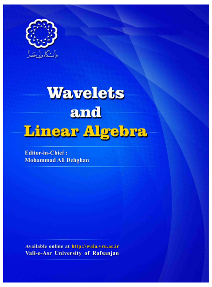
موجک‌ها و جبرخطی ۱۱(۳) (۱۴۰۳) ۲۳-۴۴



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

جایگشت‌ها و قاب‌های CPـ درهم‌تنیده

*** عباس عسکری‌زاده[آ]، مصطفی زنگی آبادی[ب]، سید علی محمد محسنی الحسینی[ج]**

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر(عج)، رفسنجان، ایران*
[ب] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندر عباس، ایران*
[ج] *گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر(عج)، رفسنجان، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده:۳ اسفند ۱۴۰۱
پذیرفته شده:۲۷ خرداد ۱۴۰۲
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

جایگشت‌ها، پایه‌های ریس

CPـدرهم‌تنیده ، آشفتگی‌ها.

چکیده

ساختن قاب‌ها و پایه‌های ریس در فضاهای هیلبرت و باناخ در تئوری و کاربرد از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از راه‌های مهم و جدید برای این منظور استفاده از درهم‌تنیدگی دنباله‌ها اعم از قاب‌ها و پایه‌های ریس در این فضاها می‌باشد. در این میان، استفاده از چیدمان‌های متفاوت یک قاب مقرون به صرفه‌تر بوده و تغییر در چیدمان را می‌توان با استفاده از جایگشت‌ها انجام داد. قاب‌های درهم‌تنیده، Pـدرهم‌تنیده و CPـدرهم‌تنیده که اخیرا معرفی شده‌اند، با استفاده از چند قاب متفاوت ساخته می‌شوند. در این مقاله تمرکز ما روی دنباله‌های CPـدرهم‌تنیده می‌باشد. ابتدا ارتباط جایگشت‌ها و قاب‌های اضافه‌دار CPـدرهم‌تنیده را بررسی کرده و سپس پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده را معرفی می‌کنیم و با استفاده از جایگشت‌ها، مثال‌هایی از پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده می‌سازیم. در ادامه پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده را دسته‌بندی می‌کنیم. در آخر، مطالبی را در مورد آشفتگی و پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

بعد از این که قاب‌ها در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شفر در مقاله‌ای تحت عنوان "یک رده از سری‌های فوریه غیرهارمونیک" معرفی شدند [۱۳]، بسیاری از محققان و پژوهشگران در پی یافتن راه‌هایی برای ساختن قاب‌های جدید بوده‌اند. در سال ۲۰۱۷، کاسازا و همکارانش قاب‌های درهم‌تنیده را معرفی کردند که در واقع راهکار مناسبی برای ساختن قاب‌های جدید با استفاده از چند قاب می‌باشد [۴]. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\mathcal{I}$ یک مجموعه اندیس شمارا باشد. قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ را برای H درهم‌تنیده می‌گویند اگر ثابت‌های مثبت و متناهی A و B وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه σ از $\mathcal{I}$ و برای هر $x\in H$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$A\parallel x\parallel^{2}\leq\sum_{i\in\sigma}|\langle x,\phi_i\rangle|^{2}+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,\psi_i\rangle|^{2}\leq B\parallel x\parallel^{2}.$$

در واقع می‌توان گفت قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ برای H درهم‌تنیده هستند اگر برای هر زیرمجموعه σ از $\mathcal{I}$، خانواده‌های $\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\psi_i\}_{i\in\sigma^c}$ برای H قابی با کران‌های قاب یکسان باشند. قاب‌های درهم‌تنیده علاوه بر ساختن قاب‌های جدید، کاربردهای مهم دیگری نیز دارند. به عنوان مثال در مسئله پردازش گسترده سیگنال‌ها، به‌خصوص در شبکه‌هایی از حسگرهای بی‌سیم جایی‌که پردازش گسترده سیگنال‌ها با استفاده از قاب‌ها صورت می‌گیرد. فرض کنید در پردازش یک سیگنال $\mathcal{X}$ در فضای هیلبرت H از قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ استفاده شود که در آن $\mathcal{I}$ مجموعه اندیس شماراست، و هر اندیس $i\in\mathcal{I}$ را به عنوان یک حسگر در نظر بگیریم. در این صورت دنباله اسکالرهای

$$\{\langle\mathcal{X},\phi_i\rangle\}_{i\in\sigma}\cup\{\langle\mathcal{X},\psi_i\rangle\}_{i\in\sigma^c}$$

یک بسته از اطلاعات وابسته به $\mathcal{X}$ برای هر زیرمجموعه σ می‌باشد. اکنون اگر $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ درهم‌تنیده باشند، می‌توان $\mathcal{X}$ را با استفاده از هر دنباله از اطلاعات $\{\langle\mathcal{X},\phi_i\rangle\}_{i\in\sigma}\cup\{\langle\mathcal{X},\psi_i\rangle\}_{i\in\sigma^c}$ بازسازی کرد. زیرا برای هر σ که $\sigma\subseteq\mathcal{I}$، خانواده $\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\psi_i\}_{i\in\sigma^c}$ قاب می‌باشد. بعد از این که قاب‌های درهم‌تنیده معرفی شدند، محققان هم در شاخه‌های نظری و محض و هم در شاخه‌های کاربردی، نتایج جالب و مفیدی را در ارتباط با قاب‌های درهم‌تنیده به دست آورده‌اند. خواننده می‌تواند برای مطالعه جزئیات بیشتر در این زمینه، از مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۸]

---

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: a.askari@vru.ac.ir (عسکری)، zangiabadi1@gmail.com(زنگی آبادی) ، amah@vru.ac.ir (محسنی الحسینی)

http://doi.org/10.22072/WALA.2023.1990272.1415

استفاده کند.

در سال ۲۰۱۹، قاب‌های Pـدرهم‌تنیده و CPـدر هم‌تنیده معرفی شدند که به نوعی استفاده از آنها در کاربردها آسانتر است [۱۴]. قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ برای H را Pـدرهم‌تنیده می‌گویند اگر زیرمجموعه نابدیهی σ از $\mathcal{I}$ $(\sigma \subsetneq \mathcal{I}, \sigma \neq \emptyset)$، موجود باشد به‌طوری‌که خانواده $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\psi_i\}_{i\in\sigma^c}$ قاب باشد. همچنین قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ برای H را CPـدرهم‌تنیده می‌گویند اگر زیرمجموعه نابدیهی σ از $\mathcal{I}$، موجود باشد به‌طوری‌که خانواده‌های $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\psi_i\}_{i\in\sigma^c}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ قاب باشند. قاب‌های Pـدرهم‌تنیده و CPـدرهم‌تنیده در پردازش گسترده سیگنال‌ها کاربرد دارند. اگر σ یک زیرمجموعه نابدیهی از $\mathcal{I}$ باشد، دنباله اسکالرهای $\{\langle \mathcal{X}, \phi_i\rangle\}_{i\in\sigma} \cup \{\langle \mathcal{X}, \psi_i\rangle\}_{i\in\sigma^c}$ بسته‌ای از اطلاعات بردار $\mathcal{X}$ نسبت به قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ می‌باشد. در این جا اگر $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\psi_i\}_{i\in\sigma^c}$ قابی برای H باشد یا به عبارت دیگر $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ قاب‌های Pـدرهم‌تنیده باشند، آنگاه سیگنال $\mathcal{X}$ را می‌توان بازسازی کرد. یکی دیگر از کاربردهای مهم قاب‌های Pـدرهم‌تنیده و CPـدرهم‌تنیده، استفاده از آنها در نظریه رمزگذاری و رمزگشایی می‌باشد. شاید بتوان گفت استفاده از قاب‌ها در رمزگذاری و رمزگشایی یک سیگنال برای اولین بار در سال ۲۰۱۰ اتفاق افتاد [۱۹، ۲۰]. دانشمندانی که روی این نظریه کار می‌کنند، سعی دارند تا قاب‌های مناسبی را برای مقاومت در برابر پاک‌شدگی‌ها پیدا کنند که کمترین خطا را داشته باشند [۶، ۸، ۱۵، ۱۶، ۱۷]. ابداع‌کنندگان قاب‌های Pـدرهم‌تنیده و CPـدرهم‌تنیده امیدوارند که بتوانند از این دسته از قاب‌ها برای کم‌کردن خطا در رمزگذاری و رمزگشایی سیگنال‌ها استفاده کنند.

هدف و انگیزه اصلی ما در این مقاله ساختن قاب‌ها و پایه‌های ریس جدید با استفاده از چیدمان‌های متفاوت از یک قاب یا پایه ریس و مفهوم CPـدر هم تنیدگی می‌باشد. می‌گوییم دنباله $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک چیدمان از دنباله $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ است اگر جایگشت π روی $\mathcal{I}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $i \in \mathcal{I}$ داشته باشیم $\psi_i = \phi_{\pi(i)}$. در واقع، دنباله $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ را قاب یا پایه ریس، π را جایگشت روی $\mathcal{I}$ و خانواده‌های $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ را در نظر می‌گیریم که $\sigma \subset \mathcal{I}$. در اینجا نکته مهم و قابل توجه این است که وقتی $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک قاب (پایه ریس) برای H باشد، $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ نیز یک قاب (پایه ریس) برای H می‌باشد.

۲. پیش‌نیازها

در این فصل به مطالبی که در این مقاله به آنها نیازمندیم، اشاره می‌کنیم. در سراسر این مقاله H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و $\mathcal{I}$ یک مجموعه اندیس شمارا می‌باشد. در ابتدا به چند تعریف مهم اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. ([۹]) دنباله $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ در H، یک قاب برای H است اگر اعداد مثبت A و B وجود داشته باشند به‌طوری‌که

برای هر x در H داشته باشیم:

$$A \parallel x \parallel^{2} \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} \mid \langle x, \phi_i \rangle \mid^{2} \leq B \parallel x \parallel^{2} .$$

A و B را به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب می‌گویند. در ادامه به تعریف پایه ریس اشاره می‌کنیم.

تعریف ۲.۲. ([۹]) دنباله کامل $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ در H، یک پایه ریس برای H است اگر اعداد مثبت A و B وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر دنباله از اسکالرهای $\{c_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ که در آن $\mathcal{J}$ یک زیرمجموعه متناهی از $\mathcal{I}$ است،

$$A \sum_{j\in\mathcal{J}} \mid c_j \mid^{2} \leq \parallel \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\phi_j \parallel^{2} \leq B \sum_{j\in\mathcal{J}} \mid c_j \mid^{2} .$$

ثابت شده است که هر پایه ریس یک قاب است ([۹]). قاب $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$، اضافه‌دار گفته می‌شود اگر پایه ریس نباشد. تعریف بعد به قاب‌های CPـ درهم‌تنیده اشاره دارد.

تعریف ۳.۲. ([۱۴]) قاب‌های $\{\phi_i^j\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j = 1, \ldots, n$، در H، CPـ درهم‌تنیده برای H گفته می‌شوند، اگر یک افراز $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ از $\mathcal{I}$ وجود داشته باشد که برای همه جایگشت‌های $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ از $\{1, 2, \ldots, n\}$، اعداد مثبت A و B وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر x در H داشته باشیم:

$$A \parallel x \parallel^{2} \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i\in\sigma_{\lambda_j}} \mid \langle x, \phi_i^j \rangle \mid^{2} \leq B \parallel x \parallel^{2} .$$

در این مقاله، حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که $n = 2$.

۳. قاب‌های CPـ درهم‌تنیده و جایگشت‌ها

در این بخش قاب‌های CPـ درهم‌تنیده‌ای را که با استفاده از یک قاب و جایگشت‌ها تولید می‌شوند، بررسی می‌کنیم. در ابتدا با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که با کمک تغییر چیدمان عناصر یک پایه ریس، می‌توان قاب‌های CPـ درهم‌تنیده ساخت به‌طوری‌که درهم‌تنیده نباشند. در ادامه $[M] = \{1, 2, \ldots, M\}$، و $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد.

مثال ۱.۳. فرض کنید $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H باشد. اکنون پایه ریس $\Phi_\pi = \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ را در نظر می‌گیریم که در آن جایگشت π روی $\mathcal{I}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi(i) = \begin{cases} j_0 & i = i_0 \\ i_0 & i = j_0 \\ i & i \neq i_0, j_0 \end{cases}$$

که $i_0, j_0 \in \mathcal{I}$ و $i_0 \neq j_0$. در این صورت Φ و Φ_π قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H هستند ولی درهم‌تنیده نیستند.

اثبات. با در نظر گرفتن $\sigma = \mathcal{I} \setminus \{i_0, j_0\}$، به سادگی می‌توان دید $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ و $\{\phi_i\}_{i\in\sigma^c} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma}$ قاب‌هایی برای H هستند. پس، Φ و Φ_π قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H می‌باشند. از طرفی، اگر $\sigma = \{i_0\}$ آنگاه $\phi_{j_0} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$، که نشان می‌دهد $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ نمی‌تواند برای H قاب باشد زیرا $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه است. بنابراین Φ و Φ_π قاب‌های درهم‌تنیده برای H نیستند. □

مثال زیر قابی را نشان می‌دهد که با یک چیدمان نابدیهی از خودش CPـدرهم‌تنیده نمی‌باشد.

مثال ۲.۳. فرض کنید $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in[M]}$ یک پایه برای H باشد. $\Phi_\pi = \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in[M]}$ را در نظر می‌گیریم که در آن π جایگشتی روی $[M]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi(i) = \begin{cases} i+1 & i \neq M \\ 1 & i = M. \end{cases}$$

در این صورت Φ و Φ_π قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H نیستند.

اثبات. برای اثبات، زیرمجموعه نابدیهی σ از $[M]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید i_0 بزرگترین عضو σ باشد. اگر $i_0 < M$، با توجه به ضابطه π می‌توان گفت

$$\phi_{i_0+1} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$$

که نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. همچنین اگر $i_0 = M$، اندیسی مانند $j_0 < M$ وجود دارد به‌طوری‌که $j_0 \in \sigma$ و

$j. + 1$ کوچکترین عضو σ^c می‌باشد. پس $\phi_{j.+1} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma}$. همچنین با توجه به ضابطه π و اینکه $j. + 1$ کوچکترین عضو σ^c می‌باشد نتیجه می‌گیریم که $\phi_{j.+1} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$. بنابراین نتیجه حاصل می‌شود. □

حال این سوال مطرح می‌شود: آیا قابی وجود دارد که با هر چیدمان از خودش CPـدرهم‌تنیده باشد؟ در ادامه این بخش به پاسخ این سوال می‌پردازیم. در واقع با بیان شرایط معادل، قاب‌ها را بر این اساس دسته‌بندی می‌کنیم. ابتدا به نتایجی از [۱۴] که در ارتباط با این بحث هستند اشاره می‌کنیم.

[۱۴، قضیه ۴.۷.] فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ قاب‌هایی اضافه‌دار با عناصر ناصفر برای H باشند. آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H هستند.

[۱۴، قضیه ۴.۱۴.] فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ و $\{\psi_i\}_{i\in[M]}$ قاب‌هایی اضافه‌دار با عناصر ناصفر برای فضای هیلبرت Nـبعدی H باشند. آنگاه آنها، قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H هستند.

با توجه به نتایج ذکر شده، گزاره زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۳.۳. *فرض کنید π جایگشتی روی $\mathbb{N}$ یا $[M]$ باشد. در این صورت:*

(۱) *اگر $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک قاب اضافه‌دار برای H باشد، آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H هستند.*

(۲) *اگر $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ یک قاب اضافه‌دار با عناصر ناصفر برای H باشد، آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in[M]}$ قاب‌های CPـدرهم‌تنیده برای H هستند.*

اثبات. (۱) چون π یک جایگشت روی $\mathbb{N}$ می‌باشد، پس $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ دارای برد یکسان هستند. اکنون با استفاده از [۱۴، قضیه ۴.۷.]، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(۲) اگر $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ یک قاب اضافه‌دار با عناصر ناصفر برای H باشد، چون π یک جایگشت روی $[M]$ می‌باشد بنابراین، $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in[M]}$ نیز یک قاب اضافه‌دار با عناصر ناصفر برای H است. پس با توجه به [۱۴، قضیه ۴.۱۴.]، اثبات این قسمت به اتمام می‌رسد.

□

گزاره زیر در جهت پاسخ به سوال مطرح شده در ابتدای این بخش مفید می‌باشد.

گزاره ۴.۳. *فرض‌کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک دنباله در H باشد. اگر برای هر تابع جایگشت π روی $\mathcal{I}$، زیرمجموعه نابدیهی σ از $\mathcal{I}$ وجود داشته باشد به‌طوری که خانواده‌های $\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ قاب‌هایی برای H باشند، آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک قاب اضافه‌دار برای H است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک قاب برای H است. با توجه به فرض برای $\pi = I_d$ زیرمجموعه محض $\sigma.$ از $\mathcal{I}$ وجود دارد که

$$\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}} = \{\phi_i\}_{i\in\sigma.}\cup\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c_.}$$

یک قاب برای H است. اکنون نشان می‌دهیم $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ قابی اضافه‌دار است. با برهان خلف فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H است. جایگشت π را روی $\mathcal{I}$ طوری در نظر بگیرید که $\pi(\mathcal{J})\not\subseteq\mathcal{J}$ برای هر $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$. اگر یک σ زیرمجموعه محض از $\mathcal{I}$ باشد که $\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب برای H باشد، ثابت می‌کنیم اندیس $j\in\sigma^c$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\phi_j\notin\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}.$$

اگر چنین نباشد، برای هر $j\in\sigma^c$،

$$\phi_j\in\{\phi_i\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}.$$

بنابراین برای هر $j\in\sigma^c$، $\phi_j\in\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ و درنتیجه $i\in\sigma^c$ هست به‌طوری‌که $\phi_j=\phi_{\pi(i)}$، و چون $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه ریس است، $j=\pi(i)$. پس، برای هر $j\in\sigma^c$، $i\in\sigma^c$ هست به طوری که $j=\pi(i)$ که نتیجه می‌دهد $\sigma^c\subseteq\pi(\sigma^c)$. بنابراین، $\pi(\sigma)\subseteq\sigma$ که این یک تناقض است زیرا $\pi(\mathcal{J})\not\subseteq\mathcal{J}$ برای هر $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$. پس اثبات این قضیه به اتمام می‌رسد. □

اکنون با استفاده از گزاره‌های ۳.۳ و ۴.۳، مهمترین نتایج این فصل را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳. *فرض‌کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در H باشد. در این صورت:*
$\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک قاب اضافه‌دار برای H است اگر و تنها اگر برای هر تابع جایگشت π روی $\mathbb{N}$، قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای H قاب‌هایی CPـ درهم‌تنیده هستند.

قضیه ۶.۳. *فرض‌کنید $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ یک دنباله با عناصر ناصفر در H باشد.*
$\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ یک قاب اضافه‌دار برای H است اگر و تنها اگر برای هر تابع جایگشت π روی $[M]$، قاب‌های $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in[M]}$ برای H قاب‌هایی CPـ درهم‌تنیده هستند.

قضایای ۵.۳ و ۶.۳ علاوه بر این که به سوال مطرح شده در ابتدای این بخش پاسخ می‌دهند، قاب‌هایی را که با هر چیدمان از خودشان نیز CPـ درهم‌تنیده هستند، نیز دسته‌بندی می‌کند. در واقع این قضیه نشان می‌دهد که فقط و فقط یک قاب اضافه‌دار می‌تواند با هر چیدمان از خودش CPـ درهم‌تنیده باشد. در بخش بعد روی پایه‌های ریس تمرکز می‌کنیم. در واقع حالت‌هایی که یک پایه ریس با یک چیدمان از خودش CPـ درهم‌تنیده باشد را دسته‌بندی می‌کنیم. در آخر این بخش، با یک مثال نشان می‌دهیم که شرط ناصفر بودن عناصر قاب در قضیه ۶.۳، الزامی است.

مثال ۷.۳. فرض کنید $\{\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\}$ یک پایه ریس برای H باشد. اکنون، قاب $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in[۴]} = \{\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳, ۰\}$ را برای H در نظر بگیرید. اگر جایگشت π روی $[۴]$ به صورت زیر باشد:

$$\pi(i) = \begin{cases} ۲ & i = ۱ \\ ۴ & i = ۲ \\ ۱ & i = ۳ \\ ۳ & i = ۴, \end{cases}$$

آنگاه Ψ و $\Psi_\pi = \{\psi_{\pi(i)}\}_{i\in[۴]}$ برای H قاب‌های CPـ درهم‌تنیده نیستند.

اثبات. فرض کنید σ زیرمجموعه‌ای دلخواه و نابدیهی از $\mathcal{I}$ باشد. با توجه به ضابطه π و وجود بردار ۰ در Ψ و Ψ_π، حداقل یکی از مجموعه‌های $\{\psi_i\}_{i\in\sigma^c} \cup \{\psi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma}$ و یا $\{\psi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\psi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ نمی‌توانند فضا را تولید کنند و در نتیجه قاب نیستند. بنابراین Ψ و Ψ_π برای H قاب‌های CPـ درهم‌تنیده نیستند. □

۴. پایه‌های ریس CPـ در هم‌تنیده و جایگشت‌ها

در این فصل، ابتدا پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده را معرفی می‌کنیم و سپس با ارائه یک مثال تاثیر توابع جایگشت را روی مجموعه اندیس آنها بررسی می‌کنیم. در ادامه و در قالب یک قضیه، شرط معادلی را برای CPـ درهم‌تنیدگی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. یک گردایه $\{\phi_i^j\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j = ۱, \dots, n$، از پایه‌های ریس در H یک پایه ریس CPـ درهم‌تنیده برای H گفته می‌شود، اگر یک افراز $\{\sigma_۱, \dots, \sigma_n\}$ از $\mathcal{I}$ وجود داشته باشد که برای همه جایگشت‌های $\{\lambda_۱, \dots, \lambda_n\}$ از $\{۱, ۲, \dots, n\}$، خانواده $\{g_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H باشد، که در آن $g_i = \phi_i^j$ برای هر $i \in \sigma_j$، $j = ۱, \dots, n$.

در این فصل حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که در آنها پایه‌های ریسس $\{\phi_i^j\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j = ۱,\dots,n$، جایگشتی از یک پایه ریسس $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ باشند. در واقع برای هر j که $۱ \le j \le n$، جایگشتی مانند π_j روی $\mathcal{I}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\phi_i^j = \phi_{\pi_j(i)}$$

برای هر $i \in \mathcal{I}$. برای توضیح این مطلب، ابتدا به ارائه یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۴. فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک پایه ریسس برای H باشد. اگر

$$\pi(i) = \begin{cases} i+۲ & i = ۱,۳,۵,\dots \\ i-۲ & i = ۴,۶,۸,\dots \\ ۱ & i = ۲ \end{cases}$$

تابع جایگشتی روی $\mathbb{N}$ باشد، در این‌صورت $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌های ریسس CPـ درهم‌تنیده برای H نیستند.

اثبات. نشان می‌دهیم هیچ زیرمجموعه نابدیهی σ از $\mathcal{I}$ وجود ندارد که در تعریف پایه ریسس CPـ درهم‌تنیده صدق کند. برای این منظور فرض کنید σ یک زیرمجموعه دلخواه از $\mathcal{I}$ باشد.

حالت اول:

$$\sigma \subseteq \{۲n+۱ : n \in \mathbb{N}\cup\{۰\}\}.$$

برای این حالت فرض کنید l مینیمم σ باشد. بنابراین $n_۰ \in \mathbb{N}\cup\{۰\}$ وجود دارد به طوری که

$$l = ۲n_۰ + ۱.$$

حال اگر $n_۰ = ۰$ داریم $l = ۱$. پس

$$\phi_۱ \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}. \tag{۱.۴}$$

همچنین داریم $\pi(۲) = ۱$، که نتیجه می‌دهد

$$\phi_۱ = \phi_{\pi(۲)} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \quad (۲.۴)$$

و با توجه به (۱.۴) و (۲.۴) داریم

$$\phi_۱ \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}.$$

پس

$$\mathbf{span}\left(\{\phi_{\pi(\mathrm{i})}\}_{\mathrm{i}\in\sigma} \cup \{\phi_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i}\in\sigma^{\mathrm{c}}}\right) \neq \mathrm{H}.$$

بنابراین $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ نمی‌تواند یک پایه ریس برای H باشد.
اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $n_۰ > ۰$. چون $l \notin \sigma^c$ پس $\phi_{۲n_۰+۱} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$. از طرفی چون $۲n_۰ + ۱$ مینیمم σ می‌باشد و $n_۰ > ۰$، داریم $۲n_۰ - ۱ \in \sigma^c$. در نتیجه

$$\phi_{۲n_۰+۱} = \phi_{\pi(۲n_۰-۱)} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma}.$$

که باز هم می‌توان نتیجه گرفت

$$\mathbf{span}\left(\{\phi_{\pi(\mathrm{i})}\}_{\mathrm{i}\in\sigma} \cup \{\phi_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i}\in\sigma^{\mathrm{c}}}\right) \neq \mathrm{H}$$

که نشان می‌دهد $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ پایه ریس برای H نیست. یعنی در مجموع و با توجه به تعریف ۱.۴، نشان دادیم که در این حالت پایه‌های ریس $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$، نمی‌توانند تشکیل پایه ریس CP- درهم‌تنیده دهند.

حالت دوم:

$$\sigma \cap \{۲n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

فرض کنید $l = ۲k$ مینیمم اعداد زوج در σ باشد. اگر $l = ۲$ و $m \in \mathbb{N}$ بزرگترین عددی باشد که $۲m \in \sigma$

آنگاه

$$\phi_{۲m} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c} \quad , \quad \phi_{۲m} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma}.$$

بنابراین $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ نمی‌تواند H را تولید کند، پس پایه ریس برای H نمی‌باشد.
حال اگر σ شامل همه اعداد زوج باشد، چون σ زیرمجموعه محض از $\mathcal{I}$ است پس عدد فردی مانند s وجود دارد که $s \notin \sigma$. بنابراین عددی طبیعی مانند n هست که

$$\{۱, ۳, ۵, \dots, ۲n - ۱\} \subset \sigma \quad , \quad ۲n + ۱ \in \sigma^c.$$

پس

$$\phi_{۲n+۱} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c} \quad , \quad \phi_{۲n+۱} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma}.$$

که باز هم نتیجه می‌دهد $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ نمی‌تواند پایه ریس باشد.
در آخر فرض کنید

$$l = ۲k \quad , \quad l \neq ۲.$$

پس $k \geq ۲$ وجود دارد به طوری که

$$\phi_{۲k-۲} \notin \{\phi_i\}_{i\in\sigma} \quad , \quad \phi_{۲k-۲} \notin \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}.$$

بنابراین $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ پایه ریس برای H نیست و این یعنی $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه ریس CPـ درهم‌تنیده برای H نمی‌باشند.

□

مثال قبل نشان می‌دهد، تشخیص CPـ در هم‌تنیدگی پایه‌های ریس در برخی مثال‌ها ساده نیست. بنابراین سعی می‌کنیم پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده را دسته‌بندی کنیم. قضیه زیر در دسته‌بندی پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده مفید می‌باشد.

قضیه ۳.۴. *فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H باشد و $\{\pi_j\}_{j=۱}^{n}$ دنباله‌ای از توابع جایگشت روی $\mathcal{I}$ باشد. گزاره‌های زیر هم ارزند:*

(۱) *گردایه* $\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j=۱,\ldots,n$، *یک پایه ریس* CP*ـ درهم‌تنیده برای* H *است.*

(۲) *افراز* $\{\sigma_j\}_{j=۱}^n$ *از* $\mathcal{I}$ *وجود دارد به‌طوری‌که برای هر دنباله* $\{\lambda_j\}_{j=۱}^n$ *از جایگشت‌های روی* $\{۱,۲,\ldots,n\}$، *گردایه* $\{\pi_j(\sigma_{\lambda_j})\}_{j=۱}^n$ *یک افراز از* $\mathcal{I}$ *می‌باشد.*

اثبات. (۲)$\to$ (۱) فرض کنید $\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j=۱,\ldots,n$، یک پایه ریس CPـ درهم‌تنیده برای H باشد با افراز $\{\sigma_j\}_{j=۱}^n$ از $\mathcal{I}$. اگر (۲) برقرار نباشد، دنباله‌ای از جایگشت‌های $\{\lambda_j\}_{j=۱}^n$ روی $\{۱,۲,\ldots,n\}$، وجود دارد به‌طوری‌که $\{\pi_j(\sigma_{\lambda_j})\}_{j=۱}^n$ یک افراز از $\mathcal{I}$ نیست. بنابراین یا

$$\bigcup_{j=۱}^{n}\pi_j(\sigma_j)\neq\mathcal{I}$$

و یا

$$\pi_{r.}(\sigma_{r.})\bigcap\pi_{s.}(\sigma_{s.})\neq\emptyset$$

برای برخی $r.\neq s.$ در $\mathcal{I}$. اگر $\bigcup_{j=۱}^{n}\pi_j(\sigma_j)\neq\mathcal{I}$، پس $i.\in\mathcal{I}$ وجود دارد به‌طوری‌که $i.\notin\pi_j(\lambda_j)$، برای هر j که $۱\leq j\leq n$. از طرفی، چون $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H می‌باشد بنابراین

$$\phi_{i.}\notin\overline{\mathbf{span}}\{\phi_{\mathrm{i}}:\mathrm{i}\in\bigcup_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\pi_{\mathrm{j}}(\sigma_{\mathrm{j}})\}$$

که این یک تناقض است زیرا $\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j=۱,\ldots,n$، یک پایه ریس CPـ درهم‌تنیده برای H است. از طرفی دیگر، اگر برای برخی $r.\neq s.$ در $\mathcal{I}$ داشته باشیم:

$$\pi_{r.}(\sigma_{r.})\bigcap\pi_{s.}(\sigma_{s.})\neq\emptyset$$

آنگاه

$$\{\phi_{\pi_{r.}(i)}\}_{i\in\sigma_{r.}}\bigcap\{\phi_{\pi_{s.}(i)}\}_{i\in\sigma_{s.}}\neq\emptyset$$

که این غیرممکن است زیرا $\bigcup_{j=۱}^{n}\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\sigma_j}$ یک پایه ریس برای H است، و در نتیجه اثبات این قسمت تمام است.

(۱)→ (۲) برای اثبات این قسمت فرض کنید برای هر جایگشت $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}$ از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، مجموعه‌های

$$\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}, \quad \{\pi_۱(\lambda_۱), \ldots, \pi_n(\lambda_n)\}$$

افرازهایی از $\mathcal{I}$ باشند. بنابراین برای جایگشت‌های مختلف $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}$ خانواده‌های $\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\sigma_j}$، $j = ۱, \ldots, n$، پایه‌های ریس برای H هستند. در نتیجه $\{\phi_{\pi_j(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$، $j = ۱, \ldots, n$، یک پایه ریس CP-درهم‌تنیده برای H با افراز

$$\{\pi_۱(\lambda_۱), \ldots, \pi_n(\lambda_n)\}$$

از $\mathcal{I}$ می‌باشد. با این نتیجه اثبات این گزاره به اتمام می‌رسد.

□

اکنون، تاثیر استفاده از قضیه فوق را در مثال ۲.۴ بررسی می‌کنیم.

مثال ۴.۴. فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و π همانند مثال ۲.۴ باشند. با استفاده از قضیه ۳.۴، نشان می‌دهیم $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده نیستند. زیرمجموعه دلخواه σ را از $\mathbb{N}$ در نظر بگیرید. پس $\{\sigma, \sigma^c\}$ یک افراز از $\mathbb{N}$ می‌باشد، اما به سادگی می‌توان دید که هیچ یک از مجموعه‌های $\{\sigma, \pi(\sigma^c)\}$ و $\{\pi(\sigma), \sigma^c\}$ افرازی از $\mathbb{N}$ نیستند. بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۴، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۵. آشفتگی‌ها

از آنجا که بحث آشفتگی در تئوری قاب‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است، در این بخش برخی مسائل که در ارتباط با آشفتگی پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده هستند را بررسی می‌کنیم. قضیه زیر ارتباطی جالب از آشفتگی، عملگرها و پایه‌های ریس CPـ درهم‌تنیده را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۵. *فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in I}$ یک پایه ریس با کران‌های A, B برای H باشد، و T یک عملگر معکوس‌پذیر روی H باشد. اگر زیرمجموعه $\mathcal{J}$ از $\mathcal{I}$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) *نامعادله‌های* $\sum_{i\in\mathcal{J}} |\langle x, (I-T)\phi_i\rangle|^۲ \leq \lambda_۱ \| x \|^۲$ *و* $\sum_{i\in\mathcal{J}^c} |\langle x, (I-T)\phi_i\rangle|^۲ \leq \lambda_۲ \| x \|^۲$ *برای هر* $x \in H$ *برقرار باشند که در آن* $۰ < \lambda_۱, \lambda_۲ < A$.

(۲) *زیرفضاهای* $\overline{\textbf{span}}\{\phi_i : i \in \mathcal{J}\}$ *و* $\overline{\textbf{span}}\{\phi_i : i \in \mathcal{J}^c\}$ *تحت* T *پایا باشند،*

آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *و* $\{T\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *برای* H *پایه‌های ریس* CP*ـ درهم‌تنیده هستند.*

اثبات. چون T معکوسپذیر است، $\{T\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H است. بنابراین با استناد به [۴، گزاره ۱.۳]، برای $\sigma \subset \mathcal{I}$ خانواده

$$\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{T\phi_i\}_{i\in\sigma^c},$$

یک دنباله بسل برای H با کران $B(\|T\|+۱)$ است. اکنون قرار می‌دهیم $\sigma = \mathcal{J}^c \subset \mathcal{I}$. برای هر $x \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\sigma}|\langle x,\phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,T\phi_i\rangle|^۲ &= \sum_{i\in\sigma}|\langle x,\phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,T\phi_i-\phi_i+\phi_i\rangle|^۲\\
&= \sum_{i\in\sigma}|\langle x,\phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,\phi_i\rangle - \langle (I-T^*)x,\phi_i\rangle|^۲\\
&\geq \left(\sum_{i\in\sigma}|\langle x,\phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,\phi_i\rangle|^۲\right)\\
&- \left(\sum_{i\in\sigma^c}|\langle (I-T^*)x,\phi_i\rangle|^۲\right)\\
&\geq A\|x\|^۲ - \lambda_۱\|x\|^۲\\
&\geq (A-\lambda_۱)\,\|x\|^۲.
\end{aligned}$$

از طرفی، چون $A-\lambda_۱ > ۰$، بنابراین $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{T\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب برای H است و با توجه به شرط (۲) و اینکه $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه برای H است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cap \{T\phi_i\}_{i\in\sigma^c} = \emptyset.$$

پس $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{T\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک پایه ریس برای H است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد $\{\phi_i\}_{i\in\sigma^c} \cup \{T\phi_i\}_{i\in\sigma}$ نیز یک پایه ریس برای H می‌باشد. بنابراین، اثبات این قضیه به اتمام می‌رسد.

□

لم بعد که در ادامه این بخش مورد استفاده قرار می‌گیرد، شرایطی را بیان می‌کند که تحت آنها اجتماع دو زیرمجموعه از یک پایه ریس، پایه ریس شود.

لم ۲.۵. *فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H باشد و π_1,π_2 توابع جایگشت روی $\mathcal{I}$ به‌طوری‌که خانواده*

$$\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c},$$

برای H قاب باشد، که σ زیرمجموعه‌ای نابدیهی از $\mathcal{I}$ می‌باشد. در این صورت $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک پایه ریس برای H است.

اثبات. نشان می‌دهیم $\pi_1(\sigma)\cap\pi_2(\sigma^c)=\emptyset$. چون π_1 و π_2 روی $\mathcal{I}$ دوسویی هستند، پس $|\sigma|=|\pi_1(\sigma)|$ و $|\sigma^c|=|\pi_2(\sigma^c)|$. اگر $\pi_1(\sigma)\cap\pi_2(\sigma^c)\neq\emptyset$ ، آنگاه $\pi_1(\sigma)\cup\pi_2(\sigma^c)\subsetneq\mathcal{I}$. درنتیجه با توجه به این که $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H است می‌توان نتیجه گرفت

$$\overline{\mathbf{span}}\left(\{\phi_{\pi_1(\mathrm{i})}\}_{\mathrm{i}\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_2(\mathrm{i})}\}_{\mathrm{i}\in\sigma^{\mathrm{c}}}\right)\neq\mathrm{H},$$

که یک تناقض است، زیرا $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب برای H است. □

قضیه بعد شرایط بهینه‌ای را برای آشفتگی هم‌بافته‌های با چیدمان متفاوت از یک پایه ریس $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ بیان می‌کند.

قضیه ۳.۵. *فرض کنید $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک پایه ریس برای H با کران‌های $0<A\leq B<\infty$ باشد، و π_1,π_2 توابع جایگشت روی $\mathcal{I}$ باشند. همچنین فرض کنید ثابت مثبت λ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda<\frac{A}{2}$ و*

$$\sum_{i\in\mathcal{J}}|\langle x,\phi_{\pi_1(i)}-\phi_{\pi_2(i)}\rangle|^2\leq\lambda\|x\|^2\quad\forall x\in H,\tag{۱.۵}$$

جایی‌که $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$ ناتهی می‌باشد. در این صورت زیر مجموعه نابدیهی σ از $\mathcal{I}$ موجود است که خانواده‌های

$$\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}\quad,\quad\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma}\cup\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma^c}$$

پایه‌های ریس برای H هستند. به عبارت دیگر $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه‌های ریس CP-درهم‌تنیده برای H

هستند.

اثبات. قرار می‌دهیم $\sigma = \mathcal{J}^c$. ثابت می‌کنیم $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک پایه ریس برای H است. برای هر $x \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi_2(i)}\rangle|^2 &\leq \sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 + \sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle x, \phi_{\pi_2(i)}\rangle|^2 \\ &\leq 2B\|x\|^2.\end{aligned}$$

پس خانواده $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک دنباله بسل برای H با کران $2B$ می‌باشد. از طرفی دیگر داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi_2(i)}\rangle|^2 &= \sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi_2(i)} - \phi_{\pi_1(i)} + \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 \\ &\geq \sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)}\rangle|^2 \\ &- \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi_1(i)} - \phi_{\pi_2(i)}\rangle|^2 \\ &\geq (A-\lambda)\|x\|^2 \\ &\geq \frac{A}{2}\|x\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین برای مجموعه $\sigma = \mathcal{J}^c \subset \mathcal{I}$، خانواده $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب برای H به ترتیب با کران‌های بالا و پایین $2B$ و $\frac{A}{2}$ است. به روشی مشابه می‌توان نشان داد خانواده $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\sigma^c} \cup \{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\sigma}$ نیز یک قاب برای H است. در نتیجه با استناد به لم ۲.۵، $\{\phi_{\pi_1(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi_2(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه‌های ریس CP- درهم‌تنیده برای H هستند. □

در گزاره زیر شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آنها یک پایه ریس و یک چیدمان از آن پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده هستند. در ادامه، T_Φ و T_{Φ_π} عملگرهای تجزیه به‌ترتیب برای دنباله‌های بسل $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\Phi_\pi = \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ هستند. یعنی

$$T_\Phi(x) = \{\langle x, \phi_i\rangle\}_{i\in\mathcal{I}}.$$

و

$$T_{\Phi_\pi}(x) = \{\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle\}_{i\in\mathcal{I}},$$

همچنین $T^\sigma(x) = \{\langle x, \phi_i\rangle\}_{i\in\sigma}$ برای هر $x \in H$.

گزاره ۴.۵. *فرض کنید $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک مجموعه مستقل خطی در H باشد که دنباله‌ای بسل با کران B نیز هست. اگر π یک تابع جایگشت روی $\mathcal{I}$ باشد به‌طوری که $\sigma \subset \mathcal{I}$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) $T^*_\Phi T_{\Phi_\pi} = I_{\mathcal{U}}$،

(۲) $T^{*\sigma}_\Phi T^\sigma_{\Phi_\pi} = T^{*\sigma}_{\Phi_\pi} T^\sigma_\Phi$.

آنگاه $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ و $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ پایه‌های ریس CPـدرهم‌تنیده برای H هستند.

اثبات. با استفاده از لم ۲.۵، کافی است نشان دهیم خانواده $\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب برای H است. چون $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ یک دنباله بسل با کران B می‌باشد، مشابه اثبات قضیه قبل می‌توان نشان داد خانواده

$$\{\phi_i\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma^c}$$

نیز یک دنباله بسل با کران $۲B$ می‌باشد. اکنون برای $\sigma \subset \mathcal{I}$ که در فرض گزاره داده شده است و برای هر $x \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}
\| x \|^۴ &= \langle x, x\rangle^۲ \\
&= \langle T_{\Phi}^{*} T_{\Phi_\pi} x, x\rangle^۲ \\
&= \langle T_{\Phi}^{*\sigma} T_{\Phi_\pi}^{\sigma} x + T_{\Phi}^{*\sigma^c} T_{\Phi_\pi}^{\sigma^c} x, x\rangle^۲ \\
&\leq ۲|\langle T_{\Phi}^{*\sigma} T_{\Phi_\pi}^{\sigma} x, x\rangle|^۲ + ۲|\langle T_{\Phi}^{*\sigma^c} T_{\Phi_\pi}^{\sigma^c} x, x\rangle|^۲ \\
&= ۲|\langle T_{\Phi}^{*\sigma} T_{\Phi_\pi}^{\sigma} x, x\rangle|^۲ + ۲|\langle T_{\Phi_\pi}^{*\sigma^c} T_{\Phi}^{\sigma^c} x, x\rangle|^۲ \\
&\leq ۲|\sum_{i\in\sigma} \langle \phi_{\pi(i)}, x\rangle\langle x, \phi_i\rangle|^۲ + ۲|\sum_{i\in\sigma^c} \langle \phi_i, x\rangle\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle|^۲ \\
&\leq ۲ \sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle|^۲ \sum_{i\in\sigma} |\langle x, \phi_i\rangle|^۲ + ۲ \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_i\rangle|^۲ \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle|^۲ \\
&\leq ۲B \| x \|^۲ \left(\sum_{i\in\sigma} \langle x, \phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle|^۲ \right)
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد

$$\frac{۱}{۲B} \| x \|^۲ \leq \left(\sum_{i\in\sigma} \langle x, \phi_i\rangle|^۲ + \sum_{i\in\sigma^c} |\langle x, \phi_{\pi(i)}\rangle|^۲ \right).$$

پس نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. به طریق مشابه می‌توان نشان داد خانواده $\{\phi_{\pi(i)}\}_{i\in\sigma} \cup \{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ نیز یک قاب برای H است. بنابراین، اثبات گزاره تمام می‌شود. □

مراجع

[۱] غ. رحیم لو و و. صدری، بررسی Kـقاب‌های پیوسته درهم‌تنیده در فضاهای هیلبرت، *مجله موجک‌ها و جبرخطی*، ۸(۳) (۱۴۰۱)، ۱۲۳–۱۴۰.

[2] A. Askari, and A. Ahmadi, Reordered frames and weavings, Bull. Iran. Math. Soc., 48 (2022), 41-51.

[3] S. B. Andrade, P. G. Casazza, D. Cheng, J. Haas, and T. T. Tran, Phase retrieval in $l_2(\mathbb{R})$, Quarterly Physics Review, 4, 3 (2018), 1-17.

[4] T. Bemrose, P. G. Casazza, K. Gröchenig, M. C. Lammers, and R. G. Lynch, Weaving frames, OAM, 10, 4 (2016), 1093-1116.

[5] B. G. Bodmann, P. G. Casazza, and G. Kutyniok, A quantitative notion of redundancy for finite frames, Appl. Comput. Harmonic. Anal., 3 (2011), 348-362.

[6] P.G. Casazza, and J. Kovačević, Uniform tight frames with erasures, preprint, (2001).

[7] P. G. Casazza, and R.G. Lynch, Weaving properties of Hilbert space frames, (2015), International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA), doi:10.1109/sampta.2015.7148861.

[8] P. G. Casazza, and G. Kutyniok, Finite frames, Theory and Applications, Birkhäuser, Boston (2012).

[9] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, 2nd edn, Birkhäuser, Boston, (2015).

[10] O. Christensen, and Y. C. Eldar, Oblique dual frames and shift invariant spaces, Appl. Comput. harmon. Anal., 17 (2004), 48-68.

[11] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS Series, SIAM, (1992).

[12] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, J. Math. phys., 27 (1986), 1271-1283.

[13] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 341-366.

[14] A. B. Hafshejani, and M. A. Dehghan, P-woven frames, J. Math. Anal. Appl., 479 (2019), 673-687.

[15] V.K. Goyal, J. Kovaèeviæ, and J.A. Kelner, Quantized frame expansions with erasures, Appl. Comput. Harmon. Anal., 10, 3 (2001), 203–233.

[16] V.K. Goyal, M. Vetterli, and N.T. Thao, Quantized overcomplete expansions in $\mathbb{R}_n$: analysis, synthesis, and algorithms, IEEE Trans. Inform. Theory, 44, 1 (1998), 16–31.

[17] R. Holmes, and V. Paulsen, Optimal frames for erasures, Linear Algebra Appl., 377 (2004), 31–51.

[18] X. Xiao , G. Zhou, and Y. Zhu, Uniform excess frames in Hilbert spaces, Results. Math., 73 (2018), 108-121.

[19] J. Leng, and D. Han, Optimal dual frames for erasures II, Linear Algebra Appl., 435 (2011), 1464–1472.

[20] J. Lopez, and D. Han, Optimal dual frames for erasures, Linear Algebra Appl., 432 (2010), 471–482.