موجک‌ها و جبرخطی ۱۱(۳) (۱۴۰۳) ۱-۲۲

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

نامساوی ینسن برای توابع به طور قوی محدب و کاربردهای آن

یامین سیاری[آ]، حسن برسم*[ب]، نعمت غفاری[ج]

[آ]گروه رياضي، دانشکده رياضي و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتي سیرجان، سیرجان، ایران
[ب]گروه رياضي، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جیرفت، جیرفت، ایران
[ج]گروه رياضي کاربردی، دانشکده علوم و فناوری های نوین ، دانشگاه تحصیلات تکمیلی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده:۲۵ تیر ۱۴۰۱
پذیرفته شده:۲۷ اسفند ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:
به طور قوی محدب، نامساوی ینسن، نامساوی ینسن-مرسر.

چکیده

توابع به طور قوی محدب، حالت کلی‌تری از توابع محدب هستند، لذا در علم ریاضیات، از جمله در مبحث بهینه سازی، از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند. در این مقاله نامساوی ینسن و نامساوی ینسن-مرسر، برای توابع به طور قوی محدب مورد بررسی قرارگرفته است و در ادامه بهبودها و تعمیم‌هایی از نامساوی ینسن و نامساوی ینسن-مرسر برای توابع دوبار مشتق پذیر ارائه شده است، که در آن‌ها خاصیت به طور قوی محدب بودن، برای تابع هدف، از قبل مفروض نیست. همچنین نتایج مقاله [۱۸] نیز بهبود داده شده است.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: y.sayyari@gmail.com (یامین سیاری)، hasanbarsam@ujiroft.ac.ir (حسن برسم)، nemat.ghafari12@gmail.com (نعمت غفاری)

http://doi.org/10.22072/WALA.2023.557952.1392

۱. مقدمه

یکی از مباحث مهم در آنالیز محدب، مبحث نامساوی‌ها و کاربرد های آن‌ها می باشد. در میان نامساوی‌های مهم، نامساوی ینسن کاربردهای فراوانی در علومی نظیر نظریه اطلاعات، آمار و احتمال و غیره دارد. از مفاهیم آمار می توان به امید ریاضی و واریانس اشاره نمود که نمونه ای از اثرگذاری نامساوی ینسن در آن را می توان در مقاله [۱۸] یافت که در آن نویسنده به کمک این نامساوی نتایج مفیدی برای کران‌های امید ریاضی و واریانس ارائه نموده است. همچنین درنظریه اطلاعات، یکی از مفاهیم پرکاربرد آن بحث آنتروپی می باشد که به عنوان نمونه ای از آن می توان به آنتروپی شانون اشاره نمود که در مقاله [۱۶] نویسنده، بهبودی از آن را به کمک نامساوی ینسن ارائه نموده است. وجود شرط به طور قوی محدب، موقعیت های مناسبی جهت انجام پژوهش در مباحث کاربردی ایجاد می کند به طور مثال اگر f تابعی بطور قوی محدب باشد آنگاه از بالا کراندار است. همچنین این توابع، نقطه مینیمم یکتایی روی هر زیر بازه بسته از مجموعه های مسطح خود دارند [۹] .

در ریاضیات، نامساوی های مهمی نظیر نامساوی کوشی، نامساوی هولدر، نامساوی مینکوفسکی، نامساوی کی-فان و نامساوی ینسن-مرسر وجود دارد که همگی حالت خاصی از نامساوی ینسن هستند. اخیراً نویسندگان از نامساوی ینسن برای توسیع و یا بهبود کران‌های نامساوی ها بهره گرفته اند که نمونه هایی از آنها را می‌توان در مراجع [۱]، [۲]،[۳]،[۶]،[۸]، [۱۱]،[۱۲]، [۱۴]، [۱۵]،[۱۶] یافت.

در ادامه برخی از مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را ارائه می دهیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $x_1, \dots, x_n \in I$ و $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ اعدادی باشند که $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. مجموع $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ را ترکیب محدب نقاط x_i (با ضرایب p_i) می‌نامند.

نامساوی معروف ینسن ([۱]،[۷]،[۱۷]،[۱۹]) برای تابع محدب f به صورت زیر است:

قضیه ۲.۱ (نامساوی ینسن). *فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. در این صورت نامساوی*

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

برای هر ترکیب محدب $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ از نقاط $x_i \in I$ صادق است.

هدف از این مقاله تعمیم نامساوی ینسن برای توابع به طور قوی محدب و همچنین برای توابع دوبار مشتق پذیر و فاقد شرط به طور قوی محدب می‌باشد.

قضیه ۳.۱. *([۱۳]) فرض‌کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع محدب یکنواخت روی بازه I با مدول $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [۰, +\infty]$ و $[a, b] \supseteq \{x_k\}_{k=۱}^{n}$ یک دنباله باشد. همچنین فرض‌کنید π یک جایگشت روی $\{۱, ..., n\}$ باشد، به طوری‌که*

$$x_{\pi(۱)} \leq x_{\pi(۲)} \leq ... \leq x_{\pi(n)}.$$

آن‌گاه نامساوی

$$f(\sum_{k=۱}^{n} p_k x_k) \leq \sum_{k=۱}^{n} p_k f(x_k) - \sum_{k=۱}^{n-۱} p_{\pi(k)} p_{\pi(k+۱)} \phi(x_{\pi(k+۱)} - x_{\pi(k)}) \qquad (۱.۱)$$

برای هر ترکیب محدب $\sum_{k=۱}^{n} p_k x_k$ از نقاط $x_k \in I$ برقرار می باشد.

۲. نتایج اصلی

ابتدا از تعریف تابع به طور قوی محدب شروع می کنیم، سپس در قالب یک لم، یکی از ویژگی های آن را ارائه می کنیم. در سراسر این مقاله بازه I به صورت $I = [a, b]$ در نظرگرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲. ([۴]) تابع f بر بازه I به طور قوی محدب با مدول $c > ۰$ نامیده می‌شود، هرگاه برای همه $x, y \in I$ و $۰ \leq t \leq ۱$ نامساوی:

$$f(tx + (۱ - t)y) + ct(۱ - t)(y - x)^۲ \leq tf(x) + (۱ - t)f(y),$$

برقرار باشد.

لم ۲.۲. *فرض‌کنید f بر بازه I به طور قوی محدب با مدول $c > ۰$ و $x \in I$ باشد، آن‌گاه نامساوی*

$$f(a + b - x) \leq f(a) + f(b) - f(x) - ۲c(b - x)(x - a)$$

برای هر $x \in I$ برقرار است.

اثبات. فرض کنید $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. بنابراین $a+b-x = (1-\lambda)a + \lambda b$ و $\lambda = \frac{b-x}{b-a}$. لذا

$$\begin{aligned} f(x) + f(a+b-x) &\le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - c\lambda(1-\lambda)(b-a)^2 \\ &\quad + (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) - c\lambda(1-\lambda)(b-a)^2 \\ &= f(a) + f(b) - 2c(b-x)(x-a). \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قضیه تمام است. $\square$

اکنون به کمک قضیه ۳.۱ و لم ۲.۲ برخی از نتایج مفیدی را که در ادامه مورد نیاز است، ارائه می‌دهیم.

لم ۳.۲. *اگر $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ یک دنباله متناهی و صعودی در بازه I باشد و f تابعی به طور قوی محدب روی I باشد، آن‌گاه نامساوی*

$$\begin{aligned} f(a+b-x) \le f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - 2c \sum_{i=1}^{n} p_i (b-x_i)(x_i-a) \\ - c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2 \end{aligned}$$

برقرار است.

اثبات. با استفاده از قضیه ۳.۱ و لم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&f(a+b-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} p_i(a+b-x_i)) + \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} p_i f(a+b-x_i) - c\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} p_i(f(a)+f(b)-2c(b-x_i)(x_i-a)) - c\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 \\
&= f(a)+f(b)-2c\sum_{i=1}^{n} p_i(b-x_i)(x_i-a) - c\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2.
\end{aligned}$$

لذا اثبات کامل است. □

قضیه ۴.۲. *اگر f تابعی به طور قوی محدب بر بازه I باشد و $a \le x_i \le b$ و $\bar{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ همچنین*

$$x_1 = \min_{1\le i\le n}\{x_i\}, \quad x_n = \max_{1\le i\le n}\{x_i\}$$

آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \le f(a)+f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) - J_c(\bar{x})$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
J_c(\bar{x}) = c(b-x_n)(x_1-a) + \frac{c}{2}(a+b-2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)^2 \\
+ c(b-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - a).
\end{aligned}$$

اثبات. در قضیه ۳.۱ قرار دهید: $\phi(r) = cr^{۲}$. □

لم ۵.۲. *فرض کنید* $a \leq x_{۱} \leq x_{۲} \leq \cdots \leq x_n \leq b$ *و* $\bar{x} = \{x_i\}$. *همچنین فرض کنید* $y_i = a + b - x_i$ *و* $\bar{y} = \{y_i\}$ *آن‌گاه برای هر* $c > ۰$ *داریم:*

$$J_c(\bar{x}) = J_c(\bar{y}).$$

اثبات. اگر $y_i = a + b - x_i$ آن‌گاه, $a \leq y_n \leq \cdots \leq y_{۱} \leq b$ بنابراین:

$$\begin{aligned}
J_c(\bar{y}) = \\
& c(b - y_{۱})(y_n - a) + \frac{c}{۲}(a + b - ۲\sum_{i=۱}^{n} p_i y_i)^{۲} + c(b - \sum_{i=۱}^{n} p_i y_i)(\sum_{i=۱}^{n} p_i y_i - a) \\
& = c(b - (a + b - x_{۱}))(a + b - x_n - a) + \frac{c}{۲}(a + b - ۲\sum_{i=۱}^{n} p_i(a + b - x_i))^{۲} \\
& + c(b - \sum_{i=۱}^{n} p_i(a + b - x_i))(\sum_{i=۱}^{n} p_i(a + b - x_i) - a) \\
& = c(b - x_n)(x_{۱} - a) + \frac{c}{۲}(a + b - ۲\sum_{i=۱}^{n} p_i x_i)^{۲} + c(b - \sum_{i=۱}^{n} p_i x_i)(\sum_{i=۱}^{n} p_i x_i - a) \\
& = J_c(\bar{x}).
\end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۲. *اگر* $\{x_i\}_{i=۱}^{n}$ *یک دنباله ی متناهی و نزولی در بازه ی* I *و* f *تابعی به طور قوی محدب روی* I *باشند. آن‌گاه، نتیجه زیر را داریم:*

$$\begin{aligned}
۲\left[f(a) + f(b) - ۲f(\frac{a+b}{۲})\right] &\geq f(a) + f(b) - \sum_{i=۱}^{n} p_i f(x_i) \\
&- f(a + b - \sum_{i=۱}^{n} p_i x_i) + \frac{c}{۲}\sum_{i=۱}^{n} p_i(a + b - ۲x_i)^{۲} + J_c(\bar{x}).
\end{aligned}$$

اثبات. فرض کنید $x_{۱} \geq \cdots \geq x_n$ و $y_i = a + b - x_i$ در این‌صورت $y_{۱} \leq y_{۲} \leq \cdots \leq y_n$ و لذا بنابر قضیه ی

۳.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
f(a)+f(b)-۲f(\frac{a+b}{۲}) &\geq \sum_{i=۱}^{n} p_i f(y_i) - f(\sum_{i=۱}^{n} p_i y_i) + J_c(\bar{y}) \\
&= \sum_{i=۱}^{n} p_i f(a+b-x_i) - f(\sum_{i=۱}^{n} p_i (a+b-x_i)) + J_c(\bar{x}) \\
&\geq \sum_{i=۱}^{n} p_i [۲f(\frac{a+b}{۲}) - f(x_i) + \frac{c}{۲}(a+b-۲x_i)^۲] \\
&- f(a+b-\sum_{i=۱}^{n} p_i x_i) + J_c(\bar{x}) \\
&= f(a)+f(b) - \sum_{i=۱}^{n} p_i f(x_i) - f(a+b-\sum_{i=۱}^{n} p_i x_i) \\
&+ \frac{c}{۲}\sum_{i=۱}^{n} p_i (a+b-۲x_i)^۲ + J_c(\bar{x}) - \left[f(a)+f(b)-۲f(\frac{a+b}{۲})\right]
\end{aligned}$$

که نتیجه حاصل می‌شود. □

نتایجی دیگر از توابع به طور قوی محدب به صورت زیر است.

قضیه ۷.۲. *اگر $a \leq x, y \leq b$ و تابع f روی I به طور قوی محدب با مدول c باشد و $x+y=a+b$ آن‌گاه*

$$۲f(\frac{a+b}{۲}) + \frac{c}{۲}(x-y)^۲ \leq f(x)+f(y) \leq f(a)+f(b) - ۲c(b-x)(b-y).$$

اثبات. نامساوی سمت راست از لم ۲.۲ به دست می آید، بنابراین فقط نامساوی سمت چپ را اثبات می کنیم.

فرض کنید $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ و $y = (1-\lambda)a + \lambda b$ بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{a+b}{2}) &= f(\frac{\lambda a + (1-\lambda)b}{2} + \frac{(1-\lambda)a + \lambda b}{2}) \\
&\leq \frac{1}{2} f(\lambda a + (1-\lambda)b) + \frac{1}{2} f((1-\lambda)a + \lambda b) - \frac{c}{4}((2\lambda - 1)(b-a))^2 \\
&= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - \frac{c}{4}(x-y)^2.
\end{aligned}
$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم :

$$
2f(\frac{a+b}{2}) + \frac{c}{2}(x-y)^2 \leq f(x) + f(y).
$$

□

در ادامه، روش هایی را برای مشخص سازی توابع به طور قوی محدب ارائه می دهیم. لم زیر در [[10] ص ۲۶۸]، آمده است، اما به واسطه اهمیت آن اثباتی ساده از آن را در اینجا ارائه می کنیم.

لم ۸.۲. *اگر $f \in C^2(I)$ ، آن‌گاه f به طور قوی محدب با مدول $c > 0$ گفته می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $a < x < b$ رابطه ی $f''(x) \geq 2c$ برقرار باشد. ($C^2(I)$ بیانگر توابع پیوسته و دو بار مشتق پذیر با مشتق دوم پیوسته روی I می باشد.)*

اثبات. برای هر $x, y \in I$ کافی است تابع $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$
g(t) = f(tx + (1-t)y) + ct(1-t)(x-y)^2 - tf(x) - (1-t)f(y).
$$

به راحتی دیده می‌شود که

$$
g(0) = g(1) = 0
$$

و

$$
g''(t) = (x-y)^2 f''(tx + (1-t)y) - 2c(x-y)^2
$$

لذا $g''(t) \geq 0$ اگر و تنها اگر $g(t) \leq 0$. بنابراین $\min_{x \in I} f''(x) \geq 2c$ اگر و تنها اگر f تابعی به طور قوی محدب با مدول c باشد. □

به کمک لم ۸.۲ می توان نتایج مشابهی به صورت زیر به دست آورد.

لم ۹.۲. *اگر* $c > 0$ *و* $g \in C^2(I)$ *و* $m_g(I) := \min_{t\in I}\{g''(t)\} - 2c$ *آن‌گاه تابع*

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}m_g(I)x^2$$

تابعی به طور قوی محدب با مدول c *می باشد.*

اثبات. چون

$$f''(t) = g''(t) - m_g(I) = g''(x) - \min_{x\in I}\{g''(t)\} + 2c \geq 2c$$

بنابر لم ۸.۲ تابع f به طور قوی محدب با مدول c است. □

لم ۱۰.۲. *اگر* $c > 0$ *و* $g \in C^2(I)$ *و*

$$m_g(I) = \max_{x\in I}\{g''(t)\} + 2c$$

آن‌گاه تابع $f(x) = \frac{1}{2}m_g(I)x^2 - g(x)$ *به طور قوی محدب با مدول* c *است.*

اثبات. چون

$$f''(x) = m_g(x) - g''(x) = \max_{t\in I}\{g''(t)\} + 2c - g(x) \geq 2c$$

بنابر لم ۸.۲ تابع f به طور قوی محدب است. □

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید $\bar{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ و $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ همچنین f تابعی به طور قوی محدب با مدول c باشد. آن‌گاه $J_n(P, \bar{x}, f)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_n(P, \bar{x}, f) := \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i).$$

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنید* $x \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ *و* f *تابعی به طور قوی محدب بر* I *با مدول* c *باشد. آن‌گاه*

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

اثبات. در قضیه ۳.۱ قرار دهید $\phi(r) = cr^2$. □

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنید* $\bar{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *دنباله ای صعودی باشد و* $\bar{x} \subset I$ *و* $c > 0$*. آن‌گاه رابطه ی زیر را داریم:*

$$J_n(P, \bar{x}, g) \geq \frac{1}{2} m_g(I) J_n(P, \bar{x}, x^2) + c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_i - x_{i+1})^2$$

که $m_g(I) = \min_{t \in I}\{g''(t)\} - 2c$.

اثبات. چون $c > 0$، بنابر لم ۹.۲ تابع $f(x) = g(x) - \frac{1}{2} m_g(x) x^2$ نیز به طور قوی محدب با مدول c می باشد. لذا بنابر قضیه ۱۲.۲ داریم

$$J_n(P, \bar{x}, f) \geq c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

در نتیجه

$$J_n(P, \bar{x}, g) - \frac{1}{2} m_g(I) J_n(P, \bar{x}, x^2) \geq c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2,$$

و این اثبات را کامل می کند. □

قضیه ۱۴.۲. *فرض کنید* $\bar{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *دنباله ای صعودی باشد و* $\bar{x} \subset I,\ g \in C^2(I)$ *و* $c > 0$ *آن‌گاه*

$$J_n(P, \bar{x}, g) \leq \frac{1}{2} m_g(I) J_n(P, \bar{x}, x^2) - c \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2,$$

که درآن $m_g(I) = \max_{t \in I}\{g''(t)\} + 2c$.

اثبات. چون $c > 0$ بنابر لم ۱۰.۲ تابع $f(x) = \frac{1}{2} m_g(I) x^2 - g(x)$ نیز به طور قوی محدب با مدول c است. لذا

بنابر قضیه ۱۲.۲ داریم

$$J_n(P,\bar{x},f) \geq c\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2$$

لذا

$$\frac{1}{2}m_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2) - J_n(P,\bar{x},g) \geq c\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2.$$

بنابراین اثبات کامل شد. □

لم ۱۵.۲. *فرض کنید $g \in C^2(I), n_g(I) = \min_{t\in I}\{g''(t)\}$ و $c > 0$ آن‌گاه، تابع*

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}n_g(I)x^2 + cx^2$$

به طور قوی محدب با مدول c است.

اثبات. چون

$$f''(x) = g''(x) - n_g(I) + 2c \geq 2c$$

پس بنابر لم ۸.۲ تابع f به طور قوی محدب با مدول c است. □

لم ۱۶.۲. *فرض کنید $c > 0$ و $N_g(x) = \max_{t\in I}\{g''(t)\}$ آن‌گاه تابع*

$$f(x) = \frac{1}{2}N_g(x)x^2 - g(x) + cx^2$$

به طور قوی محدب با مدول c می باشد.

اثبات. چون

$$f''(x) = N_g(x) - g''(x) + 2c \geq 2c$$

پس بنابر لم ۸.۲ تابع f به طور قوی محدب با مدول c است. □

قضیه ۱۷.۲. *فرض کنید* $\bar{x} = \{x_۱, \cdots, x_n\}$ *دنباله ای صعودی باشد و* $g \in C^۲(I)$ همچنین $c > ۰$،

$$n_g(I) = \min_{t\in I}\{g''(t)\}$$

آن‌گاه

$$J_n(P, \bar{x}, g) \geq (\frac{۱}{۲}n_g(E) - c)J_n(P, \bar{x}, x^۲) + c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_{i+۱} - x_i)^۲.$$

اثبات. چون $c > ۰$ بنابر لم ۱۵.۲ تابع

$$f(x) = g(x) - \frac{۱}{۲}n_g(I)x^۲ + cx^۲$$

به طور قوی محدب با مدول c است. بنابر قضیه ۱۲.۲ داریم:

$$J_n(P, \bar{x}, f) \geq c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_{i+۱} - x_i)^۲$$

بنابراین

$$J_n(P, \bar{x}, g) - \frac{۱}{۲}n_g(I)J_n(P, \bar{x}, x^۲) + cJ_n(P, \bar{x}, x^۲) \geq c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_{i+۱} - x_i)^۲.$$

در نتیجه اثبات کامل است. □

قضیه ۱۸.۲. *فرض کنید* $\bar{x} = \{x_۱, \cdots, x_n\} \subset I$ *دنباله ای صعودی باشد و همجنین* $g \in C^۲(I), c > ۰$ *و* $N_g(I) = \max_{t\in I}\{g''(t)\}$ *آن‌گاه رابطه ی زیر را داریم:*

$$J_n(P, \bar{x}, g) \leq (\frac{۱}{۲}N_g(I) + c)J_n(P, \bar{x}, x^۲) - c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_i - x_{i+۱})^۲.$$

اثبات. چون $c > ۰$ بنابر لم ۱۶.۲ تابع

$$f(x) = \frac{۱}{۲}N_g(x)x^۲ - g(x) + cx^۲$$

به طور قوی محدب با مدول c می باشد، پس طبق قضیه ۱۷.۲ داریم:

$$J_n(P, \bar{x}, f) \geq c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_{i+۱} - x_i)^۲$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}N_g(I)J_n(P, \bar{x}, x^۲) - J(P, \bar{x}, g) + cJ_n(P, \bar{x}, x^۲) \geq c\sum_{i=۱}^{n-۱} p_i p_{i+۱}(x_{i+۱} - x_i)^۲.$$

لذا اثبات کامل است. □

قضیه ۱۹.۲. *فرض کنید $g \in C^۲(I)$، $c > ۰$ و $\bar{x} \subseteq I$ آن‌گاه*

$$\begin{aligned} g(a) + g(b) - ۲g(\frac{a+b}{۲}) - \frac{۱}{۴}m_g(I)(a-b)^۲ + \frac{۱}{۲}m_g(I)J_n(P, \bar{x}, x^۲) + J_c(\bar{x}) \\ \leq J_n(P, \bar{x}, g) \\ \leq g(a) + g(b) - ۲g(\frac{a+b}{۲}) - \frac{۱}{۲}m_g(I)[\frac{(a-b)^۲}{۲} - J_n(P, \bar{x}, x^۲)] - J_c(\bar{x}). \end{aligned}$$

اثبات. بنابر لم ۹.۲ تابع $f(x) = g(x) - \frac{۱}{۲}m_g(I)x^۲$ به طور قوی محدب با مدول c است، اکنون در قضیه ۴.۲ قرار دهید:

$$f(x) = g(x) - \frac{۱}{۲}m_g(I)x^۲$$

بنابراین داریم:

$$J_n(P, \bar{x}, f) \leq f(a) + f(b) - ۲f(\frac{a+b}{۲}) - J_c(\bar{x})$$

در نتیجه:

$$J_n(P,\bar{x},g)-\frac{1}{2}m_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)\leq g(a)-\frac{1}{2}m_g(I)a^2+g(b)-\frac{1}{2}m_g(I)b^2$$
$$-2g(\frac{a+b}{2})+m_g(I)(\frac{a+b}{2})^2-J_c(\bar{x})$$

که نامساوی سمت راست نتیجه می‌شود. به طور مشابه چون تابع $h(x)=\frac{1}{2}M_g(I)x^2-g(x)$ به طور قوی محدب با مدول $c>0$ است، بنابر لم ۱۰.۲ تابع $f(x)=-g(x)+\frac{1}{2}M_g(I)x^2$ به طور قوی محدب با مدول c است، اکنون در قضیه ۴.۲ قرار دهید:

$$f(x)=-g(x)+\frac{1}{2}M_g(I)x^2$$

بنابراین داریم:

$$J_n(P,\bar{x},f)\leq f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})-J_c(\bar{x})$$

پس

$$\frac{1}{2}M_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)-J_n(P,\bar{x},g)\leq\frac{1}{2}M_g(I)a^2-g(a)$$
$$+\frac{1}{2}M_g(I)b^2-g(b)-M_g(I)(\frac{a+b}{2})^2+2g(\frac{a+b}{2})-J_c(\bar{x}),$$

که سمت چپ نامساوی نتیجه می‌شود. □

در ادامه، کران‌هایی را برای J_n می یابیم.

قضیه ۲۰.۲. *فرض‌کنید* $g\in C^2(I)$, $c>0$ *و* $\bar{x}\subset I$ *آن‌گاه:*

$$J_n(P,\bar{x},g)\leq g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{4}n_g(I)(a-b)^2$$
$$+c(a-b)^2-(c-\frac{1}{2}n_g(I))J_n(P,\bar{x},x^2)-J_c(\bar{x}).$$

که درآن $n_g(I)=\min_{t\in I}\{g''(I)\}$.

اثبات. بنابر لم ۱۵.۲ تابع

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}n_g(I)x^2 + cx^2$$

به طور قوی محدب است. در قضیه ۴.۲ قرار دهید: $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}n_g(I)x^2 + cx^2$ بنابراین داریم:

$$J_n(P, \bar{x}, f) \leq f(a) + f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) - J_c(\bar{x}).$$

$$\begin{aligned}
&J_n(P, \bar{x}, g) - \frac{1}{2}n_g(I)J_n(P, \bar{x}, x^2) + cJ_n(P, \bar{x}, x^2)\\
&\leq g(a) - \frac{1}{2}n_g(I)a^2 + ca^2 + g(b) - \frac{1}{2}n_g(I)b^2 + cb^2\\
&- 2g(\frac{a+b}{2}) + n_g(I)(\frac{a+b}{2})^2 - 2c(\frac{a+b}{2})^2 - J_c(\bar{x}).
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲۱.۲. *فرض کنید* $g \in C^2(I), c > 0$ *و* $\bar{x} \subseteq I$*. آن‌گاه:*

$$\begin{aligned}
J_n(P, \bar{x}, g) \geq g(a) + g(b) - 2g(\frac{a+b}{2}) - \frac{c}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{4}N_g(I)(a-b)^2\\
+ \frac{1}{2}N_g(I)J_n(P, \bar{x}, x^2) + cJ_n(P, \bar{x}, x^2),
\end{aligned}$$

که در آن $N_g(I) = \max_{t\in I}\{g''(t)\}$.

اثبات. بنا به لم ۱۶.۲ تابع $f(x) = \frac{1}{2}N_g(I)x^2 - g(x) + cx^2$ به طور قوی محدب است. اکنون در قضیه ۴.۲ قرار دهید:

$$f(x) = \frac{1}{2}N_g(I)x^2 - g(x) + cx^2.$$

در نتیجه داریم:

$$J_n(P, \bar{x}, f) \leq f(a) + f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) - J_c(\bar{x}).$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}N_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2) - J_n(P,\bar{x},g) + cJ_n(P,\bar{x},x^2)\\
&\leq \frac{1}{2}N_g(I)a^2 - g(a) + ca^2\\
&+ \frac{1}{2}N_g(I)b^2 - g(b) + cb^2 - N_g(I)(\frac{a+b}{2})^2 + 2g(\frac{a+b}{2}) - 2c(\frac{a+b}{2})^2.
\end{aligned}$$

با کمی محاسبه، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۲۲.۲. *اگر* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$، $c > 0$ *و* $g \in C^2(I)$ *آن‌گاه نتیجه ی زیر را داریم:*

$$\begin{aligned}
J_n(P,\bar{x},g) &\leq \frac{M_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2}))\\
&+ \frac{m_g(I)M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}(J_n(P,\bar{x},x^2) - \frac{1}{4}(b-a)^2) - \frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}J_c(\bar{x})\\
&- \frac{m_g(I)c}{m_g(I)+M_g(I)}\sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2.
\end{aligned}$$

اثبات. چون $\frac{M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}+\frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}=1$ بنابر قضیه ی ۱۴.۲ و قضیه ی ۱۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned}J_n(P,\bar{x},g) &\leq \frac{M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})\\ &+\frac{1}{2}m_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{m_g(I)}{4}(b-a)^2)-J_c(\bar{x}))\\ &+\frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}(\frac{1}{2}m_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)-c\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2)\\ &=\frac{M_g(I)}{m_g(I)+m_G(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2}))\\ &+\frac{m_g(I)M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}(J_n(p,\bar{x},x^2)-\frac{1}{4}(b-a)^2)-\frac{M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}J_c(\bar{x})\\ &-\frac{m_g(I)c}{M_g(I)+m_g(I)}\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2.\end{aligned}$$

□

قضیه ۲۳.۲. فرض کنید $x_1\leq\cdots\leq x_n$ و $c>0$، $g\in C^2(I)$ آن‌گاه:

$$\begin{aligned}J_n(P,\bar{x},g) &\leq \frac{N_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2}))\\ &+\frac{n_g(I)N_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}(J_n(p,\bar{x},x^2)-\frac{1}{4}(b-a)^2)\\ &-\frac{cN_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}(J_n(p,\bar{x},x^2)+J_c(\bar{x})-(b-a)^2).\end{aligned}$$

اثبات. بنابر قضیه ی ۱۸.۲ و قضیه ی ۱۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned}J_n(P,\bar{x},g) &\leq \frac{N_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}[g(a)+g(b)-۲g(\frac{a+b}{۲})+\frac{۱}{۲}n_g(I)J_n(P,\bar{x},x^{۲})\\&-\frac{۱}{۴}n_g(I)(b-a)^{۲}+c(b-a)^{۲}-cJ_n(P,\bar{x},x^{۲})-J_c(\bar{x})]\\&+\frac{n_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[(\frac{۱}{۲}N_g(I)+c)J_n(P,\bar{x},x^{۲})]-c\sum_{i=۱}^{n-۱}p_ip_{i+۱}(x_{i+۱}-x_i)^{۲}]\\&=\frac{N_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}(g(a)+g(b)-۲g(\frac{a+b}{۲}))\\&+\frac{n_g(I)N_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}(J_n(P,\bar{x},x^{۲})-\frac{۱}{۴}(b-a)^{۲})\\&+\frac{cN_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[(b-a)^{۲}-J_n(P,\bar{x},x^{۲})-J_c(\bar{x}).\end{aligned}$$

□

قضیه ۲۴.۲. *اگر* $x_۱\leq\cdots\leq x_n$، $c>۰$ *و* $g\in C^{۲}(I)$ *آن‌گاه نتیجه ی زیر را داریم:*

$$\begin{aligned}J_n(P,\bar{x},g) &\geq \frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}[g(a)+g(b)-۲g(\frac{a+b}{۲})]\\&+\frac{m_g(I)M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}(J_n(P,\bar{x},x^{۲})-\frac{۱}{۴}(b-a)^{۲})\\&+\frac{m_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}J_c(\bar{x})+\frac{M_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}\sum_{i=۱}^{n-۱}p_ip_{i+۱}(x_{i+۱}-x_i)^{۲}.\end{aligned}$$

اثبات. بنابر قضیه ی ۱۳.۲ و نامساوی سمت چپ قضیه ی ۱۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned} J_n(P,\bar{x},g) &\geq \frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}[g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2}) \\ &- \frac{1}{4}m_g(I)(b-a)^2+\frac{1}{2}M_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)+J_c(\bar{x})] \\ &+ \frac{M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}[\frac{1}{2}m_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2)+c\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2] \\ &= \frac{m_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})) \\ &+ \frac{m_g(I)M_g(I)}{m_g(I)+M_g(I)}(J_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{1}{4}(b-a)^2) \\ &+ \frac{m_g(I)c}{m_g(I)+M_g(I)}\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2+\frac{m_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}J_c(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

قضیه ۲۵.۲. *اگر $x_1 \leq \cdots \leq x_n$، $c > 0$ و $g \in C^2(I)$ آن‌گاه نتیجه ی زیر را داریم:*

$$\begin{aligned} J_n(P,\bar{x},g) &\geq \frac{n_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})] \\ &+ \frac{n_g(I)N_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[J_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{1}{4}(b-a)^2] \\ &+ \frac{cN_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2-J_n(P,\bar{x},x^2)]. \end{aligned}$$

اثبات. بنابر قضیه ی ۱۷.۲ و قضیه ی ۲۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
J_n(P,\bar{x},g) \geq & \frac{n_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[g(a)+g(b)+\frac{1}{2}N_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2) \\
& -\frac{1}{4}N_g(I)(b-a)^2+cJ_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{c}{2}(b-a)^2] \\
& +\frac{N_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[\frac{1}{2}n_g(I)J_n(P,\bar{x},x^2) \\
& +c\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2-cJ_n(P,\bar{x},x^2)] \\
& =\frac{n_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}[g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})] \\
& +\frac{n_g(I)N_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}[J_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{1}{4}(b-a)^2] \\
& +\frac{n_g(I)}{n_g(I)+N_g(I)}(cJ_n(P,\bar{x},x^2)-\frac{c}{2}(b-a)^2) \\
& +\frac{N_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}(c\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2-cJ_n(P,\bar{x},x^2)).
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۲۶.۲. *با درنظرگرفتن فرض های قضیه ی ۲۲.۲ و رابطه ی* $J_n(P,\bar{x},x^2) \geq \frac{1}{4}(b-a)^2$ *نتیجه ی زیر را داریم:*

$$\begin{aligned}
J_n(P,\bar{x},g) \leq & \frac{M_g(I)}{n_g(I)+M_g(I)}(g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})) \\
& -\frac{M_g(I)}{M_g(I)+m_g(I)}J_c(\bar{x})-\frac{m_g(I)C}{M_g(I)+m_g(I)}\sum_{i=1}^{n-1}p_ip_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2.
\end{aligned}$$

همچنین از قضیه ی ۲۳.۲ نتیجه ی زیر حاصل می شود:

$$J_n(P,\bar{x},g) \leq \frac{N_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}(g(a)+g(b)-۲g(\frac{a+b}{۲})) \\ - \frac{cN_g(I)}{N_g(I)+n_g(I)}(J_n(P,\bar{x},x^۲)+J_c(\bar{x})-(b-a)^۲).$$

مراجع

[1] M. Adil Khan, D. Pecaric, J. Pecaric, A new refinement of the Jensen inequality with applications in information theory, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* **44**(1) (2021), 267–278.

[2] M. Adil Khan, M. Hanif, Z. A. Khan, et al. Association of Jensen's inequality for s-convex function with Csiszar divergence, *J. Inequal. Appl.,* **2019** (2019), 1–14.

[3] H. Barsam, A. R. Sattarzadeh, Hermite-Hadamard inequalities for uniformly convex functions and Its Applications in Means, *Miskolc Math. Notes.,* **21**(2) (2020), 621–630.

[4] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Springer-Verlag, 2011 .

[5] Y. Deng, H. Ullah, M.Adil Khan, S. Iqbal, S. Wu, Refinements of Jensen's inequality via majorization results with applications in the information theory, *J. Math.* **2012**, (2021), 1951799.

[6] S. S. Dragomir, A converse result for Jensen's discrete inequality via Grüss inequality and applications in information theory, *An. Univ. Oradea. Fasc. Mat.*, **7** (1999-2000), 178–189.

[7] S. S. Dragomir, Bounds for the normalized Jenson functional, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **74** (2006), 471–478.

[8] S.S. Dragomir, C.J. Goh, Some bounds on entropy measures in Information Theory, *Appl. Math. Lett.*, **10** (3) (1997) 23–28.

[9] N. Merentesm, K. Nikodem, Remarks on strongly convex functions, *Aequat. Math.* **80** (2010), 193–199.

[10] Roberts, A.W., Varberg, D.E.: Convex Functions. Academic Press, New York, 1973.

[11] Y. Sayyari, An improvement of the upper bound on the entropy of information sources, Journal of Mathematical Extension, **15**(2) (2021), 1-12.

[12] Y. Sayyari, New bounds for entropy of information sources, Wavelet and Linear Algebra, **7** **2** (2020), 1-9.

[13] Y. Sayyari, New entropy bounds via uniformly convex functions, Chaos, Solitons and Fractals, **141**(1) (2020), 110360. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110360

[14] Y. Sayyari, A refinement of the Jensen-Simic-Mercer inequality with applications to entropy, journal of the korean society of mathematical education series b-pure and applied mathematics, **29**(1) (2022), 51-57.

[15] Y Sayyari, New refinements of Shannon's entropy upper bounds, Journal of Information and Optimization Sciences, **42**(8) (2021), 1869-1883.

[16] S. Simic, Jensen's inequality and new entropy bounds, *Appl. Math. Lett.*, **22** (8) (2009), 1262–1265.

[17] S. Simic, On an upper bound for Jensen's inequality, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **10**(2)(2009), 1-5.

[18] S. Simic, "Some Generalizations of Jensen's Inequality." arXiv preprint arXiv:2011.10746 (2020).

[19] S. Simic, On a global upper bound for Jensen's inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, **343** (1) (2008), 414-419.