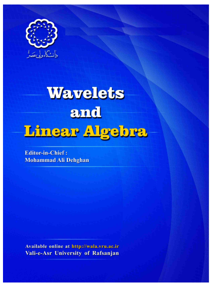
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۲۷-۱۵۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

قاب‌های بازیاب (ضعیف) فاز روی فضاهای هیلبرت حقیقی $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^4$

فاتح اکرمی*[آ]، اصغر رحیمی[آ]، بیاض دارابی[آ]، محمدعلی حسنخانی فرد[ب]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، آذربایجان شرقی، ایران*

[ب] *گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولیعصر، رفسنجان، کرمان، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۷ فروردین ۱۴۰۱
پذیرفته شده: ۱۰ مرداد ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: رجبعلی کامیابی‌گل

کلمات کلیدی:
قاب حقیقی، قاب اسپارک کامل، بازیابی فاز، بازیابی ضعیف فاز، بازیابی نرم.

چکیده

در این مقاله، ما نتایجی جدید در بازیابی ضعیف فاز توسط بردارها در فضاهای متناهی هیلبرت حقیقی $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^4$ ارائه خواهیم داد. ابتدا مفهوم بازیابی ضعیف فاز توسط بردارها را به طور مفصل توضیح می‌دهیم و نشان می‌دهیم خانواده قاب‌های دو عضوی بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$، در خانواده قاب‌های دو عضوی در $\mathbb{R}^2$ چگال نیستند. همچنین نشان خواهیم داد قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^3$ همانند $\mathbb{R}^2$ فاقد هر گونه مضربی از بردارهای پایه استاندارد هستند.

*نویسنده مسئول

همچنین رابطه قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را با قاب‌های بازیاب نرم در این فضاها را بیان خواهیم کرد. در انتها طبقه بندی کاملی از قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۳$ را با استفاده از دو روش متفاوت ارائه خواهیم داد و مطالبی هم در خصوص فضای متناهی هیلبرت $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۴$ بیان می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم که نتایج ما بهترین نتایج ممکن هستند چندین مثال آورده شده است.

۱. مقدمه

مفهوم قاب‌ها [۱] در فضای هیلبرت تفکیک پذیر ابتدا توسط دافین [۲] و شفر [۳] در زمینه سری‌های فوریه غیرهارمونیک معرفی شد [۱۱]. قاب ها خاصیت آکنشی [۴] دارند که کاربرد آنها را در عمل بیشتر از پایه‌ها ممکن می‌سازد. بازیابی فاز و نرم [۵] یکی از حوزه‌هایی است که امروزه مورد مطالعه و کاربرد بسیار قرار گرفته است. بازیابی فاز برای قاب‌های فضای هیلبرت اولین بار در [۳] معرفی شد و به سرعت تبدیل به یک موضوع مهم برای تحقیق گردید.
مفهوم بازیابی ضعیف فاز، حالت ضعیف شده از بازیابی فاز است و فقط برای بردارها تعریف شده است ([۵] و [۴]). البته اخیرا در [۲]، مفهوم بازیابی ضعیف فاز توسط تصاویر نیز تعریف شده است. در ابتدا به معرفی نمادهایی که در این مقاله مود استفاده قرار گرفته است می‌پردازیم. فرض کنید H فضای هیلبرت با بعد متناهی باشد و اعداد طبیعی و اعداد حقیقی را به ترتیب با $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ نمایش خواهیم داد. ما از نماد $[m]$ به جای مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \ldots, m\}$ و از نماد $[\{f_i\}_{i\in I}]$ به جای فضای خطی تولید شده توسط $\{f_i\}_{i\in I}$ استفاده خواهیم کرد که در آن I زیر مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی از $\mathbb{N}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱. هر خانواده از بردارها مانند $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت تفکیک پذیر H یک قاب است اگر

آدرس ایمیلها: fateh.akrami@gmail.com (فاتح اکرمی)، rahimi@maragheh.ac.ir (اصغر رحیمی)، bdaraby@maragheh.ac.ir (بیاض دارابی)، m.hasankhani@vru.ac.ir (محمدعلی حسنخانی فرد).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.551435.1378

[1] Frames
[2] Duffin
[3] Schaeffer
[4] Redundancy
[5] Phase (Norm) retrieval

ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

ثابت‌های A و B به ترتیب کران پایین و کران بالا برای قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شوند. اگر $A = B$ یک قاب تنگ اطلاق می‌شود و اگر $A = B = 1$ قاب را پارسوال می‌نامیم. مقادیر $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ ضرایب قاب برای بردار $f \in H$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱. خانواده $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت H یک دنباله ریس است اگر ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ چنان موجود باشد که برای هر دنباله اسکالر $\{c_i\}_{i\in I}$ داشته باشیم

$$A\sum_{i\in I} |c_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I} c_i\phi_i\|^2 \leq B\sum_{i\in I} |c_i|^2$$

اگر این دنباله در H کامل باشد، گوییم $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ یک پایه ریس است.

بدیهی است که هر فضای هیلبرت حقیقی با بعد متناهی H با $\mathbb{R}^n$ برای برخی n یکریخت است. در سرتاسر این مقاله، $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ برای نمایش پایه استاندارد برای فضای $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌شود که در آن

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

تعریف ۳.۱. خانواده‌ای از بردارها مانند $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی H بازیاب فاز (نرم) است اگر برای هر $x, y \in H$ که برای هر $i \in I$ در شرط

$$|\langle x, f_i\rangle| = |\langle y, f_i\rangle|$$

صدق کند، داشته باشیم $x = \pm y$ ($\|x\| = \|y\|$).

در نظر داشته باشید اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ بازیاب فاز (نرم) باشد، آن‌گاه برای هر $i \in I$ و ، $0 < a_i < \infty$

قاب $\{a_i f_i\}_{i\in I}$ نیز بازیاب فاز (نرم) خواهد بود. اما در حالتی که $|I| = \infty$، باید در حفظ کران های قاب احتیاط کرد.

در این مقاله خاصیت متممی [6] ، موضوعی اساسی است. چون در حالت با بعد متناهی، قاب‌ها مجموعه‌های مولدی برای $\mathbb{H}$ هستند، ابتدا ما تعریف خاصیت متممی را در حالت متناهی آن ارائه می‌کنیم.

تعریف ۴.۱. هر خانواده از بردارها مانند $\{f_k\}_{k=1}^m$ در $\mathbb{R}^n$ دارای خاصیت متممی است اگر برای هر زیرمجموعه $I \subset [m]$ داشته باشیم یا $[\{f_k\}_{k\in I}] = \mathbb{R}^n$ یا $[\{f_k\}_{k\in I^c}] = \mathbb{R}^n$.

نتیجه زیر در مقاله [۷] برای اولین بار ظاهر شد.

قضیه ۵.۱. *هر خانواده از بردارها مانند $\{f_i\}_{i=1}^m$ در $\mathbb{R}^n$ بازیاب فاز است اگر و تنها اگر دارای خاصیت متممی باشد.*

تعریف ۶.۱. هر خانواده از بردارها مانند $\{f_i\}_{i=1}^m$ در $\mathbb{R}^n$ اسپارک کامل است اگر برای هر زیرمجموعه از $[m]$ مانند I که $|I| = n$، $[\{f_i\}_{i\in I}] = \mathbb{R}^n$.

نتیجه ۷.۱. *اگر $\{f_i\}_{i=1}^m$ بازیاب فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $m \geq 2n-1$. اگر $m \geq 2n-1$ و قاب اسپارک کامل باشد، آن‌گاه بازیاب فاز است. اگر $m = 2n-1$، $\{f_i\}_{i=1}^m$ بازیاب فاز است اگر و تنها اگر اسپارک کامل باشد.*

دو تعریف زیر برای اولین بار در [۴] ظاهر شدند.

تعریف ۸.۱. خانواده‌ای از بردارها مانند $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی H یک ساختار بدون فاز [7] است اگر برای هر $x, y \in H$ که برای هر $i \in I$ در شرط

$$|\langle x, f_i\rangle| = |\langle y, f_i\rangle|$$

صدق کند، یک $|\theta| = 1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x = \theta y$.

---
[6] Complement property
[7] Phaseless reconstruction

تعریف ۹.۱. خانواده‌ای از بردارها مانند $\{\phi_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی H با بعد n یک ساختار بدون فاز ضعیف [۸] است اگر برای هر $x = (a_1, a_2, \dots, a_n), y = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ که برای هر $i \in I$ در شرط

$$|\langle x, f_i\rangle| = |\langle y, f_i\rangle|$$

صدق کند، یک $|\theta| = 1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in [n]$، $a_i = \theta b_i$ که در آن $a_i \neq 0 \neq b_i$.

بنا به قضیه بعدی، ساختار بدون فاز ضعیف معادل با ساختار بدون فاز است.

قضیه ۱۰.۱. *[۵] قاب‌های با ساختار بدون فاز ضعیف در $\mathbb{R}^n$، یک ساختار بدون فاز هستند.*

برای مجموعه‌های مستقل خطی، حالت خاصی در [۶] وجود دارد.

قضیه ۱۱.۱. *اگر $\{f_i\}_{i=1}^n$ بازیاب نرم در $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه مجموعه متعامد خواهد بود.*

بدیهی است که بازیابی فاز، بازیابی نرم را ایجاب می‌کند ولی عکس این مطلب همیشه برقرار نیست چون پایه یکا متعامد بازیاب نرم است ولی بازیاب فاز نیست چون در خاصیت متممی صدق نمی‌کند. زیرمجموعه های قاب های بازیاب فاز (نرم) ممکن است بازیاب فاز (نرم) نباشند، چون زیر مجموعه های مستقل خطی نمی توانند در خاصیت متممی صدق کنند و بنابراین بازیاب فاز نیستند و بنا به قضیه ۱۱.۱ اگر هر زیرمجموعه از یک قاب بازیاب نرم باشد، آن‌گاه هر دو بردار متمایز باید متعامد باشند، پس بنابراین قاب باید یک مجموعه متعامد باشد. به علاوه ممکن است عضوهای بیشتری هم داشته باشد. اما تصاویر متعامد این مجموعه‌ها هنوز هم بازیاب فاز (نرم) خواهند بود.

۲. بازیابی ضعیف فاز توسط بردارها [۹]

مفهوم ”بازیابی ضعیف فاز توسط بردارها“ در $\mathbb{R}^n$ برای اولین بار در [۵] معرفی شد و در [۴] توسعه بیشتری یافت. یکی از محدودیت‌های روش‌های موجود برای بازیابی فاز یک سیگنال، توان محاسبه آن است. می‌دانیم هر خانواده عمومی از $2n - 1$- بردار در $\mathbb{R}^n$ بازیاب فاز است ولی هیچ خانواده‌ای با $2n - 2$ عضو نمی‌تواند بازیاب فاز باشد [۳]. منظور از خانواده عمومی، همان مجموعه باز و چگال در

[8] Weak Phaseless reconstruction

[9] **Weak phase retrieval by vectors**

خانواده $۲n-۱$- عضوی در $\mathbb{R}^n$ است. در [۵]، نویسندگان با این ادعا که بازیابی ضعیف فاز می‌تواند با $n+۱$ بردار در $\mathbb{R}^n$ انجام پذیرد شروع شد، هر چند در [۴] نشان داده شد که شرط عدد اصلی برای بازیابی ضعیف فاز تنها می‌تواند به $۲n-۲$ بردار کاهش پیدا کند. اما نتایجی که در این دو مقاله حاصل شد، در فهم مفهوم بازیابی فاز بسیار مهم و جالب بود. در این دو مقاله، مثال‌هایی هم برای حالت حقیقی بازیاب ضعیف فاز ارائه شد.

در نظر داشته باشید فاز بردار $x = re^{i\theta}$ برابر با $e^{i\theta}$ در نظر گرفته می شود و با *Phaser* نشان داده می‌شود. می‌دانیم برای هر $\theta \in \mathbb{R}^n$، $|\langle x, \phi_i\rangle| = |\langle e^{i\theta}x, \phi_i\rangle|$. لذا منظور از فاز همان بخش تک‌مدولی از تجزیه قطبی x یا همان $e^{i\theta}$ خواهد بود. برای مثال، اگر $x = (۱, \sqrt{۳})$ آن‌گاه $r = |x| = \sqrt{۱^۲ + \sqrt{۳}^۲} = ۲$ و $\theta = arctan(\frac{\sqrt{۳}}{۱}) = \frac{\pi}{۳}$، لذا داریم $x = ۲e^{\frac{\pi i}{۳}}$ و فاز بردار x برابر با $e^{\frac{\pi i}{۳}}$ است. گوییم دو بردار $x = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $y = (b_۱, b_۲, \dots, b_n)$ در $\mathbb{R}^n$ فاز یکسانی دارند، اگر برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$ داشته باشیم $phase(a_i) = phase(b_i)$.

تعریف ۱.۲. دو بردار $x = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $y = (b_۱, b_۲, \dots, b_n)$ در $\mathbb{R}^n$، به طور ضعیف فاز یکسانی دارند، اگر یک $|\theta| = ۱$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in [n]$ که در آن $a_i \neq ۰ \neq b_i$، داشته باشیم $phase(a_i) = \theta phase(b_i)$.

در فضای هیلبرت حقیقی، اگر $\theta = ۱$، گوییم x و y به طور ضعیف هم‌علامت هستند و اگر $\theta = -۱$، گوییم x و y به طور ضعیف علامت مخالف هم دارند.

پس در فضای هیلبرت حقیقی، برای بررسی هم‌فاز ضعیف بودن دو بردار، کافی است ببینیم دو بردار به طور ضعیف هم‌علامت یا به طور ضعیف علامت مخالف هم دارند.

برای مثال، دو بردار $x = (۱, \sqrt{۳})$ و $y = (-۱, -\sqrt{۳})$ فاز یکسانی ندارند، چون فاز بردار x برابر با $e^{\frac{\pi i}{۳}}$ ولی فاز بردار y برابر با $e^{\frac{۴\pi i}{۳}}$ می‌باشد. ولی این دو بردار به‌طور ضعیف هم‌فاز هستند. چون در اینجا θ برابر با -۱ است.

در تعریف بالا، ما تنها فاز دو بردار x و y را برای مولفه هایی مقایسه می‌کنیم که هر دو غیر صفر باشند. پس با این تعریف دو بردار $(۱, ۲)$ و $(-۲, ۰)$ به‌طور ضعیف هم‌فازند. بنابراین بنا به تعریف بالا، بردار صفر در $\mathbb{R}^n$، با همه بردارها در $\mathbb{R}^n$ به‌طور ضعیف فاز یکسانی دارد هر چند بردار صفر فاقد فاز است.

تعریف ۲.۲. خانواده‌ای از بردارها مانند $\{\phi_i\}_{i=۱}^m$ در $\mathbb{R}^n$ بازیاب ضعیف فاز است، اگر برای هر $x =$

$(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $y = (b_۱, b_۲, \dots, b_n)$ متعلق به $\mathbb{R}^n$ و با شرط $|\langle x, \phi_i \rangle| = |\langle y, \phi_i \rangle|$ برای هر $i \in [m]$، نتیجه شود x و y به‌طور ضعیف هم‌فازند.

بنابراین تفاوت بازیابی ضعیف فاز با بازیابی فاز در این است که a_i یا b_i یا هر دو می‌توانند صفر باشند.

برای هر $x \in \mathbb{R}$، $sgn(x) = ۱$ اگر $x > ۰$ و $sgn(x) = -۱$ اگر $x < ۰$. نتیجه اساسی زیر در مورد بازیابی ضعیف فاز شرط سودمندی را فراهم می‌کند که تعیین کنیم کی دو بردار به‌طور ضعیف هم‌علامت هستند و یا به‌طور ضعیف مخالف علامت هم‌دیگر هستند.

گزاره ۳.۲. *[۵] فرض کنید $x = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $y = (b_۱, b_۲, \dots, b_n)$، دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند. آن‌گاه عبارت‌های زیر معادلند:*

۱. *برای هر $۰ \leq i \neq j \leq n$، $sgn(a_i a_j) = sgn(b_i b_j)$؛*

۲. *x و y یا به‌طور ضعیف هم‌علامت هستند و یا به‌طور ضعیف مخالف علامت هم‌دیگر هستند.*

با این نتیجه دو بردار $(۰, -۱, -۲)$ و $(۱, ۲, ۳)$ به‌طور ضعیف مخالف علامت هم‌دیگر هستند.
واضح است که اگر $\{x_i\}_{i=۱}^m$ بازیاب فاز (به ترتیب بازیاب ضعیف فاز) در $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $c_i > ۰$ که در آن $i = ۱, ۲, \dots, m$، $\{c_i x_i\}_{i=۱}^m$ نیز بازیاب فاز (به ترتیب بازیاب ضعیف فاز) خواهد بود.
قضیه مهم زیر هم در [۴] ظاهر شد.

قضیه ۴.۲. *اگر $\{x_i\}_{i=۱}^m$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه $m \geq ۲n - ۲$.*

ساده‌ترین مثال برای بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ که بازیاب فاز در $\mathbb{R}^۲$ نیست، به شکل زیر می‌باشد.

مثال ۵.۲. قاب اسپارک کامل زیر را در $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیرید

$$\{\phi_i\}_{i=۱}^{۲} = \{(۱, ۱), (۱, -۱)\}.$$

$\{\phi_i\}_{i=1}^{2}$ قاب تنگ با نرم مساوی است و برای هر $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$، داریم

$$\sum_{i=1}^{2} |\langle \phi_i, z_i \rangle|^2 = 2\|z\|^2.$$

فرض کنید $\{\phi_i\}_{i=1}^{2}$ بردارهای عمودی ماتریس زیر باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

آن‌گاه برای هر $x = (a_1, a_2)$ و $y = (b_1, b_2)$ و برای $i = 1, 2$ داشته باشیم

$$|\langle \phi_i, x \rangle|^2 = |\langle \phi_i, y \rangle|^2,$$

آن‌گاه

$$(a_1 + a_2)^2 = |a_1 + a_2|^2 = |b_1 + b_2|^2 = (b_1 + b_2)^2$$

و

$$(a_1 - a_2)^2 = |a_1 - a_2|^2 = |b_1 - b_2|^2 = (b_1 - b_2)^2$$

آن‌گاه خواهیم داشت

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2$$

و

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2$$

و لذا

$$a_1a_2 = b_1b_2$$

در نتیجه بنا به گزاره ۳.۲ این قاب بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$ است. اما به وضوح قاب $\{\phi_i\}_{i=1}^{2}$ بازیاب

فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ نیست. چون در شرط خاصیت متممی صدق نمی‌کند.

در [۴]، قضیه مهم زیر رابطه بین قاب‌های بازیاب ضعیف فاز و قاب‌های اسپارک کامل را بیان می‌کند.

قضیه ۶.۲. *اگر $X = \{x_i\}_{i=۱}^{۲n-۲}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه X اسپارک کامل است.*

عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست و در ادامه چندین مثال در این خصوص ارائه شده است.

۳. طبقه‌بندی قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$

قضیه ۱.۳. *[۲] یک مجموعه از بردارها مانند $\{x_i\}_{i=۱}^{۲}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ هستند اگر و تنها اگر بعد از نرمال‌سازی، دو بردار به شکل‌های $(۱,-۱)$، $(۱,۱)$ یا $(۱,b)$، $(۱,-b)$ باشند.*

می‌توانیم با چند مثال نقض نشان دهیم حالت‌های دیگر از قاب‌های دو برداری در $\mathbb{R}^{۲}$ بازیاب ضعیف فاز نیستند.

مثال ۲.۳. قاب‌های به شکل $\{(a,b),(c,d)\}$ که در آن $a \neq \pm c, \pm d$ و $b \neq \pm d, \pm c$، نمی‌توانند بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ باشند. برای مثال، فرض کنید $\{\psi\}_{i=۱}^{۲} = \{(۱,۲),(-۳,۴)\}$. در این صورت با قرار دادن $x = (۱,۱)$ و $y = (۱/۴, ۰/۸)$ برای $i = ۱,۲$ داریم $|\langle x,\psi_i\rangle| = |\langle y,\psi_i\rangle|$، ولی x و y به‌طور ضعیف هم‌فاز نیستند. همچنین قاب‌های به صورت $\{(a,b),(a,d)\}$ که در آن $b \neq \pm d$ هم بازیاب ضعیف فاز نیستند. برای مثال قاب دو عضوی $\{\lambda_i\}_{i=۱}^{۲} = \{(۱,۳),(۱,-۲)\}$ بازیاب ضعیف فاز نیست. برای نشان دادن این مطلب، کافی است قرار دهیم $x = (۱,۱)$ و $y = (\frac{۱۱}{۵}, \frac{۳}{۵})$؛ برای $i = ۱,۲$ داریم $|\langle x,\lambda_i\rangle| = |\langle y,\lambda_i\rangle|$، ولی x و y به‌طور ضعیف هم‌فاز نیستند. به همین ترتیب، قاب‌های به شکل $\{(b,a),(c,a)\}$ که در آن $b \neq \pm c$ هم بازیاب ضعیف فاز نیستند. برای آخرین حالت هم قاب‌های به صورت $\{(a,b),(-b,a)\}$ نیز بازیاب ضعیف فاز نیستند. برای مثال قاب دو عضوی $\{(۱,۲),(-۲,۱)\}$ = $\{\delta_i\}_{i=۱}^{۲}$ بازیاب ضعیف فاز نیست. برای نشان دادن این مطلب، کافی است قرار دهیم $x = (۱,۱)$ و $y = (\frac{۱}{۵}, \frac{۷}{۵})$. بنابراین تنها مجموعه های دو عضوی بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$، فقط به شکل قاب‌های قضیه ۱.۳ است.

در انتهای این بخش نشان خواهیم داد که مجموعه‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$، در خانواده قاب‌های دو عضوی در $\mathbb{R}^{۲}$ چگال نیستند.

قضیه ۳.۳. *خانواده قاب‌های دو عضوی بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$، در خانواده قاب‌های دو عضوی در $\mathbb{R}^{۲}$ چگال نیستند.*

اثبات. قابی دو عضوی مانند $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۲} = \{(a, ۰), (۰, b)\}$ در $\mathbb{R}^{۲}$ که در آن $a, b > ۱$ و $|a - b| > ۱$، را در نظر بگیرید. این قاب اسپارک کامل است و بازیاب ضعیف فاز نیست. قرار دهید $\epsilon = \frac{۱}{۲}$؛ اگر قاب بازیاب ضعیف فاز دو عضوی

$$\{\psi_i\}_{i=۱}^{۲} = \{(a - \epsilon_۱, \epsilon_۲), (\epsilon_۳, b - \epsilon_۴)\}$$

که در آن برای هر $i \in [۴]$، $\epsilon_i > ۰$ به‌طوری‌که $\sum_{i=۱}^{۲} \|\phi_i - \psi_i\| < \epsilon$ و $|a - b| > ۱$، آن‌گاه بنا به قضیه ۱.۳ باید داشته باشیم $a - \epsilon_۱ = \pm\epsilon_۳$ و $\epsilon_۲ = \pm(b - \epsilon_۴)$؛ اما این امر غیر ممکن است. □

اثبات یا رد حالت کلی قضیه ۳.۳ که از نظر نویسندگان این مقاله درست است، یک مسئله حل نشده است.

حدس ۱: خانواده قاب‌های بازیاب ضعیف فاز به شکل $\{\phi_۱\}_{i=۱}^{۲n-۲}$ در $\mathbb{R}^n$، در خانواده قاب‌های $۲n - ۲$ عضوی در $\mathbb{R}^n$، برای هر n متناهی چگال نیست.

هر قاب تنگ، بازیاب نرم است ولی قاب‌های تنگ نیازی ندارند که بازیاب ضعیف فاز باشند. برای مثال پایه یکا متعامد $\{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$ در $\mathbb{R}^{۲}$ بازیاب ضعیف فاز نیست. کافی است قرار دهید $x = (۲, ۱)$ و $y = (-۲, ۱)$. برای اینکه بدانیم کدام قاب‌های بازیاب ضعیف فاز، قاب تنگ هستند، نیاز به قضیه زیر داریم:

قضیه ۴.۳. *[۹] قاب $\{\phi_i\}_{i=۱}^{m}$ که در آن $\phi_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^{۲}$، یک قاب A- تنگ است، اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:*
(۱) $\sum_{i=۱}^{m} a_i^{۲} = \sum_{i=۱}^{m} b_i^{۲} = A$،
(۲) $\sum_{i=۱}^{m} a_i b_i = ۰$.

پس بنا به قضیه ۱.۳ هر قاب بازیاب ضعیف فاز به فرم $\{c(۱, ۱), c(۱, -۱)\}$ برای هر c غیر صفر، قاب تنگ در $\mathbb{R}^{۲}$ خواهد بود.

۴. طبقه‌بندی قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^4$

در بخش قبل دیدیم مجموعه‌های دو عضوی بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$، فاقد هر گونه بردار واحد هستند. طبیعی است از خود بپرسیم این مطلب برای $n > 2$ نیز برقرار است یا نه؟ در اولین نگاه جواب منفی است. ما می توانیم بردارهای هر قاب را دوران دهیم و برخی بردارها را به مضارب برخی بردارهای پایه تبدیل نماییم و این قاب دوران یافته ممکن است بازیاب ضعیف فاز باشد. ولی نشان خواهیم داد که قاب بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^3$ فاقد هرگونه مضربی از بردارهای پایه استاندارد است.
همان طور که می‌دانیم اگر $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ برای هر $m > 2n - 2$ یک قاب بازیاب ضعیف فاز باشد، نیازی ندارد که این قاب، بازیاب فاز هم باشد. فرض کنید $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. اگر Φ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد و $|\{i | a_i b_i \neq 0\}| = 2$، آن‌گاه Φ ممکن است بازیاب فاز نباشد. اگر $a_i b_i = a_j b_j$ که در آن $a_i b_i \neq 0$ و $a_j b_j \neq 0$ آن‌گاه حتما می‌توانیم نتیجه بگیریم $|a_i| = |b_i|$، [۴].
ما ابتدا بررسی خواهیم کرد چه زمانی قاب $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ می‌تواند بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد. می‌دانیم هر قاب بازیاب ضعیف فاز $\{\phi_i\}_{i=1}^2$ در $\mathbb{R}^2$ است هر گاه به شکل $(a, b), (a, -b)$ باشد که در آن a, b اعداد حقیقی دلخواه غیر صفرند.
در نظر داشته باشید نتیجه ۷.۱ برای بازیابی ضعیف فاز در حالت $m = 2n - 1$ درست نیست. اسپارک کامل در حالت $m = 2n - 1$ بازیابی ضعیف فاز را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱.۴. قاب $X = \{(2, 1), (-2, 1), (2, -1)\}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$ است چون دو عضو آن به شکل $(a, b), (a, -b)$ هستند. ولی X قاب اسپارک کامل نیست.

از قضیه ۵.۱ نتیجه زیر را داریم:

قضیه ۲.۴. *هر قاب که خاصیت متممی دارد یک قاب بازیاب ضعیف فاز است.*

ولی عکس این مطلب هم در حالت کلی درست نیست. برای مثال، فرض کنید

$$\Phi = \{\phi_1 = (1, 1), \phi_2 = (1, -1), \phi_3 = (1, 1), \phi_4 = (3, -3)\}.$$

Φ قاب بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ است ولی در خاصیت متممی صدق نمی‌کند چون

$$span\{\phi_۱, \phi_۳\} \neq \mathbb{R}^۲,\ span\{\phi_۲, \phi_۴\} \neq \mathbb{R}^۲.$$

برای $n = ۲, ۳, ۴$، قبلا نشان داده شده است که قاب بازیاب ضعیف $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۲n-۲}$ برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. لم زیر و توضیحات بعد از آن، تعمیمی از دو قاب بازیاب ضعیف فاز اشاره شده در بخش ۵ از [۴] است.

لم ۳.۴. *هر قاب* $\Phi = \{\phi_k\}_{k=۱}^{۴}$ *به شکل* $\{(a, b, c), (-a, b, c), (a, -b, c), (a, b, -c)\}$ *که در آن* $a, b, c \neq ۰$*، بازیاب ضعیف فاز در* $\mathbb{R}^۳$ *است.*

اثبات. ما روی بردارهای سطری قاب

$$\Phi = \left[\begin{array}{c|ccc} \phi_۱ & a & b & c \\ \phi_۲ & -a & b & c \\ \phi_۳ & a & -b & c \\ \phi_۴ & a & b & -c \end{array}\right]$$

کار خواهیم کرد. اگر $x = (a_۱, a_۲, a_۳)$، ماتریس زیر ماتریس ضرایب است که در آن هر ردیف E_i نشان‌دهنده ضرایبی است که از بسط $|\langle x, \phi_i\rangle|^۲$ به‌دست آمده است.

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & a_۱a_۲ & a_۱a_۳ & a_۲a_۳ & a_۱^۲ & a_۲^۲ & a_۳^۲ \\ E_۱ & ۲ab & ۲ac & ۲bc & a^۲ & b^۲ & c^۲ \\ E_۲ & -۲ab & -۲ac & ۲bc & a^۲ & b^۲ & c^۲ \\ E_۳ & -۲ab & ۲ac & -۲bc & a^۲ & b^۲ & c^۲ \\ E_۴ & ۲ab & -۲ac & -۲bc & a^۲ & b^۲ & c^۲ \end{array}\right]$$

آن‌گاه عمل‌های سطری زیر نتیجه می‌دهند

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ F_1 = E_1 - E_2 & 4ab & 4ac & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2 = E_3 - E_4 & -4ab & 4ac & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_3 = E_1 - E_3 & 4ab & 0 & 4bc & 0 & 0 & 0 \\ F_4 = E_2 - E_4 & -4ab & 0 & 4bc & 0 & 0 & 0 \\ F_5 = E_1 - E_4 & 0 & 4ac & 4bc & 0 & 0 & 0 \\ F_6 = E_2 - E_3 & 0 & -4ac & 4bc & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

حال عمل‌های سطری زیر نتیجه می‌دهند

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ G_1 = F_1 - F_2 & 8ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 = F_3 + F_4 & 0 & 0 & 8bc & 0 & 0 & 0 \\ G_3 = F_5 - F_6 & 0 & 8ac & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

چون سه ستون سمت راست برابر با صفر است، لذا ما این سه ستون را حذف کرده و به ماتریس

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ G_1 = F_1 - F_2 & 8ab & 0 & 0 \\ G_2 = F_3 + F_4 & 0 & 0 & 8bc \\ G_3 = F_5 - F_6 & 0 & 8ac & 0 \end{array}\right]$$

می‌رسیم. بنابراین ما فرآیندی را برای مشخص کردن a_ia_j برای هر $1 \leq i \neq j \leq 3$ ساخته‌ایم. این نشان می‌دهد که به ازای
$y = (b_1, b_2, b_3)$ داده شده که در شرط $|\langle x, \phi_i\rangle|^2 = |\langle y, \phi_i\rangle|^2$ صدق کند، آن‌گاه بنا به فرآیندی که قبلا ساخته‌ایم، برای هر $1 \leq i \neq j \leq 3$ به دست می‌آوریم $a_ia_j = b_ib_j$، لذا بنا به گزاره ۳.۲، این ۴

بردار بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{3}$ است. $\square$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد هر قاب $\{\phi_k\}_{k=1}^{6}$ به صورت

$$\{(a,b,c,-d),(-a,b,c,d),(a,-b,c,d),(a,b,-c,-d),(a,-b,c,-d),(a,-b,-c,d)\}$$

که در آن $a,b,c,d\neq 0$، بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{4}$ است.

فرض کنید

$$\Psi=\left[\begin{array}{c|cccc} \psi_1 & a & b & c & -d\\ \psi_2 & -a & b & c & d\\ \psi_3 & a & -b & c & d\\ \psi_4 & a & b & -c & -d\\ \psi_5 & a & -b & c & -d\\ \psi_6 & a & -b & -c & d \end{array}\right]$$

اگر $x=(a_1,a_2,a_3,a_4)$، ماتریس زیر ماتریس ضرایب است که در آن هر ردیف E_i نشان‌دهنده ضرایبی است که از بسط $|\langle x,\phi_i\rangle|^{2}$ به‌دست آمده است.

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\\ E_1 & 2ab & 2ac & -2ad & 2bc & -2bd & -2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ E_2 & -2ab & -2ac & -2ad & 2bc & 2bd & 2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ E_3 & -2ab & 2ac & 2ad & -2bc & -2bd & 2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ E_4 & 2ab & -2ac & -2ad & -2bc & -2bd & 2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ E_5 & -2ab & 2ac & -2ad & -2bc & 2bd & -2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ E_6 & -2ab & -2ac & 2ad & 2bc & -2bd & -2cd & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{array}\right]$$

آنگاه عمل‌های سطری زیر نتیجه می‌دهند

$$\left[\begin{array}{r|cccccccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ F_1 = E_1 - E4 & 0 & 4ac & 0 & 4bc & 0 & -4cd & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2 = E_2 - E5 & 0 & -4ac & 0 & 4bc & 0 & 4cd & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_3 = E_3 - E_6 & 0 & 4ac & 0 & -4bc & 0 & 4cd & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) & 0 & 0 & 0 & 4bc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 = \frac{1}{2}(F_1 + F_3) & 0 & 4ac & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 = \frac{1}{2}(F_2 + F_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4cd & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

حال عمل‌های سطری زیر نتیجه می‌دهند

$$\left[\begin{array}{r|cccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 \\ E'_1 = 2E_1 - A_1 - A_2 + A_3 & 4ab & 0 & -4ad & 0 & -4bd & 0 \\ E'_2 = 2E_2 - A_1 + A_2 - A_3 & -4ab & 0 & -4ad & 0 & 4bd & 0 \\ E'_3 = 2E_3 + A_1 - A_2 - A_3 & -4ab & 0 & 4ad & 0 & -4bd & 0 \\ E'_4 = 2E_4 + A_1 + A_2 - A_3 & 4ab & 0 & -4ad & 0 & -4bd & 0 \end{array}\right]$$

چون سه ستون سمت راست برابر با صفر است، لذا ما این سه ستون را حذف کرده و به ماتریس

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 \\ D_1 = \frac{-1}{2}(E'_2 + E'_3) & 4ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 4ac & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 = \frac{-1}{2}(E'_1 + E'_2) & 0 & 0 & 4ad & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & 4bc & 0 & 0 \\ D_3 = \frac{-1}{2}(E'_3 + E'_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 4bd & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4cd \end{array}\right]$$

می‌رسیم. بنابراین ما فرآیندی را برای مشخص کردن a_ia_j برای هر $۱ \leq i \neq j \leq ۴$ ساخته‌ایم. این نشان می‌دهد که به ازای $y = (b_۱, b_۲, b_۳, b_۴)$ داده شده که در شرط $|\langle x, \phi_i\rangle|^۲ = |\langle y, \phi_i\rangle|^۲$ صدق کند، آن‌گاه بنا به فرآیندی که قبلا ساخته‌ایم، برای هر $۱ \leq i \neq j \leq ۴$ به دست می‌آوریم $a_ia_j = b_ib_j$، لذا بنا به گزاره ۳.۲، این ۶ بردار بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۳$ است.

گزاره ۴.۴. *[۴] فرض کنید $\Phi = \{\phi_i\}_{i=۱}^m$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر Φ شامل بردارهای پایه استاندارد باشد، آن‌گاه Φ بازیاب فاز است.*

از گزاره ۴.۴ نتیجه زیر بدیهی است.

قضیه ۵.۴. *هیچ مجموعه بازیاب ضعیف فاز به شکل $\Phi = \{\phi_i\}_{i=۱}^{۲n-۲}$ برای $\mathbb{R}^n$ وجود ندارد که شامل بردارهای پایه استاندارد در $\mathbb{R}^n$ باشد.*

قضیه ۶.۴. *[۲] اگر $\{x_i\}_{i=۱}^{۲n-۲}$ در $\mathbb{R}^n$ بازیاب ضعیف فاز باشد، دراین صورت برای هر $I \subset [۲n-۲]$ با $|I| = n - ۱$، اگر $x \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$، آن‌گاه $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ جدا از هم [10] هستند. به‌ویژه اگر $\|x\| = \|y\| = ۱$، آن‌گاه $x + y$ و $x - y$ دارای محافظ جدا از هم خواهند بود.*

قضیه ۶.۴ شرایط بهتری را برای نشان دادن بازیاب ضعیف فاز بودن برای $n = ۳$ از گزاره ۳.۲ فراهم می‌کند. برای مثال تنها با ۳ حالت ممکن می‌توان نشان داد که قاب‌هایی به شکل لم ۳.۴ بازیاب ضعیف فازند.

حالت ۱: اگر $I = \{(a, b, c), (-a, b, c)\}$، آن‌گاه $x \perp span\{\phi_i\}_{i\in I}$ و $y \perp span\{\phi_i\}_{i\in I^c}$، اما این مطلب ایجاب می‌کند $x = (۰, -c, b)$ و $y = (۰, c, b)$ و بنابراین $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا هستند.

حالت ۲: اگر $I = \{(a, b, c), (a, -b, c)\}$، آن‌گاه $x \perp span\{\phi_i\}_{i\in I}$ و $y \perp span\{\phi_i\}_{i\in I^c}$، از این مطلب باید داشته باشیم $x = (-c, ۰, b)$ و $y = (c, ۰, b)$ و لذا $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا هستند.

حالت ۳: اگر $I = \{(a, b, c), (a, b, -c)\}$، آن‌گاه $x \perp span\{\phi_i\}_{i\in I}$ و $y \perp span\{\phi_i\}_{i\in I^c}$، اما این

[10] *Disjointly supported*

مطلب ایجاب می‌کند $x = (-b, a, ۰)$ و $y = (b, a, ۰)$ و لذا $\frac{y}{\|y\|} + \frac{x}{\|x\|}$ و $\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}$ دارای محافظ مجزا هستند.

با استفاده از قضیه ۶.۴ می‌توان نشان داد:

لم ۷.۴. *هیچ قاب بازیاب ضعیف فازی مانند $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۴}$ در $\mathbb{R}^۳$ وجود ندارد که دو درایه صفر در مولفه‌های یکسان به صورت*

$$\{x_۱ = (۰, a_۲, a_۳), x_۲ = (۰, b_۲, b_۳), x_۳ = (c_۱, c_۲, c_۳), x_۴ = (d_۱, d_۲, d_۳)\}$$

داشته باشند که در آن هر زیر مجموعه ۴ عضوی از دو مولفه‌های یکسان آن بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ باشند.

اثبات. بدون اینکه از کلیت مطلب کم شود، فرض کنید $|I| = \{(۰, a_۲, a_۳), (۰, b_۲, b_۳)\}$ و دو بردار x و y را با شرط $x = (۱, ۰, ۰) \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$ که در آن $\|x\| \neq \|y\|$، انتخاب کنید. آن‌گاه x دو درایه صفر در دو مولفه دومش دارد ولی y حداکثر یک صفر در مولفه‌های خود دارد. این مطلب ایجاب می‌کند $\frac{y}{\|y\|} + \frac{x}{\|x\|}$ و $\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}$ دارای محافظ مجزا نیستند و لذا بنا بر قضیه ۶.۴ نمی‌تواند بازیاب ضعیف فاز باشد. □

مثال ۸.۴. فرض کنید

$$\Phi = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال قرار دهید $I = \{(۰, ۱, ۲), (۰, ۱, -۲)\}$ و $x = (۱, ۰, ۰) \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y = (۰, ۲, ۱) \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$، ولی $\frac{y}{\|y\|} + \frac{x}{\|x\|}$ و $\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}$ دارای محافظ مجزا نیستند.

مثال ۹.۴. می‌دانیم

$$\Phi = \{(۱, ۱), (۱, -۱), (۱, ۱), (۳, -۳)\}$$

یک قاب بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ است. ولی

$$\Psi = \{(۱,۱,۱),(۲,۱,-۱),(۲,۱,۱),(۶,۳,-۳)\}$$

قاب اسپارک کامل نیست و لذا نمی‌تواند بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۳}$ باشد، چون

$$\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۱),(۶,۳)\}$$

نمی‌تواند بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد.

لم ۱۰.۴. *هیچ قاب بازیاب ضعیف فازی مانند $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۴}$ در $\mathbb{R}^{۳}$ وجود ندارد که شامل بیش از یک مضرب از بردارهای پایه استاندارد باشد.*

اثبات. بدون اینکه از کلیت مطلب کم شود، فرض کنید $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۴}$ شامل دو مضرب از بردارهای پایه باشد. این مطلب ایجاب می‌کند که دو صفر در دو مولفه یکسان در بردارهای $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۴}$ وجود دارد. همچنین بردارهای $(۱,۰),(۰,۱)$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ نیستند. در نتیجه بنا به لم ۷.۴، $\{\phi_i\}_{i=۱}^{۴}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۳}$ نیست. □

حال ما لم ۷.۴ را برای حالت $n = ۴$ ثابت می‌کنیم:

لم ۱۱.۴. *هیچ قاب بازیاب ضعیف فازی مانند $\Phi = \{\phi_i\}_{i=۱}^{۶}$ در $\mathbb{R}^{۴}$ به صورت*

$$\{(۰,۰,a_۳,a_۴),(۰,۰,b_۳,b_۴),(c_۱,c_۲,c_۳,c_۴),(d_۱,d_۲,d_۳,d_۴),(e_۱,e_۲,e_۳,e_۴),(f_۱,f_۲,f_۳,f_۴)\}$$

وجود ندارد که در آن بردارهای $(a_۳,a_۴)$ و $(b_۳,b_۴)$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۲}$ نباشند.

اثبات. فرض کنید

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix}.$$

چون (a_3, a_4) و (b_3, b_4) بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$ نیستند، آن‌گاه بردارهای $t = (a, b)$ و $u = (c, d)$ چنان موجودند که برای $i = 3, 4$، $|\langle t, a_i\rangle| = |\langle u, a_i\rangle|$ اما $t, u \in \mathbb{R}^2$ به طور ضعیف هم‌فاز نیستند. ما t و u را به $\mathbb{R}^4$ توسعه می‌دهیم که در آن $t = (t_1, t_2, a, b)$ و $u = (u_1, u_2, c, d)$. حال برای $i \in [6]$ قرار می‌دهیم $|\langle t, x_i\rangle| = |\langle u, x_i\rangle|$، برای $i = 1, 2$ ما دو تساوی عددی داریم، اما برای $i = 3, 4$، دو معادله چهار مجهولی وجود دارد. با فرض $\langle t, x_i\rangle = \langle u, x_i\rangle$ برای $i = 3, 4$ و $\langle t, x_i\rangle = -\langle u, x_i\rangle$ برای $i = 5, 6$، این سیستم معادلات جواب یکتایی برای t و u داریم. اما t و u به طور ضعیف هم‌فاز نیستند. □

می‌توان لم ۱۰.۴ را به $n = 4$ توسعه داد:

لم ۱۲.۴. *هیچ قاب بازیاب ضعیف فاز مانند $\{\phi_i\}_{i=1}^{6}$ در $\mathbb{R}^4$ وجود ندارد که شامل بیش از یک مضرب از بردارهای پایه $\mathbb{R}^4$ باشد.*

اثبات. اثبات این لم کاملا مشابه اثبات لم ۱۰.۴ می‌باشد. □

نکته ۱۳.۴ . هرگاه قاب اسپارک کامل

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4), (d_1, d_2, d_3, d_4), (e_1, e_2, e_3, e_4), (f_1, f_2, f_3, f_4)\}$$

بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^4$ باشد، آن‌گاه هر زیرمجموعه ۴ عضوی از مولفه‌های یکسان دو و سه تایی، بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ خواهد بود. اما نتیجه دوم بهتر است.

مثال ۱۴.۴. قاب اسپارک کامل

$$X = \{(۱, ۱, ۲, ۳), (۰, ۱, ۱, -۳), (۱, -۱, -۲, ۳), (۰, ۱, -۲, -۳), (۰, ۱, ۴, ۵), (۰, ۱, ۳, -۵)\}$$

در $\mathbb{R}^۴$ را در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه ۴ عضوی از مولفه‌های یکسان دو تایی، بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ است، ولی چون بنابر لم ۱۱.۴، $\{(۱, ۱, ۲), (۰, ۱, ۱), (۱, -۱, -۲), (۰, ۱, -۲), (۰, ۱, ۴), (۰, ۱, ۳)\}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۳$ نیست، لذا این قاب، بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۴$ نخواهد بود.

همان طور که می‌دانیم بردارهای هر قاب را می‌توان چنان دوران داد که یکی از بردارها به بردار پایه تبدیل شود. همچنین خاصیت بازیابی ضعیف فاز تحت دوران پایا نیست.

چون هر قاب بازیابی ضعیف فاز $\{x_i\}_{i=۱}^{۲n-۲}$، یک قاب اسپارک کامل است، در قضیه ۶.۴ کافی‌است حالت $|I| = n - ۱$ را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید $\{x_i\}_{i=۱}^{۴}$ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۳$ باشد. حال برای هر $|I| = ۲$، اگر

$x = (x_۱, x_۲, x_۳) \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y = (y_۱, y_۲, y_۳) \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$، آن‌گاه $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا هستند.

اگر فرض کنیم $\|x\| = \|y\| = ۱$، داریم $x + y$ و $x - y$ دارای محافظ مجزا هستند. پس باید داشته باشیم $(x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲, x_۳ + y_۳)$ و $(x_۱ - y_۱, x_۲ - y_۲, x_۳ - y_۳)$ دارای محافظ مجزا هستند. بنابراین سه حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت ۱:

$$x_۱ + y_۱ \neq ۰ \text{ و } x_۱ - y_۱ = ۰,\ x_۲ + y_۲ \neq ۰ \text{ و } x_۲ - y_۲ = ۰,\ x_۳ + y_۳ = ۰ \text{ و } x_۳ - y_۳ \neq ۰$$

در این حالت باید داشته باشیم $x = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $y = (x_۱, x_۲, -x_۳)$. اما این حالت غیرممکن است چون با تغییر I می‌توانیم مثال نقضی برای آن بیابیم.

مثال ۱۵.۴. قاب اسپارک کامل

$$\Phi = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & -۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $I = \{(۱,۲,۳),(۴,۵,۶)\}$، آنگاه $x = (۱,-۲,۱) \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y = (۱,۲,۱) \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$، اما اگر فرض کنیم $I' = \{(۱,۲,۳),(۱,-۲,۳)\}$، آنگاه خواهیم داشت $x = (۳,\circ,-۲) \perp span\{x_i\}_{i\in I'}$ و $y = (۳,\circ,-۱) \perp span\{x_i\}_{i\in\{\Phi\}-I'}$، ولی $\frac{x}{||x||}+\frac{y}{||y||}$ و $\frac{x}{||x||}-\frac{y}{||y||}$ دارای محافظ مجزا نیستند. در حالت کلی اگر همواره این حالت برقرار باشد، بنا به [۴]، این قاب باید بازیاب فاز باشد، ولی با توجه به تعداد بردارها این مطلب غیر ممکن خواهد بود.

حالت ۲:

$$x_۱+y_۱ = x_۱-y_۱ = \circ,\ x_۲+y_۲ \neq \circ \text{ و } x_۲-y_۲ = \circ,\ x_۳+y_۳ = \circ \text{ و } x_۳-y_۳ \neq \circ$$

در این حالت باید داشته باشیم $x = (\circ, x_۲, x_۳)$ و $y = (\circ, x_۲, -x_۳)$،

حال قرار دهید $||x|| \neq ||y||$:

حالت ۳:

در این حالت برای برخی $k \in \mathbb{R}$، باید داشته باشیم $||y|| = k||x||$. آنگاه $x = (\circ, x_۲, x_۳)$ و $y = (\circ, -kx_۲, kx_۳)$ و $\frac{x}{||x||}+\frac{y}{||y||}$ و $\frac{x}{||x||}-\frac{y}{||y||}$ دارای محافظ مجزا هستند.

حال مثالی برای قضیه ۶.۴ که برای حالت ۳ مناسب است، ارائه می‌کنیم:

مثال ۱۶.۴. فرض کنید

$$\Phi = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم قاب Φ بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^{۳}$ است، آن‌گاه $x = (۰, -۲, ۱) \perp span\{(۳, ۱, ۲), (-۳, ۱, ۲)\}$ و $y = (۰, ۴, ۲) \perp span\{(۳, -۱, ۲), (۳, ۱, -۲)\}$. داریم $\|x\| \neq \|y\|$ و نیز $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا هستند چون $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} = (۰, ۰, \frac{۲}{\sqrt{۵}})$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = (۰, \frac{-۴}{\sqrt{۵}}, ۰)$.

همان طور که قبلا دیده‌ایم، هر قاب بازیاب ضعیف فاز ۲ عضوی در $\mathbb{R}^{۲}$، شامل هیچ مضربی از بردارهای پایه نیستند.

قضیه ۱۷.۴. *هیچ قاب بازیاب ضعیف فاز ۴ عضوی در $\mathbb{R}^{۳}$، وجود ندارد که شامل مضربی از بردارهای پایه باشد.*

اثبات. اثبات به‌روش برهان خلف است. فرض کنیم قاب بازیاب ضعیف فاز $X = \{x_i\}_{i=۱}^{۴}$ در $\mathbb{R}^{۳}$ وجود دارد که شامل مضربی از بردارهای پایه و به صورت

$$X = \begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ d_۱ & d_۲ & d_۳ \end{bmatrix}$$

باشد. چون X بازیاب ضعیف فاز است، آن‌گاه بنا بر قضیه ۶.۴، برای زیرمجموعه

$$I = \{(a_۱, ۰, ۰), (b_۱, b_۲, b_۳)\},$$

داریم $x = (۰, -b_۳, b_۲) \perp span\{x_i\}_{i\in I}$ و $y = (۰, -c_۳, c_۲) = (۰, -d_۳, d_۲) \perp span\{x_i\}_{i\in I^c}$، آن‌گاه $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا هستند. این مطلب ایجاب می‌کند $b_۲ = c_۲ = d_۲$ و $c_۳ = d_۳ = -b_۳$. همچنین بنا به ملاحظه ۱۳.۴ باید داشته باشیم $b_۱ = c_۱ = -d_۱$، لذا X باید به

شکل

$$X=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

باشد. حال قرار می‌دهیم $I'=\{(a_1,0,0),(-b_1,b_2,-b_3)\}$، داریم $x=(0,b_3,b_2)\perp span\{x_i\}_{i\in I'}$ و

$y=(-b_2,b_1,0)\perp span\{x_i\}_{i\in(I')^c}$، اما $\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}$ دارای محافظ مجزا نیستند. $\square$

اکنون می‌خواهیم قاب‌های بازیاب ضعیف فاز ۴ عضوی در $\mathbb{R}^3$ را طبقه‌بندی کنیم.

قضیه ۱۸.۴. *قاب اسپارک کامل $\Phi=\{\phi_k\}_{k=1}^{4}$ در $\mathbb{R}^3$ بازیاب ضعیف فاز است اگر و تنها اگر به شکل*

$$\{\epsilon\phi_1=\epsilon(a,b,c),\epsilon\phi_2=\epsilon(-a,b,c),\epsilon\phi_3=\epsilon(a,-b,c),\epsilon\phi_4=\epsilon(a,b,-c)\}$$

باشد که در آن $a,b,c\neq 0$ و ϵ برابر با ۱+ یا ۱− است. چون $a,b,c\neq 0$، این مجموعه شامل هیچ مضربی از بردارهای پایه استاندارد نخواهد بود.

اثبات. $\Leftarrow$: بنا به لم ۳.۴ واضح است.

$\Rightarrow$: فرض کنید قاب $\Phi=\{\phi_k\}_{k=1}^{4}$ به صورت

$$\Phi=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^3$ باشد. آن‌گاه بنا به ملاحظه ۱۳.۴ هر زیرمجموعه از دو مولفه‌های یکسان باید بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^2$ باشند. اگر مجموعه بردارهای $\{(a_2,a_3),(b_2,b_3),(c_2,c_3),(d_2,d_3)\}$

بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ باشد، آن‌گاه حداقل باید $(b_۲, b_۳) = (a_۲, -a_۳)$. اگر

$$\{(a_۱, a_۳), (b_۱, b_۳), (c_۱, c_۳), (d_۱, d_۳)\}$$

بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ باشد، آن‌گاه حداقل باید $(b_۱, b_۳) = (a_۱, -a_۳)$. اگر

$$\{(a_۱, a_۲), (b_۱, b_۲), (c_۱, c_۲), (d_۱, d_۲)\}$$

بازیاب ضعیف فاز در $\mathbb{R}^۲$ باشد، آن‌گاه حداقل باید $(c_۱, c_۲) = (a_۱, -a_۲)$. لذا Φ باید به شکل

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & a_۲ & -a_۳ \\ a_۱ & -a_۲ & c_۳ \\ d_۱ & d_۲ & d_۳ \end{bmatrix}$$

باشد. حال قضیه ۶.۴ را به‌کار می‌بندیم. فرض کنید $I = \{(a_۱, a_۲, a_۳), (a_۱, a_۲, -a_۳)\}$. آن‌گاه $x = (-a_۲, a_۲, ۰) \perp span\{\phi_i\}_{i\in I}$ و بنابراین $y = (a_۲, a_۲, ۰) \perp span\{\phi_i\}_{i\in I^c}$، پس $d_۱ = -a_۱$ و $d_۲ = a_۲$. سرانجام فرض کنید $I' = \{(a_۱, a_۲, a_۳), (a_۱, -a_۲, c_۳)\}$. آن‌گاه $x = (-a_۲, a_۲, ۰) \perp span\{\phi_i\}_{i\in I'}$ و
$y = (-a_۳, ۰, a_۱) \perp span\{\phi_i\}_{i\in\{\Phi\}-I'}$، که از آن نتیجه می‌شود $c_۳ = a_۳$. همچنین $y = (a_۳, ۰, a_۱) \perp span\{\phi_i\}_{i\in\{\Phi\}-I'}$، و لذا $d_۳ = a_۳$. □

در قضیه ۱۸.۴ اگر قرار دهیم $a_۱ = a_۲ = a_۳$، آن‌گاه هر قاب بازیاب ضعیف در $\mathbb{R}^۳$ یک قاب بازیاب نرم خواهد بود. ولی در حالت کلی قضیه، این مطلب برقرار نیست.

مراجع

[۱] F. Akrami، P.G. Casazza، M.A. Hasankhani Fard and A. Rahimi، A note on norm retrievable real Hilbert space frames، *J. Math. Anal. Appl.*، ۵۱۷،(۲) ،(۲۰۲۳) .۱۲۶۶۲۰

[۲] P.G. Casazza، F. Akrami and A. Rahimi، Fundamental results on weak phase retrieval، *Ann. Funct. Anal.*، ۱۴،(۱۵) ۲۰۲۳.

[۳] R. Balan، P.G. Casazza and D. Edidin، On signal reconstruction without phase، *Appl. Comput. Harmonic Anal.*، ۲۰(۳) ،(۲۰۰۶) ۳۴۵–۳۵۶.

[۴] S. Botelho-Andrade، P.G. Casazza، D. Ghoreishi، S. Jose and J.C. Tremain، *Weak Phase Retrieval and Phaseless Reconstruction*، arXiv:۱۶۱۲۰۸۰۱۸.، ۲۰۱۶.

[۵] S. Botelho-Andrade، P.G. Casazza، H.V. Nguyen And J.C. Tremain، *Phase retrieval versus phaseless reconstruction*، *Journal of Mathematical Analysis and Applications*، ۴۳۶،(۱) (۲۰۱۵).

[۶] J. Cahill، P.G. Casazza، J. Jasper and L.M. Woodland، *Phase Retrieval and Norm Retrieval*، arXiv:۱۴۰۹۸۲۶۶.، ۲۰۱۴.

[۷] J. Cahill، P.G. Casazza، J. Peterson and L. Woodland، Phase retrivial by projections، *Houston Journal of Mathematics*، ۴۲(۲) ،(۲۰۱۶) ۵۳۷–۵۵۸.

[۸] P.G. Casazza، D. Ghoreishi، S. Jose and J.C. Tremain، Norm retrieval and phase Retrieval by projections، *Axioms*، ۶ ،(۲۰۱۷) ۱–۱۵.

[۹] P.G. Casazza and S. Xu، *Controled scaling if Hilbert space frames for* $\mathbb{R}^۲$، arXiv:۲۰۰۲۰۶۳۹۶.v۱.

[۱۰] O. Christensen،*An Introduction to Frames and Riesz Bases*، Birkhauser، Boston ۲۰۱۶.

[۱۱] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer، A class of nonharmonic Fourier series، *Transactions of the American Mathematical Society*، ۷۲ ،(۱۹۵۲) ۳۴۱–۳۶۶.

[۱۲] M.A. Hasankhani Fard، Norm retrievable frames in $\mathbb{R}^n$، *Elec. J. Lin. Alg.*، ۳۱ ،(۲۰۱۶) ۴۲۵– ۴۳۲.