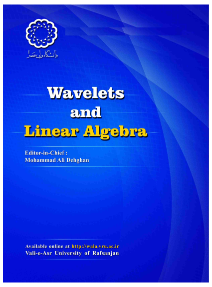
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۷۵-۱۵۳



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

حل مسئله مقدار مرزی مرتبه چهارم با استفاده از پایه موجک متعامد

محمدرضا فروتن*آ

آاستادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷ - ۱۹۳۹۵ تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۶ خرداد ۱۴۰۱
پذیرفته شده: ۲۷ شهریور ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی توکلی

کلمات کلیدی:
چند جمله‌ای لژاندر،
پایه‌ی موجک لژاندر،
جواب ε-تقریب، تحلیل
پایداری و همگرایی.

چکیده

در این مقاله، با استفاده از توابع موجک لژاندر، روشی را ارائه می‌کنیم که برای حل مسئله مقدار مرزی مرتبه ۴ منفرد با شرایط مرزی ترکیبی، موثر و قابل اجرا می‌باشد. ابتدا خواص توابع موجک لژاندر را بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از پایه‌های موجک متعامد در فضای $L^2[0,1]$، پایه‌های موجک در فضای $W_2^5[0,1]$ را به‌دست می‌آوریم که برای ساختن روش فوق به کار می‌روند. جواب ε-تقریب را معرفی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که این جواب یک جواب بهینه است. بعلاوه همگرایی و پایداریی روش فوق را در فضای $W_2^5[0,1]$ بررسی می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی و دقت روش فوق دو مثال عددی را با این روش حل می‌کنیم.

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

در این مقاله، مسئله مقدار مرزی مرتبه چهار زیر را در نظر می‌گیریم [۱۷]:

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + h_1(x)u'''(x) + h_2(x)u''(x) + h_3(x)u'(x) + h_4(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ \lambda_i u = r_i, \quad (i = 1,2,3,4), \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که $f(x) \in L^2[0,1]$، $(j = 1,2,3,4)$ $h_j(x) = \frac{p_j(x)}{x^{\alpha_j}(1-x)^{\beta_j}}$, و $p_j(x)$ توابع معلوم هستند. بعلاوه $\lambda_i u = r_i, \ (i = 1,2,3,4)$ شرایط مرزی می‌باشند که به صورت خطی هستند. اگر در معادله‌ی (۱.۱) داشته باشیم $\lambda_i u = u^{(i)}(0), \ (i = 1,2,3,4)$، آنگاه معادله‌ی (۱.۱) به صورت یک مسئله مقدار اولیه می‌باشد. اگر $\lambda_i u = u(x_i), \ (i = 1,2,3,4)$ آنگاه مسئله (۱.۱) یک مسئله چهار نقطه‌ای است و اگر

$$\lambda_1 u = \gamma_1 u(0) + \gamma_2 u'(0) + \gamma_3 u(\tau_1) + \int_0^1 g_1(x)u(x)dx,$$
$$\lambda_2 u = \mu_1 u(1) + \mu_2 u'(1) + \mu_3 u(\tau_2) + \int_0^1 g_2(x)u(x)dx,$$

آنگاه مسئله‌ی (۱.۱) یک مسئله با شرایط مرزی مرکب می‌باشد. در این معادله $u(x) \in W_2^5[0,1]$ تابع مجهول است که $W_2^5[0,1]$ فضای هسته‌ی بازتولید است که در بخش ۳ تعریف می‌شود. فرض کنیم $\alpha = \max_{1\le i\le 4}\{\alpha_i\}$ و $\beta = \max_{1\le i\le 4}\{\beta_i\}$، در این صورت با ضرب طرفین معادله‌ی (۱.۱) در $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ خواهیم داشت:

آدرس ایمیلها: $mr\_forootan@pnu.ac.ir$ (محمدرضا فروتن).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.555235.1386

$$\begin{cases} q_\circ(x)u^{(\text{۴})}(x) + q_\text{۱}(x)u'''(x) + q_\text{۲}(x)u''(x) + q_\text{۳}(x)u'(x) + q_\text{۴}(x)u(x) = q_\circ(x)f(x), \quad x \in (\circ, \text{۱}), \\ \lambda_i u = r_i, \quad (i = \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \text{۴}), \end{cases} \tag{۲.۱}$$

که $q_\circ(x) = x^\alpha(\text{۱} - x)^\beta$ و $q_i(x) = x^{\alpha-\alpha_i}(\text{۱} - x)^{\beta-\beta_i}p_i(x)$. واضح است که جواب مسئله (۲.۱) جواب مسئله‌ی (۱.۱) نیز می‌باشد. در نتیجه، کافی است مسئله مقدار مرزی (۲.۱) را حل کنیم.
مسائل مقدار مرزی نقش بسیار مهمی در مطالعه‌ی پدیده‌های فیزیکی، بیولوژی و شیمیایی دارند. به عنوان مثال، ارتعاشات یک سیم با مقطع یکنواخت متشکل از n قسمت با چگالی‌های مختلف را می‌توان به عنوان یک مسئله مقدار مرزی در نظر گرفت [۱۲]. بعلاوه، بسیاری از مسائل در نظریه پایداری الاستیک را می‌توان به صورت مسائل مقدار مرزی بیان و حل کرد [۱۵]. اخیراً، حل مسائل مقدار مرزی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران و ریاضیدانان قرار گرفته است [۱۶، ۱۰، ۹، ۱۹، ۱۴]. در این پژوهش‌ها معمولاً یک روش عددی معرفی می‌گردد و سرعت و دقت آن روش عددی مورد بحث قرار می‌گیرد. هم‌چنین مزیت‌ها و معایب آن روش نسبت به روش‌های عددی دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد. یکی از روش‌هایی که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، روش هسته‌ی بازتولید فضای هیلبرت است [۶، ۷، ۱]. در این مقاله، با استفاده از توابع لژاندر[1]، یک پایه‌ی متعامد در فضای هسته‌ی بازتولید $W_\text{۲}^\text{۵}[\circ, \text{۱}]$ می‌سازیم که از این پایه برای حل مسئله مقدار مرزی مرتبه چهار استفاده می‌گردد.

۲. توابع موجک لژاندر

هدف ما در این بخش، معرفی موجک‌های لژاندر می‌باشد. برای این منظور ابتدا توابع لژاندر را معرفی و برخی خواص آنها را بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از توابع لژاندر، توابع موجک لژاندر را به‌دست می‌آوریم.

[1] Legendre

۱.۲ . *توابع لژاندر*

معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبه n عبارت است از

$$(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + n(n + ۱)y = ۰,$$

که توابع لژاندر $L_n(x)$ به عنوان جواب‌های این معادله، مطرح می‌شوند. این توابع لژاندر یک پایه‌ی متعامد در فضای $L^۲[-۱, ۱]$، هستند. بنابراین توابع $p_n(x) = \sqrt{۲n + ۱}L_n(۲x - ۱)$، یک پایه‌ی متعامد روی فضای $L^۲[۰, ۱]$، با وزن $\rho(x) = ۱$ می‌باشند که در روابط زیر صادق هستند:

$$P_۰(x) = ۱, \qquad P_۱(x) = ۲x - ۱,$$
$$(n + ۱)P_{n+۱}(x) = (۲n + ۱)(۲x - ۱)P_n(x) - nP_{n-۱}(x), \quad n \geq ۱,$$

$$\int_۰^۱ P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \gamma_{m,n}\delta_{m,n},$$

به‌طوری‌که

$$\gamma_{m,n} = \begin{cases} ۰, & \text{if} \quad m \neq n, \\ ۱, & \text{if} \quad m = n = ۰, \\ \frac{۱}{۲n+۱}, & \text{if} \quad m = n \neq ۰. \end{cases}$$

۲.۲ . *موجک‌های لژاندر*

موجک های لژاندر روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۳، ۱۸، ۵]:

$$\varphi^{\circ}(x) = \begin{cases} k_۱(x) = -\sqrt{\frac{۱۵}{۱۷}}(۲۲۴x^۳ - ۲۱۶x^۲ + ۵۶x - ۳), & x \in [۰, \frac{۱}{۲}), \\ k_۲(x) = \sqrt{\frac{۱۵}{۱۷}}(۲۲۴x^۳ - ۴۵۶x^۲ + ۲۹۶x - ۶۱), & x \in [\frac{۱}{۲}, ۱], \end{cases}$$

$$\varphi^{۱}(x)=\begin{cases} k_{۳}(x)=-\sqrt{\frac{۱}{۲۱}}(۱۶۸۰x^{۳}-۱۳۲۰x^{۲}+۲۷۰x-۱۱), & x\in[۰,\frac{۱}{۲}),\\ k_{۴}(x)=\sqrt{\frac{۱}{۲۱}}(۱۶۸۰x^{۳}-۳۷۲۰x^{۲}+۲۶۷۰x-۶۱۹), & x\in[\frac{۱}{۲},۱],\end{cases}$$

$$\varphi^{۲}(x)=\begin{cases} k_{۵}(x)=-\sqrt{\frac{۳۵}{۱۷}}(۲۵۶x^{۳}-۱۷۴x^{۲}+۳۰x-۱), & x\in[۰,\frac{۱}{۲}),\\ k_{۶}(x)=\sqrt{\frac{۳۵}{۱۷}}(۲۵۶x^{۳}-۵۹۴x^{۲}+۴۵۰x-۱۱۱), & x\in[\frac{۱}{۲},۱],\end{cases}$$

$$\varphi^{۳}(x)=\begin{cases} k_{۷}(x)=-\sqrt{\frac{۵}{۴۲}}(۴۲۰x^{۳}-۲۴۶x^{۲}+۳۶x-۱), & x\in[۰,\frac{۱}{۲}),\\ k_{۸}(x)=\sqrt{\frac{۵}{۴۲}}(۴۲۰x^{۳}-۱۰۱۴x^{۲}+۸۰۴x-۲۰۹), & x\in[\frac{۱}{۲},۱],\end{cases}$$

$$\varphi^{۰}_{ik}(x)=\sqrt{۲^{i-۱}}\varphi^{۰}(۲^{i-۱}x-k)=\sqrt{۲^{i-۱}}\begin{cases} k_{۱}(۲^{i-۱}x-k), & x\in[\frac{k}{۲^{i-۱}},\frac{k+\frac{۱}{۲}}{۲^{i-۱}}),\\ k_{۲}(۲^{i-۱}x-k), & x\in[\frac{k+\frac{۱}{۲}}{۲^{i-۱}},\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}],\\ ۰, & \text{در غیر این صورت},\end{cases}$$

$$\varphi^{۱}_{ik}(x)=\sqrt{۲^{i-۱}}\varphi^{۱}(۲^{i-۱}x-k)=\sqrt{۲^{i-۱}}\begin{cases} k_{۳}(۲^{i-۱}x-k), & x\in[\frac{k}{۲^{i-۱}},\frac{k+\frac{۱}{۲}}{۲^{i-۱}}),\\ k_{۴}(۲^{i-۱}x-k), & x\in[\frac{k+\frac{۱}{۲}}{۲^{i-۱}},\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}],\\ ۰, & \text{در غیر این صورت},\end{cases}$$

$$\varphi^{2}_{ik}(x)=\sqrt{2^{i-1}}\varphi^{2}(2^{i-1}x-k)=\sqrt{2^{i-1}}\begin{cases} k_5(2^{i-1}x-k), & x\in[\frac{k}{2^{i-1}},\frac{k+\frac{1}{2}}{2^{i-1}}),\\ k_6(2^{i-1}x-k), & x\in[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^{i-1}},\frac{k+1}{2^{i-1}}],\\ 0, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

$$\varphi^{3}_{ik}(x)=\sqrt{2^{i-1}}\varphi^{3}(2^{i-1}x-k)=\sqrt{2^{i-1}}\begin{cases} k_7(2^{i-1}x-k), & x\in[\frac{k}{2^{i-1}},\frac{k+\frac{1}{2}}{2^{i-1}}),\\ k_8(2^{i-1}x-k), & x\in[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^{i-1}},\frac{k+1}{2^{i-1}}],\\ 0, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

که در آن $k=0,1,2,\cdots,2^{i-1}-1$ و $i=1,2,\cdots,$.
قرار می‌دهیم

$$\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}=\{\varphi^{0}_{20}(x),\varphi^{0}_{21}(x),\varphi^{1}_{20}(x),\varphi^{1}_{21}(x),\varphi^{2}_{20}(x),\varphi^{2}_{21}(x),\varphi^{3}_{20}(x),\varphi^{3}_{21}(x),\varphi^{0}_{30}(x),\cdots\}.$$

لم ۱.۲. *$\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد چند مقیاسی*[2]*، روی فضای $L^2[0,1]$ است.*

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۸] مراجعه کنید. □

۳. توابع موجک متعامد در فضای هسته‌ی بازتولید

در این بخش با استفاده از توابع موجک لژاندر، یک پایه متعامد در فضای هسته‌ی بازتولید $W_2^5[0,1]$ به‌دست می‌آوریم که در حل معادله (۲.۱) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۳. فضای هسته‌ی بازتولید $W_2^5[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_2^5[0,1]=\{u|\ u^{(4)}\in C([0,1]),\ u^{(5)}\in L^2[0,1]\},$$

---
[2] *Multi-scale*

و ضرب داخلی و نرم در این فضا به صورت زیر می‌باشد:

$$\langle u, v\rangle_{W_2^5} = \sum_{i=0}^{4} u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(5)}(x)v^{(5)}(x)dx, \quad \|u\|_{W_2^5} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{W_2^5}}.$$

حال فضای هسته‌ی بازتولیدی معرفی می‌کنیم که شامل شرایط مرزی معادله باشد، برای این منظور تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

تعریف ۲.۳. فرض کنیم

$$W_{2,0}^5[0,1] = \{u \mid u \in W_2^5[0,1],\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(4)}(0) = 0,\ u^{(4)}(1) = 0\},$$

در این صورت $W_{2,0}^5[0,1]$ یک زیر فضای بسته از فضای $W_2^5[0,1]$ است و بنابراین یک فضای هسته‌ی بازتولید است.

برای بیان روش حل معادله‌ی (۲.۱)، یک پایه‌ی متعامد برای فضای $W_{2,0}^5[0,1]$ به‌دست می‌آوریم. توابع $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} &= \{J\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}\\ &= \{J\varphi_{2,0}^0(x), J\varphi_{2,1}^0(x), J\varphi_{2,0}^1(x), J\varphi_{2,1}^1(x), J\varphi_{2,0}^2(x), J\varphi_{2,1}^2(x), J\varphi_{2,0}^3(x), J\varphi_{2,1}^3(x), J\varphi_{4,0}^0(x), \cdots\}.\end{aligned}$$

که در آن $Ju = \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^4 u(t)dt$. در این صورت برای پایه‌های متعامد قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳.۳. *گردایه‌ی $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌ی متعامد چند مقیاسی برای فضای $W_{2,0}^5[0,1]$ است.*

اثبات. برای اثبات کافی است که متعامد بودن و کامل بودن را بررسی کنیم. از تعریف تابع J داریم:

$$\langle \psi_i, \psi_j\rangle_{W_{2,0}^5} = \langle J\phi_i, J\phi_j\rangle_{W_{2,0}^5} = \langle \phi_i, \phi_j\rangle_{L^2} = \begin{cases} 1, & i = j,\\ 0, & \text{سایر جاها}.\end{cases}$$

لذا متعامد بودن برقرار است. برای کامل بودن نشان می‌دهیم که اگر $\langle u, \psi_i\rangle_{W_{2,0}^5} = 0$، آنگاه $u \equiv 0$.

چون

$$\langle \psi_i, u\rangle_{W^5_{2,0}} = \langle J\phi_i, u\rangle_{W^5_{2,0}} = \langle \phi_i, u^{(4)}\rangle_{L^2} = 0,$$

لذا داریم $u^{(4)} \equiv 0$. حال با استفاده از تعریف ۲.۳، نتیجه می‌گیریم که $u \equiv 0$. □

حال پایه‌ی متعامدی برای فضای W^5_2 می‌سازیم. چون ما ۶ شرط اضافی در فضای $W^5_{2,0}$ نسبت به فضای W^5_2 داریم، بنابراین اگر پایه‌ای برای فضای W^5_2 با استفاده از پایه‌ی فضای $W^5_{2,0}$ بسازیم، در این صورت باید ۶ تابع مانند $g_k(x) \in W^5_2,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5$ داشته باشیم که در شرط‌های زیر صدق کنند:

(الف) $\langle g_i(x), g_j(x)\rangle_{W^5_2} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \cdots, 5$،

(ب) $\langle g_k(x), g_k(x)\rangle_{W^5_2} = 1, \quad k = 0, 1, \cdots, 5$،

(ج) $\langle g_i(x), \psi_j(x)\rangle_{W^5_2} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, 5, \quad j = 0, 1, 2\cdots$.

واضح است که $g_0(x) = 1$ و $g_1(x) = x$ در فضای $W^5_2[0, 1]$ در شرط‌های فوق صدق می‌کنند. فرض کنیم $g_k(x) = ax^k \in W^5_2,\ k = 2, 3, 4, 5$. با استفاده از تعریف ضرب داخلی، $g_k(x)$ در شرط‌های (الف) و (ج) صدق می‌کند و از شرط (ب) نتیجه می‌گیریم که $a = \frac{1}{k!}$. با استفاده از مطلب بیان شده در بالا، پایه‌ای برای فضای $W^5_2[0, 1]$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۳. *گردایه‌ی* $\{\rho_j(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^5}{5!}, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots\}$ *یک پایه‌ی موجک متعامد برای فضای* $W^5_2[0, 1]$ *است.*

اثبات. با استفاده از قضیه‌ی ۳.۳ و شرط‌های (الف)-(ج) واضح است که:

$$\langle \rho_i(x), \rho_j(x)\rangle_{W^5_2} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

بنابراین $\{\rho_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ متعامد هستند. حال برای کامل بودن ثابت می‌کنیم که اگر $\langle u, \rho_j\rangle_{W^5_2} = 0$، آنگاه

چون $u \equiv 0$.

$$\langle u, \frac{x^k}{k!}\rangle_{W_2^5} = 0 \Rightarrow u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 4,$$
$$\langle u, \frac{x^5}{5!}\rangle_{W_2^5} = 0 \Rightarrow u^{(4)}(1) = 0,$$
$$\langle u, \psi_i(x)\rangle_{W_2^5} = \langle u, J\phi_i(x)\rangle_{W_2^5} = \langle u^{(4)}, \phi_i(x)\rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow u^{(4)} \equiv 0,$$

بنابراین با استفاده از معادلات بالا، خواهیم داشت $u \equiv 0$. □

با استفاده از معادله‌ی (۲.۱) عملگر خطی $\mathcal{L} : W_2^5[0, 1] \to L^2[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}u = q_0(x)u^{(4)}(x) + q_1(x)u'''(x) + q_2(x)u''(x) + q_3(x)u'(x) + q_4(x)u(x),$$

که $q_0(x) = x^{\alpha}(1 - x)^{\beta}$ و $q_i(x) = x^{\alpha-\alpha_i}(1 - x)^{\beta-\beta_i}p_i(x)$.

قضیه ۵.۳. *$W_2^5[0, 1]$ فضای هسته‌ی بازتولید است و اگر $R_t(x)$ هسته‌ی بازتولید $W_2^5[0, 1]$ باشد، آنگاه $R_t(x)$ و $\frac{\partial^k}{\partial t^k}R_t(x),\ k = 1, 2, \cdots, 5$ روی بازه‌ی $[0, 1]$ کراندار هستند.*

اثبات. برای اثبات به مرجع [۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۳. *اگر $q_i(x) \in C([0, 1]),\ i = 0, 1, \ldots, 4$، آنگاه عملگر $\mathcal{L}$ خطی و کراندار است.*

اثبات. واضح است که عملگر $\mathcal{L}$ خطی است. برای کراندار بودن $\mathcal{L}$ داریم:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 &= \langle \mathcal{L}u, \mathcal{L}u\rangle = \int_0^1 (\mathcal{L}u)^2 dx = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{4} q_{4-k}(x)u^{(k)}\Big)^2 dx \\ &\le \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{4} a_k|u||u^{(k)}| + \sum_{k=1}^{4} b_k|u'||u^{(k)}| + \sum_{k=2}^{4} c_k|u''||u^{(k)}| \\ &+ \sum_{k=3}^{4} c_{4-k}|u'''||u^{(k)}| + b_0|u^{(4)}|^2\Big)dx,\end{aligned} \tag{1.3}$$

که $a_i, b_i, c_i,\ (i = ۰, ۱, \dots, ۴)$ ثابت‌های مثبت هستند. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ |u^{(s)}||u^{(k)}|dx &\leq \sqrt{\int_۰^۱ |u^{(s)}|^۲dx. \int_۰^۱ |u^{(k)}|^۲dx}\\ &\leq \tfrac{۱}{۲}\Big(\int_۰^۱ |u^{(s)}|^۲dx + \int_۰^۱ |u^{(k)}|^۲dx\Big), \quad s,k = ۰, ۱, \dots, ۴,\ s \neq k.\end{aligned}$$

چون $\frac{\partial^k R(x,.)}{\partial x^k}$ روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ پیوسته هستند، لذا ثابت‌هایی مانند N_k وجود دارند که

$$\|\frac{\partial^k R(x,.)}{\partial x^k}\|_{W_۲^۵} \leq N_k, \quad k = ۰, ۱, \dots, ۴,$$

بعلاوه با استفاده از قضیه‌ی ۵.۳ داریم:

$$\begin{aligned}|u^{(k)}(x)| &= |\langle u(.), \frac{\partial^k R(x,.)}{\partial x^k}\rangle_{W_۲^۵}| \leq \|u(.)\|_{W_۲^۵}.\|\frac{\partial^k R(x,.)}{\partial x^k}\|_{W_۲^۵}\\ &\leq N_k\|u(.)\|_{W_۲^۵}, \quad k = ۰, ۱, \dots, ۴.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_۰^۱ |u^{(k)}(x)|^۲dx \leq N_k^۲\|u\|^۲_{W_۲^۵}, \quad k = ۰, ۱, \dots, ۴,$$

و برای $k = ۵$ خواهیم داشت:

$$\|u^{(۵)}(x)\|^۲_{L^۲} = \int_۰^۱ (u^{(۵)}(x))^۲dx \leq \sum_{i=۰}^{۴} u^{(i)}(۰)u^{(i)}(۰) + \int_۰^۱ (u^{(۵)}(x))^۲dx = \|u\|^۲_{W_۲^۵}.$$

حال با جایگذاری روابط فوق در معادله‌ی (۱.۳) داریم $\|\mathcal{L}u\|^۲_{L^۲} \leq a\|u\|^۲_{L^۲}$ که a یک ثابت مثبت است. در نتیجه عملگر $\mathcal{L}$ کراندار است. □

با استفاده از تعریف عملگر $\mathcal{L}$، معادله (۱.۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x), & x \in [0,1], \\ \lambda_i u = r_i, & i = 1,2,3,4. \end{cases} \tag{۲.۳}$$

۴. جواب ε-تقریب

در این بخش، جواب ε-تقریب [3] معادله‌ی (۲.۳) را به‌دست می‌آوریم که این جواب با استفاده از پیدا کردن جواب بهینه یک معادله درجه دوم روی فضای $L^2[0,1]$ به‌دست می‌آید.

تعریف ۱.۴. u_n را یک جواب ε-تقریب معادله‌ی (۲.۳) می‌گوییم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0, \ n \geq N: \ \|\mathcal{L}u_n - f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{4} (\lambda_i u_n - r_i)^2 < \varepsilon^2.$$

قضیه ۲.۴. *به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی مانند N موجود است، به‌طوری که به ازای هر n که $n > N$، آنگاه*

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^* \rho_i(x), \tag{۱.۴}$$

جواب ε-تقریب معادله‌ی (۲.۳) است که در آن $(d_1^*, d_2^*, \ldots, d_n^*)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\| \sum_{i=1}^{n} d_i^* \mathcal{L}\rho_i - f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{4} (\sum_{i=1}^{n} d_i^* \lambda_j \rho_i - r_j)^2 = \min_{d_i} \Big(\| \sum_{i=1}^{n} d_i \mathcal{L}\rho_i - f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{4} (\sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_j \rho_i - r_j)^2\Big).$$

[3] ε-approximate

اثبات. فرض کنیم $u(x)$ جواب دقیق معادله‌ی (۲.۳) باشد، در این صورت

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\rho_i(x); \quad c_i = \langle u, \rho_i\rangle_{L^2},\ i = 1, 2, \dots .$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ n > N:\ \|\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\rho_i(x)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{\|\mathcal{L}\|^2 + \sum_{i=1}^{4}\|\lambda_i\|^2}.$$

بعلاوه

$$\begin{aligned}\min_{d_i}\Big(\|\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i\mathcal{L}\rho_i &- f\|_{L^2}^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{4}(\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i - r_j)^2\Big)\\ &\le \|\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\mathcal{L}\rho_i - f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{4}(\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_j\rho_i - r_j)^2\\ &\le \|\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\mathcal{L}\rho_i - \mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{4}(\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_j\rho_i - \lambda_j u)^2\\ &\le \|\mathcal{L}\|^2\|\textstyle\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\rho_i\|^2 + \sum_{j=1}^{4}\|\lambda_j\|^2\|\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\rho_i\|^2\\ &< \varepsilon^2.\end{aligned}$$

در نتیجه $u_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^*\rho_i(x)$ جواب ε-تقریب معادله‌ی (۲.۳) می‌باشد.
تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(d_1, d_2, \dots, d_n) = \|\sum_{i=1}^{n} d_i\mathcal{L}\rho_i - f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{4}(\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i - r_j)^2.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial d_k} &= 2\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i\langle\mathcal{L}\rho_i, \mathcal{L}\rho_k\rangle_{L^2} - 2\langle\mathcal{L}\rho_i, f\rangle_{L^2}\\ &+2\textstyle\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i\lambda_j\rho_k - 2\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\rho_k r_j,\quad k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

فرض کنیم $\frac{\partial F}{\partial d_k} = 0$،در این صورت معادلات خطی زیر وجود جواب ε-تقریب معادله‌ی (۲.۳) را نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_i\langle \mathcal{L}\rho_i, \mathcal{L}\rho_k\rangle_{L^2} &+ \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i\lambda_j\rho_k \\ &= \langle \mathcal{L}\rho_i, f\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\lambda_j\rho_k r_j,\quad k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned} \tag{۲.۴}$$

قرار می‌دهیم

$$A = \left(\langle \mathcal{L}\rho_i, \mathcal{L}\rho_k\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\lambda_j\rho_i\lambda_j\rho_k\right)_{n\times n},$$

$$b = \left(\langle \mathcal{L}\rho_i, f\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\lambda_j\rho_k r_j\right)^{T}_{n\times 1},$$

در این صورت معادله‌ی (۲.۴) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$Ad = b \tag{۳.۴}$$

که $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$.
جواب یکتای $(d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^*)$ برای معادله‌ی (۳.۴)، نقطه‌ی مینیمم تابع $F(d_1, d_2, \dots, d_n)$ می‌باشد و با استفاده از معادلات (۱.۴) و (۲.۴) می‌توان جواب ε-تقریب یکتایی برای معادله‌ی (۲.۳) را به‌دست آورد. □

قضیه ۳.۴. *اگر عملگر $\mathcal{L}$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه معادله‌ی (۲.۴) جواب یکتا دارد.*

اثبات. شکل همگن معادله‌ی (۲.۴) به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\langle \mathcal{L}\rho_i, \mathcal{L}\rho_k\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i\lambda_j\rho_k = 0,\quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

برای اثبات اینکه معادله‌ی بالا جواب یکتادارد، طرفین معادله‌ی بالا را در $d_k,\ (k = 1, 2, \dots, n)$ ضرب

می‌کنیم و تمام معادلات را باهم جمع می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} d_i\mathcal{L}\rho_i, \sum_{k=1}^{n} d_k\mathcal{L}\rho_k\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i. \sum_{i=1}^{n} d_k\lambda_j\rho_k\Big) = 0.$$

رابطه‌ی بالا معادل است با:

$$\|\sum_{i=1}^{n} d_i\mathcal{L}\rho_i\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i\Big)^2 = 0.$$

در نتیجه

$$\|\sum_{i=1}^{n} d_i\mathcal{L}\rho_i\|_{L^2} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_j\rho_i\Big)^2 = 0.$$

چون عملگر $\mathcal{L}$ معکوس پذیر است و ρ_iها پایه متعامد هستند، در نتیجه $d_i = 0$. □

۵. همگرایی و پایداری

در این بخش، همگرایی و پایداری روش بیان شده در بخش‌های قبل را بررسی می‌کنیم. ابتدا همگرایی روش فوق را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. *فرض کنیم u جواب دقیق معادله‌ی (۲.۳) و u_n جواب ε-تقریب این معادله باشد. در این صورت اگر $u^{(i)}$ به‌ازای $i = 5, 6, \cdots$ روی بازه‌ی $[0, 1]$ کراندار باشد، آنگاه داریم:*

$$\|u - u_n\|^2_{W_2^5} \leq 2^{-(j-1)n}C, \quad j \in \{2, 3, \cdots, i-5\}, \quad i = 7, 8, \cdots$$

که C یک ثابت مثبت است و j برابر با تعداد جملاتی است که در بسط تیلور تابع $u^{(i)}(x)$ حول نقطه‌ی $\frac{k}{2^{i-1}}$ از تابع فوق بیش از دو بار مشتق گرفته شده است.

اثبات. فرض کنیم

$$v_n(x) = \sum_{j=0}^{5} d_j\frac{x^j}{j!} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{2^{i-1}-1} d^l_{i,k}J\varphi^l_{i,k}, \tag{۱.۵}$$

در معادله (۲.۳) صدق کند که در آن $d_j = \langle u(x), \frac{x^j}{j!}\rangle_{W_2^5}$ و $d^l_{i,k} = \langle u(x), J\varphi^l_{i,k}\rangle_{W_2^5}$. واضح است که $\lim_{n\to\infty} v_n = u$. با استفاده از قضیه ۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\|u-u_n\|^2_{W_2^5} &= \|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(u-u_n)\|^2_{W_2^5} \le \|\mathcal{L}^{-1}\|^2\|\mathcal{L}u-\mathcal{L}u_n)\|^2_{L^2}\\
&\le \|\mathcal{L}^{-1}\|^2\Big(\|\mathcal{L}u-\mathcal{L}u_n\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{4}|\lambda_i u_n - r_i|^2\Big)\\
&\le \|\mathcal{L}^{-1}\|^2\Big(\|\mathcal{L}u-\mathcal{L}v_n\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{4}|\lambda_i v_n - r_i|^2\Big)\\
&\le \|\mathcal{L}^{-1}\|^2\Big(\|\mathcal{L}u-\mathcal{L}v_n\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{4}|\lambda_i v_n - \lambda_i u|^2\Big)\\
&\le \|\mathcal{L}^{-1}\|^2\Big(\|\mathcal{L}\|^2\|u-v_n\|^2_{W_2^5} + \sum_{i=1}^{4}\|\lambda_i\|^2\|u-v_n\|^2_{W_2^5}\Big)\\
&\le M_1\|u-v_n\|^2_{W_2^5}.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|u-u_n\|^2_{W_2^5} &\le M_1\|u-v_n\|^2_{W_2^5}\\
&\le M_1\|u-\sum_{j=0}^{5} d_j\frac{x^j}{j!} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{2^{i-1}-1} d^l_{i,k}J\varphi^l_{i,k}\|^2_{W_2^5}\\
&= M_1\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{2^{i-1}-1}(d^l_{i,k})^2. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

نشان می‌دهیم $(d^{l}_{i,k})^{۲} \leq (\frac{۱}{۲})^{۳i} c_{۱}$. برای این منظور به ازای $l = ۰$ داریم:

$$\begin{aligned}|d^{\circ}_{i,k}| =& |\langle u(x) - \psi_i(x)\rangle_{W^{۵}_{۲,۰}}|^{۲} = |\langle u(x) - J\phi_i(x)\rangle_{W^{۵}_{۲,۰}}|^{۲} \\ =& |\langle u(x) - J\varphi^{\circ}_{i,k}(x)\rangle_{W^{۵}_{۲,۰}}|^{۲} = \Big| \int_{۰}^{۱} u^{(۵)}(x)(J\varphi^{\circ}_{i,k}(x))^{(۵)} dx \Big| \\ =& \Big| \int_{۰}^{۱} u^{(۵)}(x)\varphi^{\circ}_{i,k}(x) dx \Big|.\end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی

$$\begin{aligned}u^{(۵)}(x) = & u^{(۵)}(\frac{k}{۲^{i-۱}}) + u^{(۶)}(\frac{k}{۲^{i-۱}})(x - \frac{k}{۲^{i-۱}}) + \cdots \\ & + \frac{u^{(۵+j)}(\xi)}{(j-۱)!}(x - \frac{k}{۲^{i-۱}})^{j-۱}, \qquad \zeta \in (\frac{k}{۲^{i-۱}}, \frac{k+۱}{۲^{i-۱}}).\end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|d^{\circ}_{i,k}| \leq & \Big|u^{(۵)}(\frac{k}{۲^{i-۱}}) \int_{\frac{k}{۲^{i-۱}}}^{\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}} \varphi^{\circ}_{i,k}(x) dx\Big| + \Big|u^{(۶)}(\frac{k}{۲^{i-۱}}) \int_{\frac{k}{۲^{i-۱}}}^{\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}} (x - \frac{k}{۲^{i-۱}})\varphi^{\circ}_{i,k}(x) dx\Big| + \cdots \\ & + \Big| \int_{\frac{k}{۲^{i-۱}}}^{\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}} \frac{u^{(۵+j)}(\xi)}{(j-۱)!}(x - \frac{k}{۲^{i-۱}})^{j-۱} \varphi^{\circ}_{i,k}(x) dx \Big|.\end{aligned}$$

از طرفی با توجه با خاصیت محو شوندگی[4] در مرجع [۱۳] با فرض $t = ۲^{i-۱}x - k$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k}{۲^{i-۱}}}^{\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}} \varphi^{\circ}_{i,k}(x) dx =& \sqrt{۲^{i-۱}} \int_{\frac{k}{۲^{i-۱}}}^{\frac{k+۱}{۲^{i-۱}}} \varphi^{\circ}(۲^{i-۱}x - k) dx \\ =& \sqrt{۲^{i-۱}} \int_{۰}^{۱} \varphi^{\circ}(t) (\frac{۱}{۲})^{i-۱} dt \\ =& (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{i-۱} \int_{۰}^{۱} \varphi^{\circ}(t) dt = ۰.\end{aligned}$$

4 Vanishing moments

به طور مشابه به ازای $j = 1,2,3$ می‌توان نوشت:

$$\int_{\frac{k}{2^{i-1}}}^{\frac{k+1}{2^{i-1}}} (x - \frac{k}{2^{i-1}})^j \varphi^{\circ}_{i,k}(x)dx = 0.$$

از طرفی با استفاده از کراندار بودن $u^{(i)}$ به‌ازای $i = 5,6,7,8$ روی بازه‌ی $[0,1]$، رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\frac{k}{2^{i-1}}}^{\frac{k+1}{2^{i-1}}} \frac{u^{(5+j)}(\xi)}{(j-1)!}(x - \frac{k}{2^{i-1}})^{j-1}\varphi^{\circ}_{i,k}(x)dx\Big| \leq & \frac{M_2}{(j-1)!}\int_{\frac{k}{2^{i-1}}}^{\frac{k+1}{2^{i-1}}} (x - \frac{k}{2^{i-1}})^{j-1}|\varphi^{\circ}_{i,k}(x)|dx \\ =& \frac{M_2}{(j-1)!}\sqrt{2^{i-1}}\int_{\frac{k}{2^{i-1}}}^{\frac{k+1}{2^{i-1}}} (x - \frac{k}{2^{i-1}})^{j-1}|\varphi^{\circ}(2^{i-1}x-k)|dx \\ =& \frac{M_2}{(j-1)!}\sqrt{2^{i-1}}\int_0^1 (\frac{t}{2^{i-1}})^{j-1}|\varphi^{\circ}(t)|(\frac{1}{2})^{i-1}dt \\ =& \frac{M_2}{(j-1)!}\frac{1}{2^{(i-1)(j-\frac{1}{2})}}\int_0^1 t^{j-1}|\varphi^{\circ}(t)|dt \\ =& 2^{(i-1)(j-\frac{1}{2})}C_1M_2.\end{aligned}$$

که $C_1 = \frac{1}{(j-1)!}\int_0^1 t^{j-1}|\varphi^{\circ}(t)|dt$ و $|u^{(j)}(x)| \leq M_2, \quad \forall x \in [0,1]$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$|d^{\circ}_{i,k}| \leq 2^{(i-1)(j-\frac{1}{2})}C_1M_2.$$

در نتیجه، به طور مشابه برای $l = 1,2,3$ خواهیم داشت $|d^l_{i,k}| \leq 2^{(i-1)(j-\frac{1}{2})}C_1M_2$. اگر رابطه‌ی قبل

را در معادله (۲.۵) جایگذاری کنیم نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید که به صورت زیر می‌باشد.

$$\|u-u_n\|_{W_2^0} \le \sqrt{M_1 \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{2^{i-1}-1}(d_{i,k}^l)^2} \tag{۳.۵}$$

$$\le C_1 M_2 \sqrt{M_1 \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{2^{i-1}-1}\left(2^{(i-1)(j-\frac{1}{2})}\right)^2} \tag{۴.۵}$$

$$= C_1 M_2 \sqrt{M_1 \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-2(i-1)(j-1)}/4} \le C 2^{-(j-1)n} \tag{۵.۵}$$

که $C = C_1 M_2 \sqrt{\frac{4M_1}{1-2^{-2(j-1)}}}$. □

حال به بررسی پایداری روش بیان شده می‌پردازیم. ماتریس A در معادله (۳.۴) متقارن و معکوس‌پذیر است و عدد شرطی ماتریس A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cond(A)_2 = |\frac{\tau_1}{\tau_2}|,$$

که در آن τ_1 و τ_2 به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد. برای پایداری روش فوق نشان می‌دهیم که عدد شرطی ماتریس A کراندار است. برای این منظور کافی است که کرانداری مقادیر ویژه را بررسی کنیم.

قضیه ۲.۵. *فرض کنیم ماتریس A توسط رابطه‌ی (۳.۴) تعریف شده باشد و τ یک مقدار ویژه ماتریس A و x بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه τ باشد به‌طوری‌که $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ و $\|x\| = 1$. در این صورت*

$$\frac{1}{\|\mathcal{L}^{-1}\|^2} \le \tau \le \|\mathcal{L}\|^2 + \sum_{l=1}^{4}\|\lambda_l\|^2. \tag{۶.۵}$$

اثبات. چون τ یک مقدار ویژه ماتریس A است لذا $Ax = \tau x$ و داریم

$$\begin{aligned}\tau x_i = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j &= \sum_{j=۱}^{n}\Big(\langle \mathcal{L}\rho_i, \mathcal{L}\rho_j\rangle_{L^۲} + \sum_{l=۱}^{۴} \lambda_l\rho_i\lambda_l\rho_j\Big)x_j \\ &= \sum_{j=۱}^{n}\Big(\langle \mathcal{L}\rho_i, x_j\mathcal{L}\rho_j\rangle_{L^۲} + \sum_{l=۱}^{۴} \lambda_l\rho_i x_j\lambda_l\rho_j\Big) \\ &= \langle \mathcal{L}\rho_i, \sum_{j=۱}^{n} x_j\mathcal{L}\rho_j\rangle_{L^۲} + \sum_{l=۱}^{۴} \lambda_l\rho_i \sum_{j=۱}^{n} x_j\lambda_l\rho_j.\end{aligned}$$

با ضرب طرفین معادله بالا در x_i به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و جمع آن‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tau = \tau\sum_{j=۱}^{n} x_j^۲ &= \langle \sum_{i=۱}^{n} x_i\mathcal{L}\rho_i, \sum_{j=۱}^{n} x_j\mathcal{L}\rho_j\rangle_{L^۲} + \sum_{l=۱}^{۴}\Big(\sum_{i=۱}^{n} x_i\lambda_l\rho_i \sum_{j=۱}^{n} x_j\lambda_l\rho_j\Big) \\ &= \|\sum_{i=۱}^{n} x_i\mathcal{L}\rho_i\|_{L^۲}^۲ + \sum_{l=۱}^{۴}\Big(\lambda_l \sum_{i=۱}^{n} x_i\rho_i\Big)^۲ \\ &\leq \|\mathcal{L}\|^۲ \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ + \sum_{l=۱}^{۴} \|\lambda_l\|^۲ \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ \\ &= \|\mathcal{L}\|^۲ + \sum_{l=۱}^{۴} \|\lambda_l\|^۲.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tau \leq \|\mathcal{L}\|^۲ + \sum_{l=۱}^{۴} \|\lambda_l\|^۲. \tag{۷.۵}$$

بعلاوه، فرض کنیم $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i\rho_i$ و $\mathcal{L}u = g$. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم

$\|u\|_{W_2^5} = 1$. در این صورت

$$1 = \|u\|_{W_2^5} = \|\mathcal{L}^{-1}g\|_{W_2^5} \leq \|\mathcal{L}^{-1}\|.\|g\|.$$

از طرفی

$$\tau \geq \|\mathcal{L}\sum_{i=1}^{n} x_i\rho_i\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 = \|g\|^2 \geq \frac{1}{\|\mathcal{L}^{-1}\|^2}. \qquad (8.5)$$

در نتیجه با استفاده از معادلات (۷.۵) و (۸.۵) حکم به‌دست می‌آید. □

با استفاده از رابطه (۶.۵) می‌توان یک کران بالا برای عدد شرطی ماتریس A به صورت زیر به‌دست آورد:

$$cond(A)_2 \leq \left(\|\mathcal{L}\|^2 + \sum_{l=1}^{4}\|\lambda_l\|^2\right)\|\mathcal{L}^{-1}\|^2.$$

۶. نتایج عددی

در این بخش، با استفاده از الگوی معرفی شده در بخش‌های قبل، مثال‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج حاصل از این روش عددی را ارائه می‌نماییم. در این مثال‌ها، $u_n(x)$ جواب تقریبی و $u(x)$ جواب دقیق معادله دیفرانسیل داده شده می‌باشد. هم‌چنین، خطای مطلق از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$e_n(x) = |u_n(x) - u(x)|,$$

که در آن n تعداد پایه‌ها می‌باشد.

مثال ۱.۶. مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی غیر همگن زیر را در نظر می‌گیریم [۱۷]:

$$u^{(4)}(x) + \frac{1}{x\sqrt{x(1-x)}}u'''(x) + \frac{1}{x}u''(x) + \frac{1}{x^2}u'(x) + \frac{1}{x^2\sqrt{1-x}}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = 0,\ \ 2u'(0) = u''(0),\ \ 2u(1) = u'(1),\ \ u'''(0) = 3\int_0^1 u(x)dx.$$

x	$u(x)$	$u_{۱۸}(x)$	$e_{۱۸}(x)$	$u_{۳۵}(x)$	$e_{۳۵}(x)$	$e_{۲۰۰}(x)$ در [17]
۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰
۰٫۲	۰٫۲۴۴۲۸۰۵۵۲	۰٫۲۴۴۲۸۰۴۰۳	$۱٫۴۸ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۲۴۴۲۸۰۵۵۰	$۱٫۶۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۱۰ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۴	۰٫۵۹۶۷۲۹۸۷۹	۰٫۵۹۶۷۲۹۶۱۲	$۲٫۶۷ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۵۹۶۷۲۹۸۷۶	$۳٫۰۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۲٫۵۳ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۶	۱٫۰۹۳۲۷۱۲۸۰	۱٫۰۹۳۲۷۱۶۶۶	$۳٫۸۵ \times ۱۰^{-۷}$	۱٫۰۹۳۲۷۱۲۸۴	$۳٫۷۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۴٫۲۵ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۸	۱٫۷۸۰۴۳۲۷۴۳	۱٫۷۸۰۴۳۳۳۷۴	$۶٫۳۱ \times ۱۰^{-۷}$	۱٫۷۸۰۴۳۲۷۴۸	$۵٫۲۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۶٫۳۸ \times ۱۰^{-۶}$
۱٫۰	۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸	۲٫۷۱۸۲۸۲۷۵۰	۹۲۱×۱۰^{-۷}	۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۰	$۸٫۴۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۹٫۴۳ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۱: نتایج عددی مثال ۱.۶

x	$u(x)$	$u_{۱۸}(x)$	$e_{۱۸}(x)$	$u_{۳۵}(x)$	$e_{۳۵}(x)$	$e_{۱۰۰}(x)$ در [17]
۰٫۰۸	−۰٫۰۰۱۳۸۹۸۰۶	−۰٫۰۰۱۳۸۹۷۰۱	$۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۷}$	−۰٫۰۰۱۳۸۹۸۰۴	$۱٫۷۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۲٫۰۸ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۳۲	۰٫۰۰۶۷۲۶۱۸۷	۰٫۰۰۶۷۲۶۳۴۸	$۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۰۰۶۷۲۶۱۸۹	$۱٫۴۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۸٫۶۲ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۴۸	۰٫۰۴۴۴۲۵۸۰۲	۰٫۰۴۴۴۲۴۹۹۱	$۸٫۱۱ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۰۴۴۴۲۵۸۱۱	$۹٫۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۵٫۱۸ \times ۱۰^{-۵}$
۰٫۶۴	۰٫۱۲۲۸۸۰۰۰۰	۰٫۱۲۲۸۸۰۳۷۴	$۳٫۷۴ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۱۲۲۸۸۰۰۰۲	$۲٫۰۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۳۵ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸۰	۰٫۲۵۲۴۳۳۴۰۲	۰٫۲۵۲۴۳۴۰۱۰	$۶٫۰۷ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۲۵۲۴۳۳۴۰۰	$۲٫۲۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۲٫۷۰ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸۸	۰٫۳۳۹۲۵۱۵۹۲	۰٫۳۳۹۲۵۱۸۸۸	$۲٫۹۵ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۳۳۹۲۵۱۵۹۵	$۲٫۱۱ \times ۱۰^{-۹}$	$۳٫۵۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۹۶	۰٫۴۴۲۱۷۹۸۹۸	۰٫۴۴۲۱۸۰۰۵۱	$۱٫۵۲ \times ۱۰^{-۷}$	۰٫۴۴۲۱۷۹۹۰۵	$۶٫۲۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۴٫۶۵ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۲: نتایج عددی مثال ۲.۶

که با استفاده از جواب دقیق $u(x) = xe^x$ تابع $f(x)$ مشخص می‌شود. نتایج عددی در جدول ۱ نشان داده شده است.

مثال ۲.۶. مسئله مقدار مرزی مرتبه ۴ با شرایط مرزی غیر همگن زیر را در نظر می‌گیریم [۱۷]:

$$u^{(۴)}(x) - e^x u(x) = -\frac{۱۵}{۱۶x^{۳/۲}} - e^x\Big(-\frac{۱}{۲} + \sqrt{x}\Big)x^۲, \quad x \in (۰, ۱),$$
$$u(۰) = u'(۰) = u(\tfrac{۱}{۴}) = ۰, \;\; ۲u''(۱) - ۲u'(۱) - ۲۱\int_۰^۱ u(x)dx = ۰.$$

که $u(x) = \Big(\sqrt{x} - \frac{۱}{۲}\Big)x^۲$ جواب دقیق معادله دیفرانسیل فوق می‌باشد. نتایج عددی در جدول ۲ نشان داده شده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از توابع موجک لژاندر، پایه‌هایی به‌دست آوردیم که در شرایط مرزی ترکیبی مسئله مقدار مرزی مرتبه ۴ منفرد صدق می‌کند. ابتدا خواص توابع موجک لژاندر را بیان کردیم و سپس با استفاده از پایه‌های موجک متعامد در فضای $W_۲^۵[۰, ۱]$ روشی را بیان کردیم که برای به‌دست آوردن جواب ε-تقریب مورد استفاده قرار می‌گیرد. هم‌چنین یک روش مطمئن برای همگرایی و پایداری روش موجک لژاندر برای حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل خطی را بیان کردیم که برای حل دیگر معادلات

دیفرانسیل مانند معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی نیز می‌توان به‌کار برد. مثال‌هایی برای نشان دادن درستی و کاربرد این تکنیک آورده شده است و نتایج با جواب‌های دقیق مقایسه شده است. سرانجام دقت بالا و موثر بودن این روش نشان داده شده است.

تشکر و قدردانی

نویسنده از ادیتور و داور(ان) محترم به خاطر زمانی‌که صرف مطالعه ی دقیق مقاله نموده اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایند.

مراجع

[۱] O. Abu Arqub، H. Rashaideh، The RKHS method for numerical treatment for integrodifferential algebraic systems of temporal two-point BVPs، *Neural Comput. Appl.*، (۸)۳۰ ،(۲۰۱۸) .۲۶۰۶-۲۵۹۵

[۲] V. S. Chelyshkov، Alternative orthogonal polynomials and quadratures، *Electron. Trans. Numer. Anal.* (۷)۲۵ ،(۲۰۰۶) .۲۶-۱۷

[۳] Z. Chen، B. Wu، and Y. Xu، Multilevel augmentation methods for differential equations، *Advances in computational mathematics* (۱)۲۴ ،(۲۰۰۶) .۲۳۸-۲۱۳

[۴] M. Cui، Y. Lin، Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space، *New York: Nova Science Publishers Inc.*، .(۲۰۰۹)

[۵] H. Du، Z. Chen، A new reproducing kernel method with higher convergence order for solving a Volterra-Fredholm integral equation، *Appl. Math. Lett.*، ۱۵۷ ،(۲۰۲۰) .۲۲۲-۲۱۰

[۶] M. R. Foroutan، A. Ebadian، R. Asadi، A reproducing kernel Hilbert space method for solving the nonlinear three-point boundary value problems ، *Int. J. Numer. Model. El.*، (۳)۳۲ ،(۲۰۱۹) e۲۵۷۳.

[۷] M. R. Foroutan، A. Ebadian، R. Asadi، Reproducing kernel method in Hilbert spaces for solving the linear and nonlinear four-point boundary value problems ، *Int. J. Comput. Math.*، (۱۰)۹۵ ،(۲۰۱۸) .۲۱۴۲-۲۱۲۸

[۸] E. Gokmen، G. Yuksel، M. Sezer، A numerical approach for solving Volterra type functional integral equations with variable bounds and mixed delays، *J. Comput. Appl. Math.*، ۳۱۱ ،(۲۰۱۷) .۳۶۳-۳۵۴

[۹] E. Ideona، P. Ojab، Quadratic/linear rational spline collocation for linear boundary value problems، *Appl. Numer. Math.*، ۱۲۵ ،(۲۰۱۸) .۱۵۸–۱۴۳

[۱۰] A. Kilicman، M. Wadai، On the solution of three point boundary value problem using variational-fixed point iteration method، *Math Sci.*، ۱۰ ،(۲۰۱۶) .۴۰–۳۳

[۱۱] L. Moradi، F. Mohammadi، D. Baleanu، A Direct Numerical Solution of Time-Delay Fractional Optimal Control Problems by Using Chelyshkov Wavelets، *J. Vib. Control*، (۲)۲۵ ،(۲۰۱۹) .۳۱۰۲۴

[۱۲] M. Moshlinsky، Sobre los problemas de condiciones a la frontiera en una dimension de caracteristicas، *Bol. Soc. Mat. Mexicana*،۷ ،(۱۹۵۰) .۱۵–۱

[۱۳] R. Najafi، B. Nemati Saray، Numerical solution of the forced Duffing equations using Legendre multiwavelets، *Comput. Methods Differ. Equ.*، (۱)۵ ،(۲۰۱۷) .۵۵–۴۳

[۱۴] P. D. Phung، L. X. Truong، On the existence of a three point boundary value problem at resonance in Rn، *J. Math. Anal. Appl.*، ۴۱۶ ،(۲۰۱۴) .۵۳۳–۵۲۲

[۱۵] S. Timoshenko، Theory of Elastic Stability، McGraw-Hill، New York، .۱۹۹۶

[۱۶] M. Wadai، A. Kilicman، On the two point boundary value problems using variational fixed point iterative scheme، *Malays. J. Math. Sci.*، (۲)۱۱ ،(۲۰۱۷) .۱۶۰–۱۳۷

[۱۷] Y. L. Wang، X. J. Cao، X. N. Li، A new method for solving singular fourth-order boundary value problems with mixed boundary conditions، *Appl. Math. Comput.*، ۲۱۷ ،(۲۰۱۱) –۷۳۸۵ .۷۳۹۰

[۱۸] L. Wu، Z. Chen، X. Ding، A minimal search method for solving fractional integro-differential equations based on modified Legendre multiwavelets، *J. Appl. Math. Comput.*، (۲)۶۸ ،(۲۰۲۲) .۱۴۸۳–۱۴۶۷

[۱۹] X. C. Zhong، Q. A. Huang، Approximate solution of three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equations with variable coefficients، *Appl. Math. Comput.*، ۲۴۷ ،(۲۰۱۴) .۲۹–۱۸