2n}) \\ &+ d^*(z, x_{2n}) + d^*(x_{2n-1}, Tz) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda}{5}(d^*(z, Tz) + d^*(z, x_{2n}) + d^*(z, Tz)) \\ &= \frac{\lambda}{5}(2d^*(z, Tz) - dist(A, B)). \end{aligned}$$

یعنی $(1 - \frac{2\lambda}{5})d^*(z, Tz) \leq -\frac{\lambda}{5}dist(A, B)$ و در نتیجه چون $0 \leq \lambda < 1$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{3}{5}d^*(z, Tz) \\ &\leq (1 - \frac{2\lambda}{5})d^*(z, Tz) \\ &\leq -\frac{\lambda}{5}dist(A, B) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

بنابراین $d^*(z, Tz) = 0$ و z یک بهترین نقطه تقریبی T در A است.

(ب) با مفروضات قسمت قبل و از اینکه $d^*(Tz, Tz) = -dist(A, B)$، داریم

$$\begin{aligned} d^*(T^۲z, Tz) &\leq \frac{۱}{۵}\varphi(d(z, Tz)))(d^*(Tz, z) + d^*(T^۲z, Tz) + d^*(z, Tz) \\ &+ d^*(T^۲z, z) - dist(A, B)) \\ &\leq \frac{۱}{۵}(d^*(T^۲z, Tz) + d^*(T^۲z, z) - dist(A, B)) \\ &\leq \frac{۱}{۵}(d^*(T^۲z, Tz) + d^*(T^۲z, Tz) + d^*(Tz, z)) \\ &= \frac{۲}{۵}d^*(T^۲z, Tz). \end{aligned}$$

در نتیجه $d^*(T^۲z, Tz) = ۰$ و $d(T^۲z, Tz) = dist(A, B)$. اکنون از $d(Tz, z) = dist(A, B)$ و خاصیت UC نتیجه می‌شود $d(T^۲z, z) = ۰$، یعنی $T^۲z = z$.

به علاوه از اینکه $d(T^۲z, Tz) = dist(A, B)$ نتیجه می‌شود Tz یک بهترین نقطه تقریبی T در B است.

(د) قرار دهید $\lambda = \varphi(d(z, Tz))$. اگر $\lambda = ۰$، آن‌گاه برای هر $x \in A, y \in B$ داریم $d(Tx, Ty) \leq dist(A, B)$. یعنی برای هر $y, y' \in B$ خواهیم داشت $d(Tx, Ty) = dist(A, B) = d(Tx, Ty')$ و از خاصیت UC نتیجه می‌شود $Ty = Ty'$. بنابراین T روی B ثابت است. اکنون فرض کنیم $\lambda \neq ۰$. دراین‌صورت چون $T^۲z = z$ داریم

$$\begin{aligned} dist(A, B) &= d(Tz, z) \\ &\leq \frac{۱}{۵}\lambda(d(Tz, z) + d(T^۲z, Tz) + d(z, Tz) + d(T^۲z, z) + d(Tz, Tz)) \\ &+ (۱ - \lambda)dist(A, B) \\ &= \frac{۳}{۵}\lambda d(z, Tz) + (۱ - \lambda)dist(A, B) \\ &= \frac{۳}{۵}\lambda dist(A, B) + (۱ - \lambda)dist(A, B). \end{aligned}$$

درنتیجه $(۱ - \lambda)dist(A, B) \leq (۱ - \frac{۳}{۵}\lambda)dist(A, B)$. که با فرض $dist(A, B) \neq ۰$ نتیجه خواهد شد $\lambda \leq \frac{۳}{۵}\lambda$ و یا به طور معادل $۱ \leq \frac{۳}{۵}$ که غیر ممکن است. بنابراین در حالتی که $\lambda \neq ۰$ به ناچار خواهیم داشت $dist(A, B) = ۰$

و در نتیجه z یک نقطه ثابت نگاشت T است.

(ه) با توجه به قسمت قبل اگر $\lambda = ۰$، آنگاه $T(B)$ تک عضوی است و بنابراین برای هر هر $x \in A$، $\{T^{۲n+۱}x\}$ و $\{T^{۲n}x\}$ دنباله‌هایی ثابت هستند که با تغییر x نیز مقدار آن تغییر نمی‌کند. بنابراین یک z منحصر به فرد وجود دارد که به ازای هر x و هر عدد طبیعی n، $T^{۲n}x = z$. اما در قسمت (الف) ملاحظه شد که z همان بهترین نقطه تقریبی است.

همچنین اگر $\lambda \neq ۰$، نتیجه خواهد شد $dist(A, B) = ۰$ و با فرض وجود یک نقطه ثابت دیگر w خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
d(z, Tw) &= d(T^{۲}z, Tw)\\
&\leq \frac{۱}{۵}\varphi(d(w, Tz))\Big(d(w, Tz) + d(w, Tw) + d(T^{۲}z, Tz)\\
&+ d(w, T^{۲}z) + d(Tw, Tz)\\
&\leq \frac{۱}{۵}\varphi\left(d(w, Tz)\right)\left(d(w, Tz) + d(w, Tw) + d(T^{۲}z, Tz)\right.\\
&\left.+ d(w, Tz) + d(Tz, T^{۲}z) + d(Tw, w) + d(w, Tz)\right)\\
&= \frac{۳}{۵}\varphi(d(w, Tz))(d(w, Tz))\\
&\leq \frac{۳}{۵}d(w, Tz).
\end{aligned}$$

به طور مشابه $d(w, Tz) \leq \frac{۳}{۵}d(z, Tw)$ و در نتیجه

$$d(z, Tw) \leq \frac{۳}{۵}d(w, Tz) \leq\leq \frac{۳}{۵}(\frac{۳}{۵}d(z, Tw)) = \frac{۹}{۲۵}d(z, Tw).$$

بنابراین $d(z, Tw) = ۰ = d(w, Tw)$ و از خاصیت UC نتیجه می‌شود $z = w$. □

نکته ۳.۲. در قضیه قبل اگر $\varphi < ۰$، آنگاه مساله بهترین نقطه تقریبی به مساله نقطه ثابت تبدیل می‌شود و در این حالت یک نقطه ثابت یکتای z خواهیم داشت.

مثال ۴.۲. فرض کنیم $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}$ و

$$d(a, x) = d(x, a) = d(a, y) = d(y, a) = ۱, d(a, b) = d(b, a) = d(a, c) = d(c, a) = \frac{۵}{۳},$$

$$d(b,x)=d(x,b)=d(c,x)=d(x,c)=d(b,y)=d(y,b)=d(c,y)=d(y,c)=۲,$$
$$d(b,c)=d(c,b)=\frac{۳}{۲}, d(x,y)=d(y,x)=۱, d(z,z)=۰, \quad (z\in A\cup B).$$

دراین‌صورت $d(A,B)=۱$ و با در نظر گرفتن

$$T(a)=x, T(b)=y, T(c)=y, T(x)=a, T(y)=a;$$

و

$$\varphi(t)=\begin{cases} ۰, & ۰\le t\le ۱,\\ t-۱, & ۱\le t\le \frac{۳}{۲},\\ \frac{۱}{۲}, & \frac{۳}{۲}\le t\end{cases}$$

خواهیم دید که Tدر شرایط قضیه قبل صدق می‌کند و a بهترین نقطه تقریبی در A است.

مثال ۵.۲. $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم A زیر مجموعه X محدود به محور xها و خط $y=x$ و B زیر مجموعه محدود به محور xها و خط $y=-x$ باشد و داشته باشیم $\frac{۵}{۹}\le\varphi<۱$. تعریف می‌کنیم $T(x,y)=(-\frac{x}{۵},۰)$. دراین‌صورت $d(A,B)=۰$ و شرایط قضیه قبل برقرار است. همچنین $(۰,۰)$ نقطه ثابت T می‌باشد.

۳. کاربرد در معادلات انتگرالی

در این بخش با ذکر یک مثال نشان خواهیم داد که نتایج این مقاله می‌تواند در بررسی وجود جواب برخی معادلات انتگرالی مفید باشد. برای این منظور فرض کنید $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R};\quad x\ge ۰\}$، $\mathbb{R}^{-}=-\mathbb{R}^{+}$ و $a,b\in\mathbb{R}$، به‌طوری‌که $a\le b$. دراین‌صورت نشان خواهیم داد معادله انتگرالی $f(x)=\int_a^b K(f(t),x)dt$، که در آن K تابعی حقیقی و پیوسته روی $\mathbb{R}^{۲}$ است، با شرایط خاصی دارای یک جواب در توابع پیوسته روی $[a,b]$ است. در ادامه $C([a,b])$ را مجموعه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a,b]$ با نرم

$$||f||=sup\{|f(t)|;\quad t\in[a,b]\},$$

در نظر می‌گیریم. همچنین قرار می‌دهیم

$$C^{+}([a,b]) = \{f \in C([a,b]); \quad f \geq ۰\}, \quad C^{-}([a,b]) = -C^{+}([a,b]).$$

قضیه ۱.۳. *فرض کنید* $K(\mathbb{R}^{+},\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{-}$ *و* $K(\mathbb{R}^{-},\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{+}$ *و برای هر* $f \in C^{+}([a,b]), g \in C^{-}([a,b])$ *داشته باشیم*

$$sup\{|K(f(t),x) - K(g(t),x)|, x, t \in \mathbb{R}\} \leq \frac{\varphi(||f-g||)}{۵(b-a)}|(||f-g||)|.$$

که در آن φ *یک* $\mathcal{MT}$*ـتابع است. دراین‌صورت معادله انتگرالی*

$$f(x) = \int_a^b K(f(t),x)dt;$$

دارای یک جواب منحصر به فرد در توابع پیوسته روی $[a,b]$ *است.*

اثبات. قرار دهید $X = C([a,b])$، $A = C^{+}([a,b])$ و $B = C^{-}([a,b])$. دراین‌صورت بدیهی است که (A,B) دارای خاصیت UC است و A,B در X بسته و بنابراین کامل هستند. همچنین نگاشت $T(f)(x) = \int_a^b K(f(t),x)dt$ دوری است. از طرفی T یک انقباض $\mathcal{MT}$- دوری هاردی‌ـراجرز نسبت به φ است. زیرا

$$
\begin{aligned}
\|T(f)-T(g)\| &= sup\{|(T(f)-T(g))(x)|; \quad x\in[a,b]\}\\
&= sup\{|\int_a^b K(f(t),x)dt-\int_a^b K(g(t),x)dt|; \quad x\in[a,b]\}\\
&\leq sup\{\int_a^b |K(f(t),x)-K(g(t),x)|dt; \quad x\in[a,b]\}\\
&\leq \int_a^b (sup\{|K(f(t),x)-K(g(t),x)|; \quad x,t\in[a,b]\})dt\\
&\leq \frac{\varphi(\|f-g\|)}{۵(b-a)} |(\|f-g\|)|(b-a)\\
&= \frac{\varphi(\|f-g\|)}{۵} |(\|f-g\|)\\
&= \frac{\varphi(\|f-g\|)}{۵} \Big(\|f-g\|+\|\int_a^b K(f(t),.)dt\|-\|f\|\\
&+\|g\|-\|\int_a^b K(f(t),.)dt\|+\|\int_a^b K(g(t),.)dt\|-\|g\|\\
&+\|f\|-\|\int_a^b K(g(t),.)dt\|\\
&\leq \frac{\varphi(\|f-g\|)}{۵} \Big(\|f-g\|+\|\int_a^b K(f(t),.)dt-f\|\\
&+\|g-\int_a^b K(f(t),.)dt\|+\|\int_a^b K(g(t),.)dt-g\|\\
&+\|f-\int_a^b K(g(t),.)dt\|\\
&= \frac{\varphi(\|f-g\|)}{۵} (\|f-g\|+\|T(f)-f\|\\
&+\|g-T(f)\|+\|T(g)-g\|+\|f-T(g)\|.
\end{aligned}
$$

اکنون از قضیه ۲.۲ و اینکه $dist(A,B)=۰$ نتیجه می‌شود که T دارای یک نقطه ثابت یکتای f است. یعنی رابطه $f(x)=\int_a^b K(f(t),x)dt$ برقرار است.

$\square$

مثال ۲.۳. فرض کنیم $\varphi = \frac{۱}{۲}$، $K(x, y) = -\frac{۱}{۲۰}x$. در اینصورت به وضوح $K(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^-$ و $K(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^+$ و برای هر $f \in C^+([۰, ۱]), g \in C^-([۰, ۱])$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} sup\{|K(f(t), x) - K(g(t), x)|, x, t \in \mathbb{R}\} &= \frac{۱}{۲۰} sup\{| - f(t) + g(t)|, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \frac{\varphi(||f - g||}{۱۰} ||f - g|| \\ &\leq \frac{\varphi(||f - g||)}{۵(۱ - ۰)} | (||f - g||) |. \end{aligned}$$

بنابراین از قضیه قبل نتیجه می‌شود معادله انتگرالی

$$f(x) = \int_{۰}^{۱} K(f(t), x)dt;$$

دارای یک جواب منحصر به فرد در توابع پیوسته روی $[۰, ۱]$ است. در واقع $f(x) = ۰$ تنها جواب این معادله می‌باشد.

مراجع

[1] M.A. Al-Thagafi, N. Shahzad, Convergence and existence results for best proximity points, *Nonlinear Analysis*, **70** (2009), 3665-3671.

[2] H. Aydi, H. Lakzian, Z. D. Mitrović, S. Radenović, Best Proximity Points of $\mathcal{MT}$-Cyclic Contractions with Property UC, *Numer. Funct. Anal. and Optim.*, **41 (7)** (2020), 871-882.

[3] I. A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasimetric spaces, *Funct. Anal., Ulianowsk Gos. Ped. Inst.*, **30** (1989), 26-37.

[4] S. Barootkoob, H. Lakzian, Z. D. Mitrović, The best proximity points for weak $\mathcal{MT}$-cyclic Reich type contractions, *J. Math. Ext.*, **16 (5)** (2022), 1–21.

[5] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav.*, **1** (1993), 5-11.

[6] W.-S. Du, H. Lakzian, Nonlinear conditions and new inequalities for best proximity points, *J. Inequality and Applications*, (2012) 2012:206.

[7] W.-S. Du, Some new results and generalizations in metric fixed point theory, *Nonlinear Anal.*, **73** (2010), 1439-1446.

[8] W.-S. Du, On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps, *Topology and its Applications*, **159** (2012), 49-56.

[9] A. A.Eldred, P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points , *J. Math. Anal. Appl.*, **323** (2006), 1001-1006.

[10] G. E. Hardy, T. D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canadian Mathematical Bulletin*, **16** (1973), 201–206.

[11] S. Karpagam, S.Agrawal, Best proximity point theorems for cyclic orbital Meir–Keeler contraction maps, *Nonlinear Anal.*, **74** (2011), 1040-1046.

[12] W.A. Kirk, P.S. Srinivasan, P. Veeramani, Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions, *Fixed Point Theory*, **4** (2003), 79-89.

[13] H. Lakzian, Ing-Jer Lin, Best proximity points for weak $\mathcal{MT}$-cyclic Kannan contractions, *Fund. J. Math. App.*, **1 (1)** (2018), 43–48.

[14] T. Suzuki, M. Kikkawa, C. Vetro, The existence of the best proximity points in metric spaces with the property UC, *Nonlinear Anal.*, **71** (2009), 2918-2926.