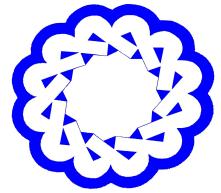


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

# یک روش عددی بر مبنای ماتریس عملیاتی انتگرال کسری تابع مقیاس موجک دابیشز برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری

نسیم مداح شریعتی آ، محمدرضا یاقوتی\* آ

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران

### چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری در مدل‌سازی پدیده‌های مختلف در اغلب شاخه‌های علوم نقش حائز اهمیتی دارند. در این مقاله، به کمک تعریف توابع شبه بلاک پالس، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع مقیاس موجک دابیشز معرفی و با استفاده از آن یک روش عددی برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری بیان می‌شود. هم‌چنین آنالیز خطا ارائه و کاربرد روش در دو مثال نشان داده می‌شود.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۹ اسفند ۱۴۰۰

پذیرفته شده: ۱ مهر ۱۴۰۱

دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی توکلی

کلمات کلیدی:

معادله‌ی دیفرانسیل

کسری، توابع شبه بلاک

پالس، تابع مقیاس،

موجک دابیشز، ماتریس

عملیاتی انتگرال کسری.

## ۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری<sup>۱</sup> یکی از بخش‌های بسیار بااهمیت و کاربردی حساب کسری محسوب می‌شود و یافتن روش‌های حل مناسب برای این دسته از معادلات همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. قضایای مربوط به شرایط لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل کسری، در بعضی از مراجع به تفصیل آمده است [۱۴، ۶].

حساب کسری<sup>۲</sup> به عنوان شاخه‌ی مهمی از حساب، کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف علوم از قبیل مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی [۱۸]، پزشکی [۱۵] و اقتصاد [۲] دارد.

مانند سایر معادلات، روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی برای حل این معادلات به کار رفته‌اند. در مواردی که یافتن جواب تحلیلی به سادگی امکان‌پذیر نیست، استفاده از روش‌های عددی با دقت قابل قبول برای تعیین جواب، جایگزین مناسبی است. از جمله روش‌های عددی به کار رفته برای حل معادلات دیفرانسیل کسری می‌توان به روش کالوکیشن<sup>۳</sup> [۱۷]، روش تفاضل متناهی<sup>۴</sup> [۲۳]، استفاده از ماتریس‌های عملیاتی<sup>۵</sup> [۲۱، ۱۶، ۱۱، ۱۰، ۳]، و موجک‌ها<sup>۶</sup> اشاره نمود.

موجک‌ها در مواردی از قبیل تجزیه و تحلیل سیستم، کنترل بهینه، آنالیز عددی، پردازش سیگنال، الگوریتم زمان-فرکانس و الگوریتم‌های سریع بسیار پرکاربرد هستند و در نمایش دقیق پهنه‌ی وسیعی از توابع و عمل‌گرها، نقش حائز اهمیت دارند. تقریب توابع بر اساس خانواده‌ی توابع متعامد در پهنه‌ی وسیعی از مسائل کاربردی در علوم و مهندسی به چشم می‌خورد. از جمله توابع متعامد با کاربردهای گسترده، می‌توان به توابع سینوس و کسینوس، توابع بلاک-پالس، چندجمله‌ای‌های لژاندر<sup>۷</sup>، چلیشکف

\*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: nasim.maddah62@gmail.com (نسیم مداح شریعتی)، yaghouti@guilan.ac.ir (محمدرضا یاقوتی).

<http://doi.org/10.22072/wala.2022.549743.1368>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

<sup>1</sup>Fractional differential equations

<sup>2</sup>Fractional calculus

<sup>3</sup>Collocation

<sup>4</sup>Finite difference

<sup>5</sup>Operational matrices

<sup>6</sup>Wavelets

<sup>7</sup>Legendre

<sup>۸</sup>، لاگر <sup>۹</sup> و موجک‌های برنولی <sup>۱۰</sup> و لژاندار اشاره کرد. مزیت اصلی استفاده از پایه‌های متعامد این است که مسأله به یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی تقلیل می‌یابد [۱، ۹، ۱۲، ۲۲]. در میان موجک‌ها، موجک‌های دارای ویژگی‌های خاص مانند تعامد <sup>۱۱</sup>، توجه بیشتری را به خود جلب می‌کنند. در سال ۱۹۸۸ اینگرید دابیشز <sup>۱۲</sup> یک پایه‌ی متعامدیکه <sup>۱۳</sup> از موجک هموار <sup>۱۴</sup> ساخت که با فرض داشتن گشتاور صفر <sup>۱۵</sup> از مرتبه‌ی  $N$ ، محمل <sup>۱۶</sup> تابع مقیاس <sup>۱۷</sup> آن به صورت بازه‌ی  $[0, 2N-1]$  خواهد بود.

در این مقاله به کمک تعریف توابع شبه بلاک پالس <sup>۱۸</sup>، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع مقیاس موجک دابیشز معرفی می‌شود و با استفاده از آن دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری به صورت کلی

$${}_a D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad a \leq t < T, \quad (1.1)$$

حل می‌شوند. در رابطه‌ی (۱.۱)،  $\alpha \in \mathbb{Q}$  و نماد  $D$  به مشتق کسری کاپوتو <sup>۱۹</sup> اشاره دارد. هم‌چنین شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1,$$

به طوری که  $[\alpha]$  نزدیک‌ترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با  $\alpha$  است.

---

<sup>8</sup>Chelyshkov

<sup>9</sup>Laguerre

<sup>10</sup>Bernoulli

<sup>11</sup>Orthogonality

<sup>12</sup>Ingrid Daubechies

<sup>13</sup>Orthonormal

<sup>14</sup>Smooth

<sup>15</sup>Vanishing moments

<sup>16</sup>Support

<sup>17</sup>Scaling function

<sup>18</sup>Quasi Block Pulse

<sup>19</sup>Caputo

در بخش ۲، برخی از تعاریف و مفاهیم پایه‌ای حساب کسری و نظریه‌ی موجک ارائه می‌شود. سپس، در بخش ۳، توابع شبه بلاک پالس معرفی و برخی از ویژگی‌های جالب آن‌ها بیان می‌شود. در ادامه در بخش ۴، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع مقیاس موجک دابیشز معرفی می‌شود. سپس در بخش ۵، یک روش عددی با استفاده از ماتریس عملیاتی معرفی شده در بخش قبل برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری تشریح می‌شود و در ادامه در بخش ۶، آنالیز خطا<sup>۲۰</sup> ارائه می‌شود. سرانجام، برای بررسی کاربرد روش پیشنهادی، دو مثال در بخش ۷، با استفاده از روش مذکور حل می‌شوند و نتایج در قالب جدول و نمودار ارائه می‌شوند.

## ۲. تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا تعاریفی از مشتق و انتگرال کسری ارائه می‌دهیم و سپس مروری بر نظریه‌ی موجک و به ویژه موجک دابیشز خواهیم داشت.

### ۱.۲. حساب کسری

مطالب این بخش از منابع [۶، ۱۴] نوشته شده‌اند.

تعریف ۱.۲. عملگر انتگرال ریمان-لیوویل<sup>۲۱</sup> از مرتبه‌ی  $\alpha > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a I_t^\alpha f(t) = {}_a \mathbb{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

تعریف ۲.۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a \mathbb{D}_t^{-(n-\alpha)} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 < \alpha < n,$$

به طوری که  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>20</sup>Error analysis

<sup>21</sup>Riemann-Liouville

نکته ۳.۲. فرض کنید که  $n - 1 < \alpha < n$ ، و تابع  $f(t)$  برای هر  $T > a$  دارای  $n + 1$  مشتق کران‌دار پیوسته در بازه‌ی  $[a, T]$  باشد. در این صورت وقتی  $\alpha \rightarrow n$ ، مشتق کاپوتو همان مشتق معمولی تابع  $f(t)$  از مرتبه‌ی طبیعی  $n$  خواهد بود، به عبارتی

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad a \leq t \leq T.$$

نکته ۴.۲. برای عمل‌گر انتگرال ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو رابطه‌ی زیر برقرار است:

$${}_a\mathbb{D}_t^{-\alpha} ({}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=a} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)}, \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

۲.۲. نظریه‌ی موجک

تعریف ۵.۲. [۱۳] یک آنالیز چندریزه‌سازی  ${}^{22}$  از  $L^2(\mathbb{R})$ ، دنباله‌ای از زیرفضاهای  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  از  $L^2(\mathbb{R})$  است به طوری که ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

$$1. \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

$$2. f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_j$$

$$3. f(2^j t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t + 1) \in V_j$$

$$4. \bigcap_j V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

۵. تابع  $\phi(t) \in V_0$  موسوم به تابع مقیاس با انتگرال ناصفر وجود دارد به طوری که  $\{\phi(t-n)\}$  یک پایه‌ی متعامد یکه برای  $V_0$  است.

تعریف ۶.۲. [۲۰] تابع  $f(t)$  دارای گشتاور صفر از مرتبه‌ی  $N$  است اگر

$$\int_{\mathbb{R}} t^m f(t) dt = 0, \quad 0 \leq m \leq N-1,$$

و

$$\int_{\mathbb{R}} t^N f(t) dt \neq 0.$$

تحت شرایط مطرح شده در مقدمه، یعنی با فرض داشتن گشتاورهای صفر از مرتبه‌ی  $N$ ، رابطه‌ی دومقیاسی <sup>۲۳</sup> برای تابع مقیاس موجک دابیشز به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} h_k \phi(2t - k), \quad (2.2)$$

به طوری که  $D = 2N$ . مقادیر  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  توسط دابیشز محاسبه شده‌اند و در بعضی از مراجع در دسترس هستند [۵، ۱۳].

با توجه به تعریف ۵.۲، به روشنی استنباط می‌شود که

$$\{\phi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \phi(2^j t - k) | j, k \in \mathbb{Z}\},$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای  $V_j$  است.

بنابراین هر تابع  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\mathcal{P}_j f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(t), \quad (3.2)$$

که در آن تصویر متعامد تابع  $f$  در فضای  $V_j$  است و

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{j,k}(t) dt.$$

در حالتی که  $f \in V_j$  و  $t \in [a, b]$  با نقاط ابتدا و انتهای صحیح، رابطه‌ی (۳.۲) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\mathcal{P}_j f(t) = \sum_{k=2^j a + 1 - L}^{2^j b - 1} c_{j,k} \phi_{j,k}(t), \quad a < t < b,$$

<sup>23</sup>Dilation relation

که در آن  $L = D - ۱$  [۸، ۱۹]. از ویژگی چهارم تعریف ۵.۲، نتیجه می‌شود

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{P}_j f\|_{L^2} = 0.$$

قضیه ۷.۲. اگر تابع هموار  $f \in C^N$  در فضای  $V_j$ ، با موجک دابیشز از مرتبه  $N$ ، تقریب زده شود، آنگاه

$$\exists C > 0, \quad \|f - \mathcal{P}_j f\|_{L^2} \leq C 2^{-jN}.$$

□

اثبات. برای اثبات [۴] را ببینید.

۱.۲.۲. محاسبه‌ی تابع مقیاس موجک دابیشز در نقاط صحیح و دوتایی  
نقاط دوتایی<sup>۲۴</sup> به صورت

$$t = \frac{k}{2^j}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

تعریف می‌شوند [۲۰]. برای  $j \geq 0$  این نقاط در بازه‌ی  $[0, D - 1]$  به شکل زیر خواهند بود

$$t = \frac{n}{2^j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^j(D - 1).$$

به وضوح وقتی  $j = 0$  نقاط دوتایی همان نقاط صحیح هستند. برای تابع مقیاس موجک دابیشز هیچ صورت صریحی وجود ندارد. اما در روندی که در ادامه می‌آید ابتدا مقادیر این تابع در نقاط صحیح به دست می‌آیند و سپس با استفاده از آن، مقادیر تابع در نقاط دوتایی تعیین می‌شوند. با جای‌گذاری نقاط صحیح بازه‌ی محمل در رابطه‌ی (۲.۲)، به دستگاه همگن زیر می‌رسیم

$$(A - I)\Phi = 0,$$

---

<sup>24</sup>Dyadic points

که در آن

$$A_{D \times D} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{D-3} & h_{D-4} & h_{D-5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{D-1} & h_{D-2} & h_{D-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{D-1} \end{pmatrix},$$

و

$$\Phi_{D \times 1} = \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \vdots \\ \phi(D-3) \\ \phi(D-2) \\ \phi(D-1) \end{pmatrix},$$

و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با ماتریس A است. اکنون برای داشتن جواب یکتا به یک شرط نرمال‌سازی نیاز داریم که به صورت زیر است [۱۳]

$$\sum_{k=0}^{D-1} \phi(t-k) = 1.$$

سرانجام، با حل دستگاه خطی به دست آمده، مقادیر تابع مقیاس در نقاط صحیح بازه به دست می‌آیند. در ادامه با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر موسوم به الگوریتم کسکد ۲۵ مقادیر تابع مقیاس در نقاط



دوتایی تعیین می‌شوند

$$\phi\left(\frac{n}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} h_k \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}} - k\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2^j(D-1) - 1.$$

### ۳. توابع شبه بلاک پالس

قصد ما از تعریف این توابع، معرفی توابعی مشابه با توابع بلاک پالس است با این تفاوت که نقاط گره‌ای به طور دلخواه انتخاب می‌شوند و لزوماً متساوی الفاصله نیستند.

تعریف ۱.۳. برای  $m \in \mathbb{N}$  یک افراز  $m$  عضوی از توابع شبه بلاک پالس روی بازه‌ی  $[0, T)$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.3)$$

که  $i = 1, \dots, m$  و

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = T.$$

توابع  $\{b_i\}_{i=1}^m$  تعریف شده در (۱.۳) ویژگی انفصال<sup>۲۶</sup> و تعامد دارند. به عبارت دیگر برای  $i, j = 1, \dots, m$  داریم

$$b_i(t)b_j(t) = \begin{cases} b_i(t), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

<sup>26</sup>Disjointness

و

$$\int_0^T b_i(t)b_j(t)dt = \begin{cases} \Delta_i t, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

که در آن  $\Delta_i t = t_{i+1} - t_i$ .

تابع حقیقی مقدار و کراندار  $f(t) \in L^2([0, T])$  را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i b_i(t), \quad (2.3)$$

به طوری که

$$f_i = \frac{1}{\Delta_i t} \int_0^T f(t)b_i(t)dt.$$

برای تقریب توابع، از سری قطع‌شده‌ی (۲.۳) با  $m$  جمله به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^m f_i b_i(t) = F^T \mathbf{B}_m(t) = \mathbf{B}_m(t)^T F, \quad (3.3)$$

که در آن  $F = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T$ .

۱.۳. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع شبه بلاک پالس

برای سادگی در ادامه از اندیس‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. رابطه‌ی (۱.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (4.3)$$

که در آن  $*$  ضرب کانولوشن<sup>۲۷</sup> است. از (۳.۳) داریم

<sup>27</sup>Convolution product

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \approx F^T \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \{t^{\alpha-1} * \mathbf{B}_m(t)\}.$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس<sup>۲۸</sup> می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$L\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * b_i(t)\right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \{e^{-st_i} - e^{-st_{i+1}}\}.$$

اکنون تبدیل معکوس لاپلاس نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{(t-t_i)^\alpha u(t-t_i) - (t-t_{i+1})^\alpha u(t-t_{i+1})\}, \quad (5.3)$$

که در این جا  $u(t)$  تابع پله‌ای واحد<sup>۲۹</sup> است. با توجه به تعریف و ویژگی‌های توابع شبه بلاک پالس به

روشنی برای

$j = 1, \dots, m$  خواهیم داشت

$$(t-t_j)^\alpha u(t-t_j) \approx \sum_{i=1}^m d_{i,j} b_i(t) = [0, \dots, 0, d_{j,j}, d_{j+1,j}, \dots, d_{m,j}] \mathbf{B}_m(t),$$

که

$$d_{i,j} = \frac{1}{\Delta_i t} \int_{t_i-t_j}^{t_{i+1}-t_j} t^\alpha u(t) dt = \frac{(t_{i+1}-t_j)^{\alpha+1} - (t_i-t_j)^{\alpha+1}}{\Delta_i t (\alpha+1)}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

<sup>28</sup>Laplace transform

<sup>29</sup>Unit step function

بنابراین از (۵.۳) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ \circ, \circ, \dots, \circ, d_{i,i}, d_{i+1,i} - d_{i+1,i+1}, d_{i+2,i} - d_{i+2,i+1}, \dots, d_{m,i} - d_{m,i+1} \right] \mathbf{B}_m(t),$$

و سرانجام نتیجه می‌گیریم

$$I^\alpha \mathbf{B}_m(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathbf{B}_m(\tau) d\tau = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{B}_m(t), \quad (۶.۳)$$

که در رابطه‌ی فوق داریم

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,1} & \bar{d}_{2,1} - \bar{d}_{2,2} & \bar{d}_{3,1} - \bar{d}_{3,2} & \dots & \bar{d}_{m,1} - \bar{d}_{m,2} \\ & \bar{d}_{2,2} & \bar{d}_{3,2} - \bar{d}_{3,3} & \dots & \bar{d}_{m,2} - \bar{d}_{m,3} \\ & & \bar{d}_{3,3} & \dots & \bar{d}_{m,3} - \bar{d}_{m,4} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \circ & & & & \bar{d}_{m,m} \end{bmatrix},$$

و

$$\bar{d}_{i,j} = \frac{(t_{i+1} - t_j)^{\alpha+1} - (t_i - t_j)^{\alpha+1}}{t_{i+1} - t_i}.$$

۴. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع مقیاس موجک دابیشز

بردار توابع مقیاس موجک دابیشز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\phi_m(t) = \left[ \phi_{j,k_1}(t), \phi_{j,k_1+1}(t), \dots, \phi_{j,k_2}(t) \right]^T,$$

که  $1 - k_1 = m - k_2$ . فرض کنید نقاط گره‌ای به صورت زیر باشند

$$\mathbf{T} = \{t_i | i = 1, \dots, m\},$$

ماتریس توابع مقیاس موجک دابیشز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi_m = [\phi_m(t_1), \phi_m(t_2), \dots, \phi_m(t_m)].$$

در نقاط گره‌ای داریم

$$\phi_m(t) = \Phi_m \mathbf{B}_m(t), \quad (1.4)$$

و از آن‌جا

$$\mathbf{B}_m(t) = (\Phi_m)^{-1} \phi_m(t). \quad (2.4)$$

اکنون فرض کنید ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع مقیاس موجک دابیشز به صورت زیر باشد

$$I^\alpha \phi_m(t) \approx \mathbf{P}_\alpha \phi_m(t). \quad (3.4)$$

در نقاط گره‌ای از (۶.۳)، (۱.۴)، و (۲.۴) می‌توانیم بنویسیم

$$I^\alpha \phi_m(t) = I^\alpha \Phi_m \mathbf{B}_m(t) = \Phi_m I^\alpha \mathbf{B}_m(t) = \Phi_m \mathbf{F}_\alpha \mathbf{B}_m(t) = \Phi_m \mathbf{F}_\alpha (\Phi_m)^{-1} \phi_m(t),$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$\mathbf{P}_\alpha = \Phi_m \mathbf{F}_\alpha (\Phi_m)^{-1}. \quad (4.4)$$

## ۵. روش پیشنهادی

در این بخش یک روش عددی بر مبنای توابع مقیاس موجک دابیشز<sup>۳۰</sup> (DWM) از مرتبه‌ی ۲ برای حل معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۱) با شرایط اولیه‌ی

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1, \quad (1.5)$$

ارائه می‌دهیم.

فرض می‌کنیم  $a = 0$  و  $T = 1$ . قرار می‌دهیم

$$D^\alpha y(t) = \sum_{k=k_1}^{k_2} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) = C^T \phi_m(t), \quad (2.5)$$

که در آن  $k_1 = 1 - L$ ،  $k_2 = 2^j - 2$ ، و ضرایب  $c_{j,k}$  باید تعیین شوند. سپس با به کارگیری عملگر انتگرال ریمان لیوویل از مرتبه‌ی  $\alpha$  و اعمال شرایط اولیه (۱.۵) و رابطه‌ی (۳.۴) خواهیم داشت

$$y(t) = C^T I^\alpha \phi_m(t) = C^T \mathbf{P}_\alpha \phi_m(t). \quad (3.5)$$

با جای‌گذاری (۲.۵)، (۳.۵) در معادله‌ی (۱.۱) و در نظر گرفتن نقاط دوتایی بازه به عنوان نقاط گره‌ای و با استفاده از (۱.۴) و (۴.۴)، به یک دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی می‌رسیم که در آن  $c_{j,k}$  ها مجهولات هستند. با حل این دستگاه و سپس با استفاده از رابطه‌ی (۳.۵) جواب عددی به دست می‌آید.

## ۶. آنالیز خطا

در این بخش، ابتدا نامساوی معروف یانگ<sup>۳۱</sup> را بیان و سپس با استفاده از آن، قضیه‌ی خود را در ارتباط با خطای عددی بیان و اثبات می‌کنیم.

<sup>30</sup>Daubechies Wavelet Method

<sup>31</sup>Young's inequality

قضیه ۱.۶. (نامساوی یانگ) فرض کنید  $f \in L^1$  و  $g \in L^p (1 \leq p \leq \infty)$ ، آنگاه برای تقریباً هر  $t$ ،  $f * g(t)$  وجود دارد به طوری که  $f * g \in L^p$ ، و همچنین

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

اثبات. برای اثبات [۷] را ببینید.

قضیه ۲.۶. فرض کنید  $Y(t)$  و  $y(t)$  به ترتیب جواب دقیق و جواب عددی به دست آمده با روش پیشنهادی  $DWM$  با استفاده از تابع مقیاس موجک دابیشز از مرتبه  $N$  در فضای  $V_j$  برای معادله (۱.۱) با شرایط اولیه (۱.۵) باشند. همچنین فرض کنید  $f$  در شرط لیپشیتز<sup>۳۲</sup> نسبت به مؤلفه‌ی دوم صدق کند و شرایط قضیه ۱.۶ برقرار باشد. آنگاه  $D > 0$  وجود دارد به طوری که برای خطای مانده‌ی<sup>۳۳</sup>

$$E(t) = \mathcal{D}^\alpha y(t) - f(t, y(t)),$$

داریم

$$\|E(t)\|_2 \leq D 2^{-jN}.$$

اثبات. از (۴.۳) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} Y(t) - y(t) &= I^\alpha(\mathcal{D}^\alpha Y(t)) - I^\alpha(\mathcal{D}^\alpha y(t)) \\ &= I^\alpha(\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * (\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)). \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Lipschitz condition

<sup>33</sup>Residual error

با اعمال نُرم- $L^2$  روی رابطه‌ی اخیر و به کمک قضیه‌ی ۱.۶، داریم

$$\begin{aligned} \|Y(t) - y(t)\|_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|t^{\alpha-1} * (\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t))\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|t^{\alpha-1}\|_1 \|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |t^{\alpha-1}| dt \|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2. \end{aligned}$$

در نتیجه به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\|Y(t) - y(t)\|_2 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2. \quad (۱.۶)$$

از طرفی  $\lambda > 0$  وجود دارد به طوری که

$$\|f(t, Y(t)) - f(t, y(t))\|_2 \leq \lambda \|Y(t) - y(t)\|_2. \quad (۲.۶)$$

اکنون با توجه به این که  $Y(t)$  جواب دقیق معادله‌ی (۱.۱) است می‌توانیم بنویسیم

$$E(t) = \mathcal{D}^\alpha y(t) - f(t, y(t)) - \left( \mathcal{D}^\alpha Y(t) - f(t, Y(t)) \right),$$

با اعمال نُرم- $L^2$  و به کارگیری (۱.۶) و (۲.۶) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \|E(t)\|_2 &\leq \|\mathcal{D}^\alpha y(t) - \mathcal{D}^\alpha Y(t)\|_2 + \|f(t, Y(t)) - f(t, y(t))\|_2 \\ &\leq \|\mathcal{D}^\alpha y(t) - \mathcal{D}^\alpha Y(t)\|_2 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|E(t)\|_2 \leq K \|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2,$$



به طوری که

$$K = 1 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

از طرفی از قضیه‌ی ۷.۲، می‌دانیم که  $C > 0$  وجود دارد به طوری که

$$\|\mathcal{D}^\alpha Y(t) - \mathcal{D}^\alpha y(t)\|_2 \leq C 2^{-jN},$$

سرانجام به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\|E(t)\|_2 \leq KC 2^{-jN},$$

□

که اثبات را کامل می‌کند.

## ۷. نتایج عددی

در این بخش، کاربرد روش پیشنهادی را با ارائه‌ی دو مثال مورد نقد قرار می‌دهیم. بیشترین مقدار در بردار خطای مطلق<sup>۳۴</sup> (نُرم بی‌نهایت<sup>۳۵</sup>) و خطای جذر میانگین مربعات<sup>۳۶</sup> (RMSE) را به عنوان معیاری برای بررسی میزان نزدیکی جواب عددی به جواب دقیق استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $Y(t)$  و  $y_j(t)$  به ترتیب جواب دقیق و جواب عددی در فضای  $V_j$  باشند. آنگاه

$$e_j(t_i) = |Y(t_i) - y_j(t_i)|, \quad t_i \in [0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\|e_j(t_i)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |Y(t_i) - y_j(t_i)|,$$

<sup>34</sup>Absolute error

<sup>35</sup>Infinity norm

<sup>36</sup>Root-Mean-Square error

$$RMS E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m e_j^2(t_i)}{m}}$$

مثال ۱.۷. ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل کسری خطی

$$D^\alpha y(t) + y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{\Gamma(4-\alpha)}t^{3-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)}t^{4-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.7)$$

را برای  $\alpha = \frac{1}{4}$  با شرط اولیه‌ی  $y(0) = 0$  حل می‌کنیم. جواب دقیق معادله‌ی (۱.۷) به صورت  $y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3$  است [۱].

جدول ۱ نتایج عددی به دست آمده با روش پیشنهادی به ازای  $j = 6$  و همین‌طور جواب دقیق را در بعضی از نقاط نشان می‌دهد. بیشترین مقدار خطای مطلق و خطای جذر میانگین مربعات به ازای سطوح مختلف در جدول ۲ آمده است. هم‌چنین، شکل ۱ نمودار جواب عددی به دست آمده برای  $j = 5$  و جواب دقیق را نشان می‌دهد.

زمان	روش پیشنهادی	جواب دقیق	خطای مطلق
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$2,2226277e-22$
۰/۲۳۴	-۰/۰۰۳۴۲۰۳	-۰/۰۰۳۴۱۹۸	$5,1410152e-07$
۰/۴۸۴	-۰/۰۰۱۷۶۳۵	-۰/۰۰۱۷۷۵۷	$1,2175907e-05$
۰/۷۳۴	۰/۰۹۲۸۶۳۱	۰/۰۹۲۸۲۵۰	$3,8089386e-05$
۰/۹۸۴	۰/۴۶۲۰۹۹۶	۰/۴۶۲۰۲۲۸	$7,6733473e-05$

جدول ۱: نتایج عددی به ازای  $j = 6$  و جواب دقیق در بعضی از نقاط بازه، مثال ۱.۷

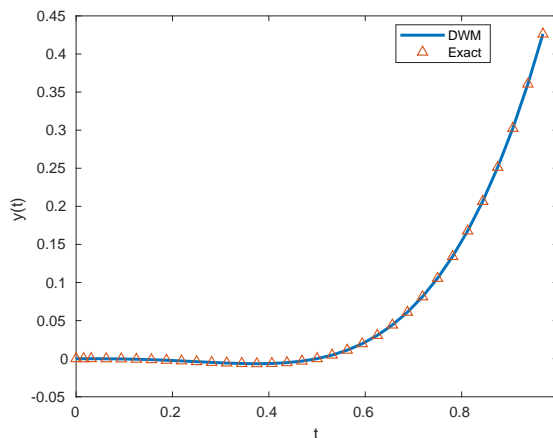
خطا	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
$\ e_j(t)\ _\infty$	$9,47555964e-04$	$2,7797233e-04$	$7,6733473e-05$	$2,0503486e-05$
$RMS E$	$3,9791498e-04$	$1,1602918e-04$	$3,2001780e-05$	$8,5589788e-06$

جدول ۲: خطا در سطوح مختلف، مثال ۱.۷

مثال ۲.۷. اکنون معادله‌ی دیفرانسیل کسری غیرخطی

$$D^\alpha y(t) + y^2(t) = t + \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^2, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (2.7)$$

را به ازای  $\alpha = 1/25$  با شرایط اولیه‌ی  $y(0) = y'(0) = 0$  حل می‌کنیم. جواب دقیق معادله‌ی (۲.۷) به صورت  $y(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$  است [۱].



شکل ۱: نمودار جواب عددی و جواب دقیق برای  $z = 5$ ، مثال ۱.۷

نتایج عددی به دست آمده با روش پیشنهادی برای  $z = 6$  و نیز جواب دقیق در بعضی از نقاط در جدول ۳ نشان داده شده است. بیشترین مقدار خطای مطلق و خطای جذر میانگین مربعات نیز برای چند سطح مختلف در جدول ۴ آمده است. شکل ۲ نمودار جواب عددی در سطح  $z = 5$  و جواب دقیق را نشان می‌دهد.

زمان	روش پیشنهادی	جواب دقیق	خطای مطلق
۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰	$۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰e + ۰۰$
۰٫۲۳۴	۰٫۰۱۵۰۳۹۵	۰٫۰۱۴۹۹۲۹	$۴٫۶۶۰۸۴۳۰e - ۰۵$
۰٫۴۸۴	۰٫۰۷۶۸۳۴۹	۰٫۰۷۶۷۷۹۵	$۵٫۵۳۶۸۳۸۹e - ۰۵$
۰٫۷۳۴	۰٫۱۹۵۸۹۹۱	۰٫۱۹۵۸۴۰۱	$۵٫۹۰۰۵۸۹۷e - ۰۵$
۰٫۹۸۴	۰٫۳۷۸۶۷۲۵	۰٫۳۷۸۶۱۴۹	$۵٫۷۶۵۱۲۸۶e - ۰۵$

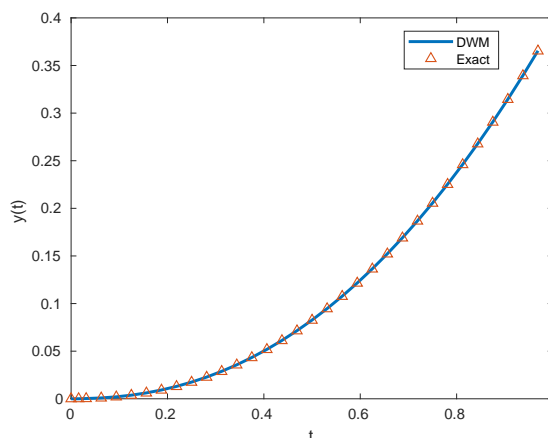
جدول ۳: نتایج عددی به ازای  $z = 6$  و جواب دقیق در بعضی از نقاط بازه، مثال ۲.۷

خطا	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$\ e_j(t)\ _{\infty}$	$۳٫۷۳۵۹۶۳۴e - ۰۳$	$۹٫۴۲۴۷۴۶۳e - ۰۴$	$۲٫۳۶۳۱۴۱۲e - ۰۴$	$۵٫۹۱۶۶۲۳۷e - ۰۵$
$RMS E$	$۲٫۹۵۰۶۰۸۰e - ۰۳$	$۷٫۸۸۴۶۵۸۴e - ۰۴$	$۲٫۰۳۶۰۹۸۶e - ۰۴$	$۵٫۱۷۲۱۷۲۶e - ۰۵$

جدول ۴: خطا در سطوح مختلف، مثال ۲.۷

## مراجع

- [۱] M.S. Al-Sharif, A.I. Ahmed and M.S. Salim, An integral operational matrix of fractional-order chelyshkov functions and its applications, *Symmetry*, ۱۲(۱۱), (۲۰۲۰). ۱۷۵۵
- [۲] R.T. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics, *Journal of Economics*, ۷۳, (۱۹۹۶). ۵۹-۵



شکل ۲: نمودار جواب عددی و جواب دقیق برای  $z = 5$ ، مثال ۲.۷

- [۳] D. Baleanu, B. Shiri, H.M. Srivastava and M. Al Qurashi, A Chebyshev spectral method based on operational matrix for fractional differential equations involving non-singular Mittag-Leffler kernel, *Advances in Difference Equations*, ۳۵۳, (۲۰۱۸), ۲۳-۱
- [۴] A. Cohen, *Numerical Analysis of Wavelet Methods*, Elsevier, Netherlands, ۲۰۰۳
- [۵] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society For Industrial And Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, ۱۹۹۲
- [۶] H. Dutta, A.O. Akdemir and A. Atangana, *Fractional Order Analysis: Theory, Methods and Applications*, Wiley, ۲۰۲۰
- [۷] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Wiley, ۱۹۹۹
- [۸] H. Hashish, S.H. Behiry and N.A. El-Shamy, Numerical integration using wavelets, *Applied Mathematics and Computation*, ۲۱۱(۲), (۲۰۰۹), ۴۸۷-۴۸۰
- [۹] E. Keshavarz and Y. Ordokhani, Bernoulli Wavelets Method for Solution of Fractional Differential Equations in a Large Interval, *Mathematical Researches*, ۲(۱), (۲۰۱۶), ۳۲-۱۷
- [۱۰] A. Kilicman and Z.A.A. Al Zhou, Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications, *Applied Mathematics and Computation*, ۱۸۷, (۲۰۰۷), ۲۶۵-۲۵۰
- [۱۱] J. Liu, X. Li and L. Wu, An Operational Matrix of Fractional Differentiation of the Second Kind of Chebyshev Polynomial for Solving Multiterm Variable Order Fractional Differential Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, ۱, (۲۰۱۶), ۱۰-۱
- [۱۲] F. Mohammadi and C. Cattani, A generalized fractional-order Legendre wavelet Tau method for solving fractional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathe-*

*matics*, ۳۳۹, (۲۰۱۷). ۳۱۶-۳۰۶

- [۱۳] G.W. Pan, *Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling*, Wiley-Interscience, USA, ۲۰۰۳.
- [۱۴] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, ۱۹۹۹.
- [۱۵] S. Qureshi and A. Yusuf, Modeling chickenpox disease with fractional derivatives: from Caputo to Atangana-Baleanu, *Chaos Solitons Fractals*, ۱۲۲, (۲۰۱۹). ۱۱۸-۱۱۱.
- [۱۶] A. Saadatmandi and M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, ۵۹(۳), (۲۰۱۰) -۱۳۲۶-۱۳۳۶.
- [۱۷] A. Saadatmandi, M. Dehghan and M.R. Azizi, The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients, *Commun Non-linear Sci Numer Simulat.*, ۱۷(۱۱), (۲۰۱۲). ۴۱۳۶-۴۱۲۵.
- [۱۸] D. Sierociuk, A. Dzieliński, G. Sarwas, I. Petras, I. Podlubny and T. Skovranek, Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, ۳۷۱(۱۹۹۰), (۲۰۱۳) ۲۰۱۲۰۱۴۶.
- [۱۹] W. Sweldens and R. Piessens, Quadrature formula and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, ۳۱(۴), (۱۹۹۴). ۱۲۶۴-۱۲۴۰.
- [۲۰] D.F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, USA, ۲۰۰۲.
- [۲۱] M. Yi and J. Huang, Wavelet operational matrix method for solving fractional differential equations with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, ۲۳۰, (۲۰۱۴) ۳۹۴-۳۸۳.
- [۲۲] B. Yuttanan and M. Razzaghi, Legendre wavelets approach for numerical solutions of distributed order fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, ۷۰, (۲۰۱۹) ۳۶۴-۳۵۰.
- [۲۳] Y. Zhang, A finite difference method for fractional partial differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, ۲۱۵(۲), (۲۰۰۹). ۵۲۹-۵۲۴.