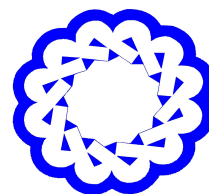


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون

محمداحسان دادکانی^{*}، مریم علی‌پور^{*}، سمانه صردی‌زیدب

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان،
ایران
بگروه پایه، دانشکده صنعت و معدن (خاش)، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان،
ایران

چکیده

در این مقاله، یک روش عددی برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه با مشتق مرتبه کسری ارائه می‌دهیم که دستگاه دینامیکی آن براساس مشتق کسری کاپوتو تعریف شده است. برای این منظور، با استفاده از تابع هامیلتونی و شرایط لازم برای بهینگی، مسئله کنترل بهینه با مشتق مرتبه کسری به یک دستگاه معادلات جبری (غیر) خطی تبدیل می‌شود. برای حل این دستگاه، ابتدا متغیرهای حالت و کنترل مسئله را با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون تقریب می‌زنیم. سپس با استفاده از نقاط کالوکیشن، ضرایب مجهول تقریب‌های دیکسون تعیین می‌شوند که در نتیجه جواب تقریبی مسئله‌ی اصلی به دست خواهد آمد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۸ مهر ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۱۶ خرداد ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱
ادیتور رابط: فاطمه پنجه علی‌بیک

کلمات کلیدی:

مسئله کنترل بهینه، مشتق کسری کاپوتو، چندجمله‌ای دیکسون، تابع هامیلتونی، نقاط کالوکیشن.

در ادامه، نشان می‌دهیم که این جواب تقریبی به جواب بهینه مسئله کنترل بهینه کسری همگراست و کران خطا را برای این جواب‌های تقریبی به دست می‌آوریم. در انتها، روش ارائه شده را برای حل چند مسئله کنترل بهینه کسری با استفاده از نرم‌افزار ممتیکا پیاده‌سازی می‌کنیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که این تقریب علاوه بر این که حل مسئله را ساده‌تر می‌کند، سرعت محاسبات را نیز بهبود می‌بخشد.

۱. مقدمه

از جمله ابزارهای محاسباتی در علوم و ریاضی که امروزه توجه محققان زیادی را به خود جلب نموده است، محاسبات کسری است. لایبنیتز^۱ و ریمان-لیوویل^۲ اولین کسانی بودند که در قرن ۱۹ مطالعاتی را در بحث حساب دیفرانسیل کسری انجام دادند. در دنیای واقعی، سیستم‌های فیزیکی زیادی قابل مشاهده هستند که دینامیک مرتبه کسری را نشان می‌دهند. به عبارتی دیگر، رفتارشان براساس معادلات مرتبه کسری کنترل می‌شود. این پدیده‌های فیزیکی، به دلیل داشتن حافظه و تاثیرات موروثی، با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با قابلیت بهتری نسبت به معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح قابل توصیف و مدل‌بندی هستند. کاربرد محاسبات کسری در دهه‌های اخیر در زمینه‌های مختلف فیزیک و مهندسی، به عنوان مثال در پردازش سیگنال^۳ [۱]، مهندسی کنترل^۴ [۲]، الکترومغناطیس^۵ [۳]، علوم حیاتی^۶ [۴]، مکانیک سیالات^۷ [۵]، الکتروشیمی^۸ [۶]، فرآیندهای پخش^۹ [۷]، دینامیک مواد

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: me.dadkani@gmail.com (محمداحسان دادکانی)، m.alipour@math.usb.ac.ir (مریم علی‌پور)، soradizeid@eng.usb.ac.ir (سمانه سردی‌زید).

<http://doi.org/10.22072/wala.2022.540683.1350>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

¹Leibniz

²Riemann-Liouville

³Signal processing

⁴Control engineering

⁵Electromagnetism

⁶Biosciences

⁷Fluid mechanics

⁸Electrochemistry

⁹Diffusion processes

ویسکوالاستیک^{۱۰} [۸]، مکانیک آماری^{۱۱} [۹]، مکانیک پیوستار^{۱۲} و انتشار شعله کروی^{۱۳} [۱۰] دیده شده است.

محاسبات کسری، تعمیمی از مشتق و انتگرال معمولی اما از مرتبه ناصحیح است که مطالعه روی آن‌ها به موضوع جذابی برای ریاضیدانان تبدیل شده است. برای تابع $f(t)$ ، انتگرال کسری از مرتبه α ($\alpha > 0$) طبق تعریف ریمان-لیوویل، یک نتیجه طبیعی از فرمول معروف کوشی-دریکله^{۱۴} است که n بار محاسبه تابع اولیه $f(t)$ را به یک انتگرال از نوع پیچشی^{۱۵} کاهش داده و به صورت زیر تعریف شده است [۲۴]:

$$I_{a^+}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

حاصل این انتگرال در $t = a$ با مشتق‌هایی از مرتبه ۱، ۲، ...، $n-1$ صفر است. باید توابع $f(t)$ و $I_{a^+}^n$ برای $t < 0$ صفر شوند تا بتوان برای گسترش آن روی هر مقدار حقیقی مثبت، از تابع گاما استفاده کرد. از آنجا که $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، بنابراین قسمت سمت راست انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبه α روی تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

تعریف ریمان-لیوویل از مشتق کسری از مشهورترین تعاریف است که از ترکیب دو تعریف قبل به دست می‌آید:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

عملگر مشتق کسری $D^\alpha f(t)$ را می‌توان توسط انتگرال تبدیل لاپلاس^{۱۶} تعریف کرد. نقطه ضعف مشتق ریمان-لیوویل، عدم کارایی لازم برای مدل‌سازی پدیده‌های جهان واقعی با معادلات دیفرانسیل مرتبه

¹⁰Dynamic of viscoelastic materials

¹¹Statistical mechanics

¹²Continuom mechanics

¹³Propagation of spherical flame

¹⁴Cauchy-Dirichlet

¹⁵Convolution

¹⁶Transform of Laplace integrals

کسری است. به همین دلیل عملگر مشتق کسری دیگری در سال ۱۹۶۷ توسط کاپوتو معرفی شد که در کارش روی قضیه کشسان لزج^{۱۷} استفاده کرد [۱۱]. وی دو سال بعد این عملگر مشتق کسری را به صورت زیر بیان کرد [۱۲]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

پژوهش‌هایی که در زمینه محاسبات کسری در علوم مختلف انجام شده است، بیانگر این موضوع است که اکثر پدیده‌های فیزیکی که با سیستم‌های دینامیک کسری تعریف شده‌اند به عملکرد واقعی این پدیده‌ها در طبیعت نزدیک‌ترند. پدیده‌های فیزیکی حافظه دار و دارای خاصیت وراثت از جمله مواردی هستند که با کمک معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری قابل توصیف هستند. همچنین، به علت رفتار این سیستم‌ها و نحوه پایداری آن‌ها برای مدل کردن اکثر پدیده‌های فیزیکی پایدار که به صورت غیرنمایی زوال می‌یابند، از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده می‌شود [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶].

مقصود از کنترل بهینه سیستم‌های کسری، یافتن یک تابع کنترلی است که تابع هدف مسئله را به شرط برآورده کردن قیود دیفرانسیل مرتبه کسری، بهینه کند. یک مسئله کنترل بهینه با سیستم کسری به فرم کلی زیر است [۱۷]:

$$\begin{aligned} \min J(x, u) &= \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{s.t. } {}_{t_0} D_t^\alpha x(t) &= g(t, x(t), u(t)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f],$$

که در آن $g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ، $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ توابع برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند و t_0 ، t_f و x_0 مقادیر حقیقی و ثابت فرض می‌شوند و $0 < \alpha < 1$ مرتبه مشتق کسری است.

قضیه ۱.۱.۱. [۳۴، ۳۵] فرض کنید $0 < \alpha < 1$ و $p \geq 1$. اگر

(۱) تابع $g(., x, u)$ روی بازه $[t_0, t_f]$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u \in U$ اندازه‌پذیر باشد، $g(t, x, .)$ به ازای $x \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [t_0, t_f]$ روی U پیوسته باشد؛

(۲) $N > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $|g(t, x_1, u) - g(t, x_2, u)| \leq N|x_1 - x_2|$ ، به ازای $u \in U$ و $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [t_0, t_f]$

(۳) $r(.) \in L^p([t_0, t_f], \mathbb{R})$ و $\gamma \geq 0$ وجود داشته باشند به طوری که $|g(t, \circ, u)| \leq r(t) + \gamma|u|$ ، به ازای $u \in U$ و $t \in [t_0, t_f]$

آنگاه مسئله (۱.۱) متناظر با هر کنترل $u(.) \in L^p([t_0, t_f], U)$ یک جواب یکتای $x(.)$ دارد.

قرار می‌دهیم $\mathbb{U} = \{u \in L^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m); u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]\}$. آنگاه تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۲.۱. $(x^*, u^*) \in I_{t_0^+}^\alpha(L^p) \times \mathbb{U}$ ، $1 < p < \infty$ ، یک جواب بهینه برای مسئله (۱.۱) است اگر x^* در قید دینامیکی کسری این مسئله با شرط اولیه داده شده، به ازای کنترل متناظر u^* صدق کند و به ازای هر جواب شدنی $(x, u) \in I_{t_0^+}^\alpha(L^p) \times \mathbb{U}$ از این مسئله داشته باشیم:

$$J(x^*, u^*) \leq J(x, u).$$

یافتن شرایط لازم و کافی برای وجود جواب مسائل کنترل بهینه با مشتق از مرتبه صحیح، از جمله مباحثی است که تاکنون بسیار مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات اوایلر-لاگرانژ^{۱۸}، معادله هامیلتونی-ژاکوبی-بلمن^{۱۹} و اصل بیشینه پونتریاگین^{۲۰} از جمله شرایطی است که برای حل مسائل کنترل بهینه با مشتق مرتبه صحیح معرفی شده‌اند. در اکثر این روش‌ها، حل مسئله کنترل بهینه به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود که غالباً روش‌های تحلیلی برای حل آن‌ها موجود است. اما در مورد مسائل کنترل بهینه کسری، به دلیل پیچیدگی مشتق مرتبه کسری، بیشتر روش‌های ذکر شده

¹⁸Euler-Lagrange

¹⁹Hamilton-Jacobi-Bellman

²⁰Pontryagin maximum principle

برای یافتن جواب بهینه، روش‌های تقریبی هستند [۱۸]. تاکنون تقریب‌های بسیاری بر پایه چندجمله‌ای‌ها مانند ژاکوبی [۱۹]، لژاندر [۲۰]، لاگر [۲۱] و آنالیز هموتوبی [۲۲] برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری استفاده شده است. مشکل عمده این روش‌ها، پیچیدگی محاسباتی بالا می‌باشد. در این مقاله می‌خواهیم یک روش جدید برای حل مسئله (۱.۱) بیان کنیم که بر اساس چندجمله‌ای دیکسون پایه‌ریزی شده است. این امر به دلیل سهولت استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون برای حل این نوع از مسائل پیشنهاد شده است. برای این منظور، ابتدا شرایط لازم برای بهینگی مسائل کنترل بهینه کسری توسعه داده می‌شود. سپس با استفاده از پایه‌های چندجمله‌ای دیکسون، متغیرهای حالت و کنترل مسئله اصلی را تقریب می‌زنیم. با تعیین ماتریس عملیاتی مشتق کسری برای این چندجمله‌ای‌ها، شرایط مفروض بهینگی به یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می‌شود که با حل این دستگاه، جواب مسئله کنترل بهینه کسری بدست می‌آید. نتایج عددی به دست آمده، سادگی و سرعت محاسبات را به خوبی نشان می‌دهند.

۲. چندجمله‌ای‌های دیکسون

چندجمله‌ای‌های دیکسون برای اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط لیدل و همکارانش^{۲۱} [۲۳] معرفی شدند. این چندجمله‌ای‌ها روی یک حلقه تغییرپذیر مانند \mathbb{R} تعریف می‌شوند به گونه‌ای که اگر $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط باشد، آنگاه این چندجمله‌ای‌ها با چندجمله‌ای‌های چبیشف^{۲۲} برابر خواهند شد. برای عدد صحیح $m \geq 1$ و مقادیر مختلف ρ در بازه‌های کراندار، چندجمله‌ای‌های دیکسون از مرتبه m به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵، ۲۶]:

$$\mathbb{D}_m(t, \rho) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m}{m-i} \binom{m-i}{i} (-\rho)^i t^{(m-2i)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.2)$$

که در آن، $\mathbb{D}_0(t, \rho) = 2$ و $\mathbb{D}_1(t, \rho) = t$. علاوه بر این، برای $m > 1$ رابطه بازگشتی زیر برای این چندجمله‌ای‌ها برقرار خواهد بود:

$$\mathbb{D}_m(t, \rho) = t\mathbb{D}_{m-1}(t, \rho) - \rho\mathbb{D}_{m-2}(t, \rho), \quad m \geq 2. \quad (2.2)$$

²¹Lidel et al.

²²Chebyshev polynomials

چندجمله‌ای‌های دیکسون در معادله دیفرانسیلی به صورت زیر نیز صدق می‌کنند:

$$(t^2 - 4\rho)x'' + tx' - m^2x = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

که تابع مولد آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{D}_m(t, \rho) v^m = \frac{2 - tv}{1 - tv + \rho v^2}. \quad (4.2)$$

۳. روش محاسباتی و آنالیز همگرایی

در این بخش، ابتدا شرایط لازم برای بهینگی جواب مسئله کنترل بهینه کسری (۱.۱) را به دست می‌آوریم و سپس با بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌های دیکسون، جواب بهینه این مسئله را با حل تقریبی شرایط لازم بهینگی محاسبه خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا قضیه اساسی این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳ [۲۷] فرض کنید $(x, u) \in I_{t_0^+}^{\alpha}(L^p) \times \mathbb{U}$ تحت شرایط قضیه ۱.۱، یک جواب کمینه برای مسئله کنترل بهینه کسری (۱.۱) باشد. آنگاه، ضربگر لاگرانژ $\lambda(t)$ وجود دارد به طوری که سه‌تایی (x, u, λ) در دستگاه معادلات زیر با مشتق‌های مرتبه کسری صدق می‌کند:

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t) = g(t, x(t), u(t)), \\ {}_tD_{t_f}^{\alpha} \lambda(t) = \partial_x H(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \\ \partial_u H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \\ x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda^T(t)g(t, x(t), u(t)),$$

تابع هامیلتونی نامیده می‌شود و $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ برداری از ضرایب لاگرانژ است.

اکنون، برای یافتن جواب‌های عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۳)، توابع مجهول $x(t)$ و $u(t)$ را با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$x(t) \simeq x_M(t) = \sum_{i=0}^M x_i \mathbb{D}_i(t, \rho), \quad u(t) \simeq u_M(t) = \sum_{i=0}^M u_i \mathbb{D}_i(t, \rho), \quad (2.3)$$

که در آن، x_i و u_i ، $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ، ضرایب مجهول تقریب‌های دیکسون هستند. برای یافتن این مجهولات از نقاط کالوکیشن زیر استفاده خواهیم کرد $(t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = t_f)$:

$$t_j = t_0 + \left(\frac{t_f - t_0}{M}\right)j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (3.3)$$

تقریب‌های (۲.۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$x_M(t) = \mathbb{D}(t, \rho)X = Y(t)K(\rho)X, \quad (4.3)$$

$$u_M(t) = \mathbb{D}(t, \rho)U = Y(t)K(\rho)U,$$

که در آن $X = [x_0, x_1, \dots, x_M]^T$ ، $U = [u_0, u_1, \dots, u_M]^T$ و $Y(t) = [1, t, t^2, \dots, t^M]$. بعلاوه، اگر M عددی زوج باشد آنگاه داریم:

$$K^T(\rho) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots \\ \ddots & \frac{1}{\Gamma(\cdot)(-\rho)^0} & \ddots & \ddots & \dots & \ddots \\ \frac{\ddots}{\Gamma(\cdot)(-\rho)^1} & \ddots & \frac{\ddots}{\Gamma(\cdot)(-\rho)^0} & \ddots & \dots & \ddots \\ \ddots & \frac{\ddots}{\Gamma(\cdot)(-\rho)^1} & \ddots & \frac{\ddots}{\Gamma(\cdot)(-\rho)^0} & \dots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{M}{M\Gamma} \frac{(M/\gamma)}{(M/\gamma)} (-\rho)^{M/\gamma} & \ddots & \frac{M}{(M/\gamma+1)} \frac{(M/\gamma+1)}{(M/\gamma-1)} (-\rho)^{(M/\gamma)-1} & \ddots & \dots & \frac{M}{M} \frac{(M)}{(\cdot)} (-\rho)^0 \end{bmatrix},$$

و اگر M عددی فرد باشد خواهیم داشت:

$$K^T(\rho) = \begin{bmatrix} \ddot{} & \ddot{} & \ddot{} & \ddot{} & \dots & \ddot{} \\ \ddot{} & \ddot{}(-\rho)^\circ & \ddot{} & \ddot{} & \dots & \ddot{} \\ \ddot{}(-\rho)^1 & \ddot{} & \ddot{}(-\rho)^\circ & \ddot{} & \dots & \ddot{} \\ \ddot{} & \ddot{}(-\rho)^1 & \ddot{} & \ddot{}(-\rho)^\circ & \dots & \ddot{} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{} & \frac{M}{\Gamma(M/\gamma)} \binom{M/\gamma}{[M/\gamma]} (-\rho)^{[M/\gamma]} & \ddot{} & \frac{M}{\Gamma(M/\gamma+1)} \binom{M/\gamma+1}{[M/\gamma]-1} (-\rho)^{[M/\gamma]-1} & \dots & \frac{M}{M} \binom{M}{\circ} (-\rho)^\circ \end{bmatrix}.$$

همچنین، برای تقریب مشتق کسری $D^\alpha x(t)$ ، $0 < \alpha \leq 1$ ، داریم:

$$D^\alpha x(t) \simeq D^\alpha x_M(t) = D^\alpha Y(t)K(\rho)X, \quad (5.3)$$

که در آن $D^\alpha Y(t) = t^{-\alpha}Y(t)B(\alpha)$ و

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \circ & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \frac{\Gamma(M+1)}{\Gamma(M+1-\alpha)} \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix}.$$

اکنون برای یافتن جواب تقریبی مسئله (۱.۱)، با جایگذاری تقریب‌های به دست آمده از چندجمله‌ای‌های دیکسون در شرایط لازم بهینگی (۱.۳)، به یک دستگاه معادلات جبری خواهیم رسید. از آنجایی که مسئله (۱.۱) دارای جواب یکتا است، لذا شرایط وجود جواب در قضیه ۱.۱ ایجاب می‌کند که این دستگاه جواب داشته باشد. دستگاه معادلات جبری به دست آمده در این قسمت از مساله، مستقیماً توسط نرم افزار متمتیکا و دستورات لازم در این نرم افزار (دستور solve) حل می‌شود تا تقریب مناسبی از جواب مسئله کنترل بهینه کسری به دست آید. جزئیات محاسباتی این روش، در بخش مثال‌های عددی به طور مبسوط مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

در ادامه، ثابت می‌کنیم که این جواب تقریبی به جواب بهینه مسئله (۱.۱) همگراست. بدون از دست

دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $t_0 = 0$ و $t_f = 1$.

لم ۲.۳. فرض کنید $f_M(t)$ تقریب دیکسون از مرتبه M برای تابع $f(t) \in L^2[0, 1]$ باشد، یعنی $f_M(t) = \sum_{k=0}^M c_k \mathbb{D}_k(t, \rho)$. در این صورت، اگر $e_M(t) = \|f(t) - f_M(t)\|$ ، آنگاه $\lim_{M \rightarrow \infty} e_M(t) = 0$.

اثبات. ابتدا بازه $[0, 1]$ را به زیربازه‌های دلخواه $[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]$ ، $n = 1, 2, \dots, N$ ، تقسیم می‌کنیم به گونه‌ای که f_n تقریبی برای تابع f روی این زیربازه‌ها باشد. به عبارت دیگر، $f(t) \simeq \sum_{n=1}^N f_n(t)$. همچنین فرض کنید P_M فضای چندجمله‌ای‌های دیکسون از درجه حداکثر M باشد. با استفاده از بسط تیلور می‌توان تقریب تابع $f(t)$ را خارج از فضای P_M به صورت زیر به دست آورد:

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^M \frac{(t - \frac{n-1}{N})^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\frac{n-1}{N}).$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{(t - \frac{n-1}{N})^{M+1}}{\Gamma(M+2)} |f^{(M+1)}(\xi)|, \quad \xi \in [\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}].$$

فرض کنید $f_M(t) = \sum_{k=0}^M c_k \mathbb{D}_k(t, \rho)$ بهترین تقریب برای تابع $f(t)$ باشد. طبق قضیه همگرایی چندجمله‌ای‌های دیکسون [۲۸] داریم:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_M(t)\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t) - f_M(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} |f(t) - f_M(t)|^2 dt \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \leq \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} |f^{(M+1)}(\xi)|^2 \left(\frac{(t - \frac{n-1}{N})^{M+1}}{(M+1)!}\right)^2 dt \\ &\leq \frac{L^2}{(2M+3)((M+1)!)^2 N^{2(M+1)}}, \end{aligned}$$

که در آن $L = \max_{t \in [0, 1]} |f^{(M+1)}(t)|$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\|f(t) - f_M(t)\|_2 \leq \frac{L}{(M+1)! N^{M+1}} \sqrt{\frac{1}{(2M+3)}}. \quad (۶.۳)$$

زمانی که M به اندازه کافی افزایش پیدا کند، خطای محاسبه شده به سرعت به صفر نزدیک می‌شود. این نتیجه نشان می‌دهد که f_M به f همگرا است. □

یک نتیجه مستقیم از لم ۲.۳ آن است که جواب‌های تقریبی $x_M(t)$ و $u_M(t)$ که در رابطه (۲.۳) تعریف شده‌اند، به ترتیب به مقادیر $x(t)$ و $u(t)$ همگرا خواهند شد.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $f(t) \in C^{(M+1)}[0, 1]$. کران خطا برای عملگر مشتق کسری کاپوتو و به ازای $0 < \alpha \leq 1$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\|D^\alpha f(t) - D^\alpha f_M(t)\|_2 \leq \frac{L}{\Gamma(2-\alpha)(M+1)!N^{(M+1)}\sqrt{2M+3}}. \quad (7.3)$$

اثبات. می‌دانیم $\|I^\alpha f(t)\|_2 \leq \frac{1}{\alpha!}\|f(t)\|_2$ ، $t \in [0, 1]$. [۲۹]. با توجه به لم ۲.۳ و رابطه بین عملگرهای مشتق و انتگرال مرتبه کسری، $D^\alpha f(t) = I^{1-\alpha} \dot{f}(t)$ ، نتیجه فوق حاصل می‌شود. □

قضیه ۴.۳. [۳۰] فرض کنید (x, u) جواب بهینه مسئله کنترل بهینه کسری (۱.۱) باشد که از حل دستگاه معادلات کسری (۱.۳) به دست می‌آید. می‌توان شرایط قضیه ۱.۳ را به ازای تابع ثابت $\lambda(t)$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = P(t, x(t), \lambda(t)), \\ {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda(t) = Q(t, x(t), \lambda(t)), \\ x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

که در آن $P(\cdot)$ و $Q(\cdot)$ توابع مشخصی بر حسب $x(t)$ و $\lambda(t)$ هستند.

در حالت خاص، اگر مسئله کنترل بهینه کسری (۱.۱) به فرم خطی درجه دوم^{۲۳} زیر باشد:

$$\min J(x, u) = \int_0^1 (p(t)x^\gamma(t) + q(t)u^\gamma(t))dt,$$

$$s.t. \quad {}_0D_t^\alpha x(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t),$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1],$$

که در آن $p(t) \geq 0$ و $q(t) > 0$ ، آنگاه دستگاه معادلات (۸.۳) برای این مسئله به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) = a(t)x(t) - q^{-1}(t)b^\gamma(t)\lambda(t), \\ {}_tD_t^\alpha \lambda(t) = p(t)x(t) + a(t)\lambda(t), \\ x(0) = x_0, \quad \lambda(1) = 0. \end{cases}$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید $x(t)$ و $\lambda(t)$ جواب‌های دقیق مسئله (۱.۱) باشند که در دستگاه معادلات کسری (۸.۳) صدق می‌کنند و $x(t), \lambda(t) \in C^{(M+2)}[0, 1]$. بعلاوه، فرض کنید $x_M(t)$ و $\lambda_M(t)$ تقریب چندجمله‌ای‌های دیکسون برای $x(t)$ و $\lambda(t)$ هستند. اگر $P(t, x(t), \lambda(t))$ و $Q(t, x(t), \lambda(t))$ توابع لیب‌شیتز به ترتیب با ثابت‌های لیب‌شیتز P_i و Q_i ، $i = 1, 2$ ، باشند، آنگاه کران خطا برای جواب‌های تقریبی دستگاه (۸.۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|E_1\|_2 &\leq \frac{(P_1 L_1 + P_2 L_2) + \frac{L_1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}}{(M+1)! N^{(M+1)} \sqrt{2M+3}}, \\ \|E_2\|_2 &\leq \frac{(Q_1 L_1 + Q_2 L_2) + \frac{L_2}{\Gamma(\gamma-\alpha)}}{(M+1)! N^{(M+1)} \sqrt{2M+3}}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

که در آن،

$$L_1 = \max |x^{(M+2)}(t)|, \quad L_2 = \max |\lambda^{(M+2)}(t)|; \quad t \in [0, 1],$$

²³Linear quadratic

دادگانی، علی پور، سردی زید/ موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۷۷-۵۱

$$E_1 = {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) - P(t, x(t), \lambda(t)) - ({}_{t_0}D_t^\alpha x_M(t) - P(t, x_M(t), \lambda_M(t))),$$

$$E_2 = {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda(t) - Q(t, x(t), \lambda(t)) - ({}_tD_{t_f}^\alpha \lambda_M(t) - Q(t, x_M(t), \lambda_M(t))).$$

اثبات. با استفاده از روابط (۶.۳)، (۷.۳) و قضیه ۴.۳، کران‌های (۹.۳) حاصل می‌شوند. □

قضیه ۶.۳. جواب‌های $x_M(t)$ و $u_M(t)$ که جواب‌های تقریبی مسئله (۱.۳) هستند با افزایش مقدار M ، به ترتیب به جواب‌های بهینه $x^*(t)$ و $u^*(t)$ همگرا خواهند شد.

اثبات. فرض کنید W_M مجموعه تمام $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{D}_M(., \rho)$ باشد که در آن \bar{x} و \bar{u} در روابط (۱.۳) صدق می‌کنند. همچنین فرض کنید W مجموعه تمام زوج‌های قابل قبول به صورت $(x(.), u(.))$ باشد که در محدودیت‌های مسئله (۱.۱) صدق می‌کنند. اگر (\bar{x}, \bar{u}) جواب بهینه مسئله (۱.۱) باشد، آنگاه واضح است که $(\bar{x}, \bar{u}) \in W$. در این صورت، با توجه به این واقعیت که تقریب چندجمله‌ای‌های دیکسون برای هر تابع پیوسته به طور یکنواخت به آن تابع همگراست، به ازای $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{D}_M(., \rho)$ زوج $(x^*, u^*) \in W$ موجود است به طوری که وقتی $M \rightarrow \infty$ ،

$$(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{D}_M(., \rho) \longrightarrow (x^*, u^*).$$

□

۴. نتایج عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده، چند مسئله کنترل بهینه کسری به فرم کلی (۱.۱) را حل کرده و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از سایر روش‌های تقریبی مقایسه می‌کنیم. برای این منظور، با به دست آوردن دستگاه معادلات (۱.۳) برای هر مسئله، جواب‌های عددی سیستم‌های کسری حاصل، با استفاده از روش گفته شده در بخش قبل تعیین می‌شوند. همچنین لازم به ذکر است در هر مسئله‌ای که جواب دقیق داشته باشیم، خطای مطلق با استفاده از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$E(t) = \int_{t_0}^{t_f} (x(t) - x^*(t))^2 dt, \quad (1.4)$$

که در آن $x^*(t)$ جواب دقیق و $x(t)$ جواب تقریبی دستگاه معادلات (۱.۳) است. نتایج به‌دست آمده، کارآمد بودن روش را به خوبی نشان می‌دهند.

مثال ۱.۴. مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min}J(t, x, u) = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 [x^\gamma(t) + u^\gamma(t)] dt, \quad (2.4)$$

$${}_0D_t^\alpha x(t) = tx(t) + u(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad t \in [0, 1],$$

$$x(0) = 1.$$

تابع هامیلتونی متناظر با این مسئله عبارت است از:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{\gamma} [x^\gamma(t) + u^\gamma(t)] + \lambda^T(t) [tx(t) + u(t)].$$

از این‌رو، شرایط لازم بهینگی برای مسئله فوق با استفاده از قضیه ۱.۳، به صورت دستگاه معادلات کسری زیر به‌دست می‌آید:

$${}_0D_t^\alpha x(t) = tx(t) + u(t),$$

$${}_tD_1^\alpha \lambda(t) = x(t) + t\lambda(t),$$

$$u(t) = -\lambda(t),$$

$$x(0) = 1, \quad \lambda(1) = 0. \quad (3.4)$$

اکنون با توجه به قضیه ۴.۳ و رابطه $u(t) = -\lambda(t)$ ، شرایط (۳.۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$${}_0D_t^\alpha x(t) = tx(t) - \lambda(t),$$

$${}_tD_1^\alpha \lambda(t) = x(t) + t\lambda(t),$$

$$x(0) = 1, \quad \lambda(1) = 0. \quad (4.4)$$

حال، تقریب چندجمله‌ای‌های دیکسون را برای توابع مجهول این دستگاه معادلات کسری و به ازای $M = ۶$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_M(t) = \sum_{i=0}^6 x_i \mathbb{D}_i(t, \rho), \quad \lambda_M(t) = \sum_{i=0}^6 \lambda_i \mathbb{D}_i(t, \rho), \quad (۵.۴)$$

که در آن،

$$\mathbb{D}_0(t, \rho) = ۲, \quad \mathbb{D}_1(t, \rho) = t,$$

$$\mathbb{D}_2(t, \rho) = t^2 - ۲\rho,$$

$$\mathbb{D}_3(t, \rho) = t(t^2 - ۲\rho) - t\rho,$$

$$\mathbb{D}_4(t, \rho) = -(t^2 - ۲\rho)\rho + t(t(t^2 - ۲\rho) - t\rho),$$

$$\mathbb{D}_5(t, \rho) = t(\rho(۲\rho - t^2) + t(t(t^2 - ۲\rho) - \rho t)) - \rho(t(t^2 - ۲\rho) - \rho t),$$

$$\mathbb{D}_6(t, \rho) = t(t(\rho(۲\rho - t^2) + t(t(t^2 - ۲\rho) - \rho t)) - \rho(t(t^2 - ۲\rho) - \rho t)) - \rho(\rho(۲\rho - t^2) + t(t(t^2 - ۲\rho) - \rho t)).$$

همچنین داریم:

$$K^T(\rho) = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲\rho & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳\rho & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \rho^2 & ۰ & -۴\rho & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴\rho^2 & ۰ & -۵\rho & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲\rho^3 & ۰ & ۹\rho^2 & ۰ & -۶\rho & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بعلاوه، $Y(t) = [1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6]$ و

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \circ & \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

با جایگذاری نتایج به‌دست آمده در شرایط لازم بهینگی (۴.۴)، دستگاه معادلات جبری زیر به ازای $X = [x_0, x_1, \dots, x_6]^T$ و $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_6]^T$ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x_1 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{2x_2 t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{6x_3 t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24x_4 t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{120x_5 t^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} + \frac{720x_6 t^{6-\alpha}}{\Gamma(7-\alpha)} \quad (۶.۴) \\
 & - t(x_2(t^\gamma - 2\rho) + x_3(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t) + x_4(\rho(2\rho - t^\gamma) \\
 & + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) + x_5(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) \\
 & - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) + x_6(t(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) \\
 & - \rho(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) + x_1 t + 2x_0 + \lambda_2(t^\gamma - 2\rho) + \lambda_3(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t) \\
 & + \lambda_4(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) + \lambda_5(t(\rho(2\rho - t^\gamma) \\
 & + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) + \lambda_6(t(t(\rho(2\rho - t^\gamma) \\
 & + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) - \rho(\rho(2\rho - t^\gamma) \\
 & + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) + \lambda_1 t + 2\lambda_0 = 0, \\
 & - x_2(t^\gamma - 2\rho) - x_3(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t) - x_4(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) \\
 & - x_5(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) \\
 & - x_6(t(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) \\
 & - \rho(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - x_1 t - 2x_0 - t(\lambda_2(t^\gamma - 2\rho) \\
 & + \lambda_3(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t) + \lambda_4(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) \\
 & + \lambda_5(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) \\
 & + \lambda_6(t(t(\rho(2\rho - t^\gamma) + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) - \rho(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t)) - \rho(\rho(2\rho - t^\gamma) \\
 & + t(t(t^\gamma - 2\rho) - \rho t))) + \lambda_1 t + 2\lambda_0 - \frac{\lambda_1(1-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2\lambda_2(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
 & - \frac{6\lambda_3(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{24\lambda_4(1-t)^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{120\lambda_5(1-t)^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} - \frac{720\lambda_6(1-t)^{6-\alpha}}{\Gamma(7-\alpha)} = 0.
 \end{aligned}$$

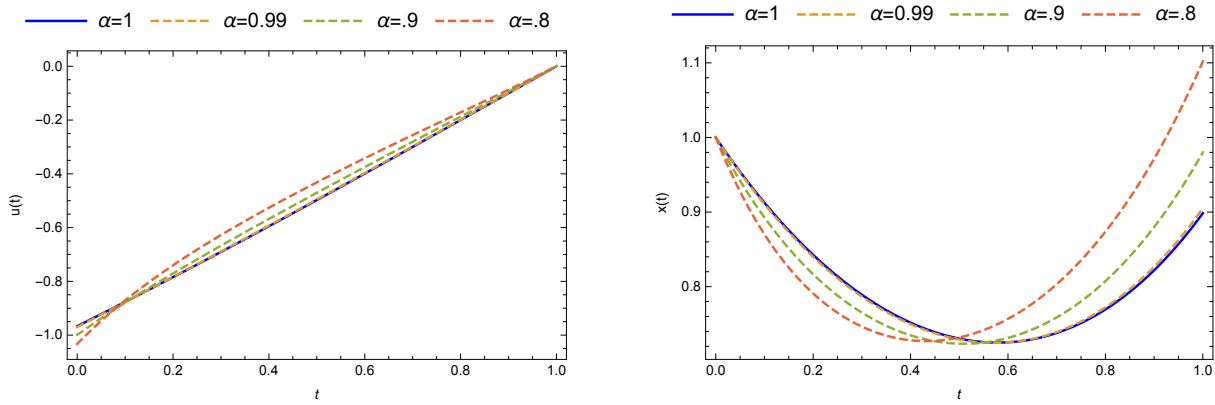
جدول ۱: نتایج عددی J_M به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۱.۴.

$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 1$	تکرار
۰.۴۶۵۹۶۰	۰.۴۷۴۴۲۹	۰.۴۸۳۲۴۸	۰.۴۸۴۲۶۵	$M = 5$
۰.۴۶۵۳۹۸	۰.۴۷۴۳۴۸	۰.۴۸۳۲۰۶	۰.۴۸۴۲۶۲	$M = 6$
۰.۴۶۰۷۱۳	۰.۴۷۳۰۰۹	۰.۴۸۳۱۲۸	۰.۴۸۴۲۶۱	$M = 7$
۰.۴۶۶۹۷	۰.۴۷۵۸۸	۰.۴۸۳۴۶	۰.۴۸۴۲۶	روش [۳۱]
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	تکرار
۱.۱۱۰۱۵	۰.۹۳۶۶۸۹	۰.۷۵۸۷۴۱	۰.۵۲۱۸۴۶	$M = 6$

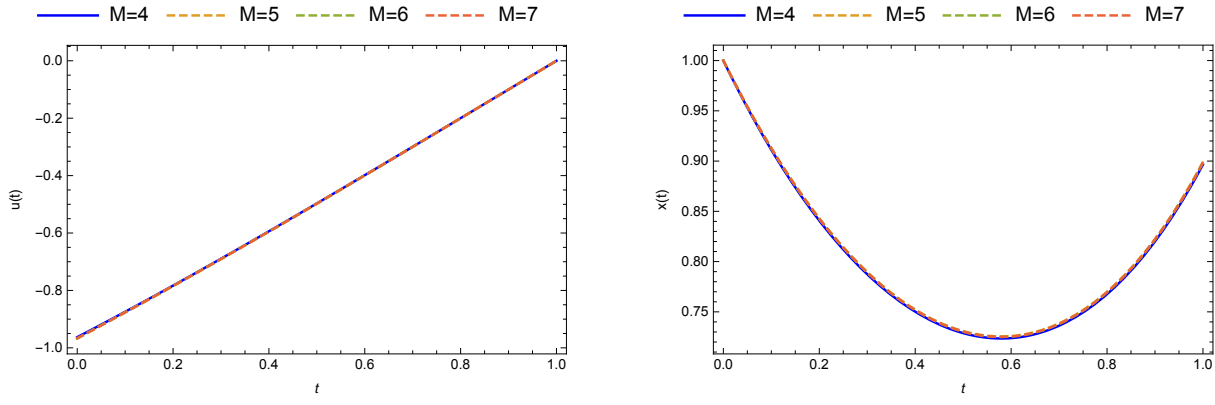
اکنون با استفاده از رابطه (۳.۳) و با فرض $M = 6$ ، نقاط کالوکیشن به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{6}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{2}, t_4 = \frac{2}{3}, t_5 = \frac{5}{6}, t_6 = 1\}.$$

با جایگذاری این نقاط در دستگاه معادلات (۶.۴) و استفاده از شرایط اولیه و نهایی $x(0) = 1$ و $\lambda(1) = 0$ ، می‌توان ضرایب مجهول x_i و λ_i ، $i = 0, 1, \dots, 6$ ، را به دست آورد. به این ترتیب مقادیر تقریبی $x(t)$ و $\lambda(t)$ مشخص خواهند شد. سپس با استفاده از رابطه $u(t) = -\lambda(t)$ ، مقدار تقریبی تابع کنترل نیز تعیین می‌شود. این مسئله جواب دقیق ندارد اما در جدول ۱، مقادیر تقریبی محاسبه شده برای تابع هدف مسئله (۲.۴) به ازای $\rho = 0$ و انتخاب‌های مختلف M و α در مقایسه با نتایج به دست آمده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی [۳۱] گزارش داده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهند که با استفاده از روش معرفی شده در این مقاله، مقادیر کمتری برای تابع هدف J_M ، به ازای مقادیر مختلف M و α به دست می‌آید. همچنین، مقادیر تابع هدف به ازای $M = 6$ و $\alpha = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7$ نیز در این جدول نشان داده شده است. پرواضح است زمانی که $\alpha \rightarrow 0^+$ ، مقدار تابع هدف بزرگتر می‌شود. بنابراین، پیشنهاد می‌شود برای رسیدن به کمترین مقدار تابع هدف (جواب بهینه) در این مثال، $\alpha = 0.8$ باشد. نمودارهای تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ با فرض $M = 6$ و مقادیر مختلف α در شکل ۱ رسم شده‌اند. شکل ۲، همگرایی مقادیر تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ را به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف $M = 4, 5, 6, 7$ نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده، کارآمدی روش عددی را به خوبی نشان می‌دهند.



شکل ۱: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۱.۴.



شکل ۲: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف M برای مثال ۱.۴.

مثال ۲.۴. مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$MinJ(u(\cdot)) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^1 ((x(t) - t^2)^2 + (u(t) - t + 1)^2) dt, \quad (7.4)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x(t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} [x(t) - tu(t)], \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

جواب دقیق این مسئله با فرض $\alpha = ۱$ عبارت است از:

$$x^*(t) = t^2, \quad u^*(t) = t - ۱.$$

می‌خواهیم روش مطرح شده در بخش قبل را برای حل این مسئله اعمال کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع هامیلتونی مسئله کنترل بهینه کسری (۷.۴)-(۸.۴) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{4}[(x(t) - t^2)^2 + (u(t) - t + ۱)^2] + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \lambda^T [x(t) - tu(t)].$$

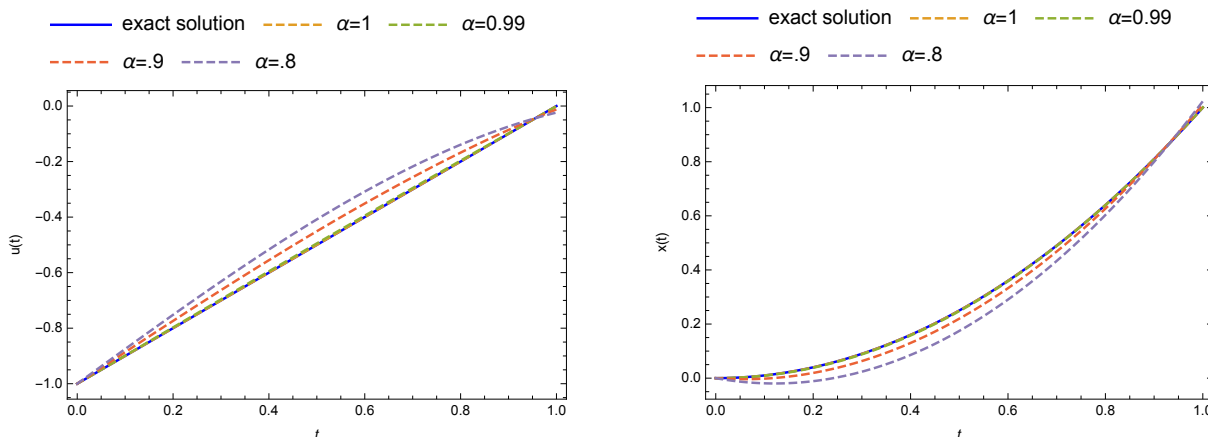
با استفاده از قضیه ۱.۳، شرایط لازم بهینگی برای مسئله فوق به صورت دستگاه معادلات کسری زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x(t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} [x(t) - tu(t)], \\ {}_tD_t^\alpha \lambda(t) &= x(t) - t^2 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \lambda(t), \\ u(t) &= t - ۱ + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} t \lambda(t), \\ x(0) &= 0, \quad \lambda(1) = 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

با انتخاب $\rho = 0$ و با اعمال روش مطرح شده در بخش قبل، مقادیر تقریبی تابع هدف به ازای انتخاب‌های مختلف α و $M = 2$ در جدول ۲ ارائه شده است. نتایج موجود در این جدول نشان می‌دهند که حتی با انتخاب مقدار کوچکی برای M ، جواب تقریبی به ازای $\alpha = ۱$ با جواب دقیق منطبق می‌شود. بعلاوه، این نتایج نشان می‌دهند که با نزدیک شدن α به مقدار یک، مقدار تابع هدف به مقدار جواب واقعی مسئله همگرا شده است اما زمانی که $\alpha \rightarrow 0^+$ همان‌طور که انتظار می‌رود از دقت جواب‌ها کاسته شده است. لذا، در این مثال، $\alpha = ۱$ بهترین انتخاب برای رسیدن به جواب بهینه است. نمودارهای تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ که به ازای مقادیر مختلف α و $M = 2$ در شکل ۳ رسم شده‌اند، همگرایی جواب‌ها را به خوبی نشان می‌دهند.

جدول ۲: نتایج عددی J_M به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۲.۴.

$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 1$	تکرار
3.56659×10^{-3}	8.38224×10^{-4}	8.44912×10^{-6}	۰	$M = 2$
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	
1.27449×10^{-1}	1.09132×10^{-1}	3.56014×10^{-2}	9.1165×10^{-3}	$M = 2$



شکل ۳: جواب‌های دقیق و تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۲.۴.

مثال ۳.۴. به عنوان یک مسئله کنترل بهینه کسری دوبردی، تابع هدف زیر را در نظر بگیرید:

$$MinJ(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt, \quad (10.4)$$

به طوری که سیستم دینامیکی

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ D_t^\alpha x_2(t) &= -2x_2(t), \end{aligned} \quad (11.4)$$

در شرایط اولیه زیر صدق کند:

$$x_1(0) = x_2(0) = 1. \quad (12.4)$$

شرایط لازم بهینگی برای این مسئله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \circ D_t^\alpha x_1(t) + x_1(t) - x_2(t) + \lambda_1(t) &= \circ, \\ \circ D_t^\alpha x_2(t) + 2x_2(t) &= \circ, \\ t D_t^\alpha \lambda_1(t) + \lambda_1(t) - x_1(t) &= \circ, \\ t D_t^\alpha \lambda_2(t) + 2\lambda_2(t) - \lambda_1(t) - x_2(t) &= \circ, \\ u(t) + \lambda_1(t) &= \circ, \\ x_1(\circ) = x_2(\circ) = 1, \quad \lambda_1(1) = \lambda_2(1) &= \circ. \end{aligned} \quad (13.4)$$

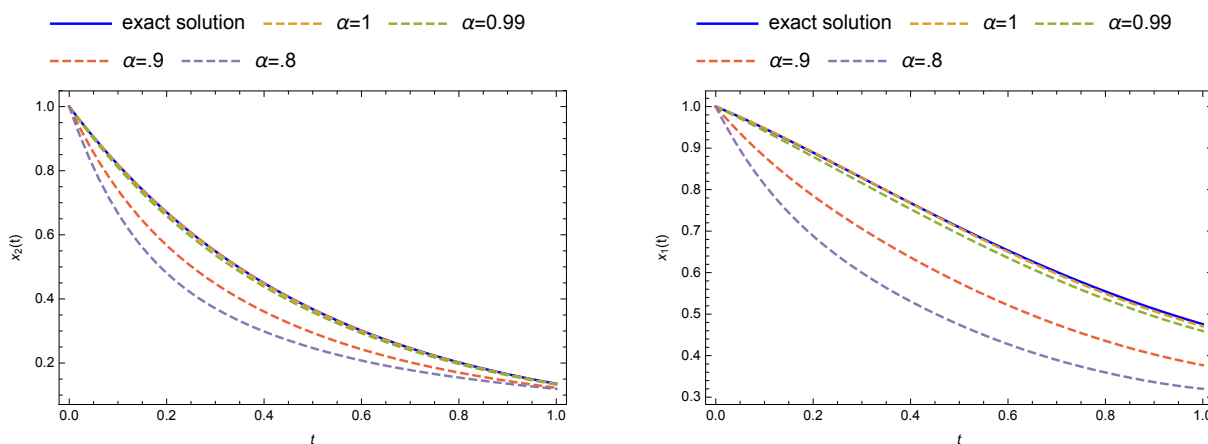
مقدار تابع هدف بهینه مسئله (۱۰.۴)-(۱۲.۴) به ازای $\alpha = 1$ ، $J^* = 0.431984$ است و جواب بهینه در این حالت عبارت است از [۳۲]:

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= -\frac{3}{4}e^{-2t} + 2.48164e^{-\sqrt{2}t} + 0.18352e^{\sqrt{2}t}, \\ x_2^*(t) &= e^{-2t}, \\ u^*(t) &= \frac{1}{4}e^{-2t} - 1.02793e^{-\sqrt{2}t} + 0.443056e^{\sqrt{2}t}. \end{aligned}$$

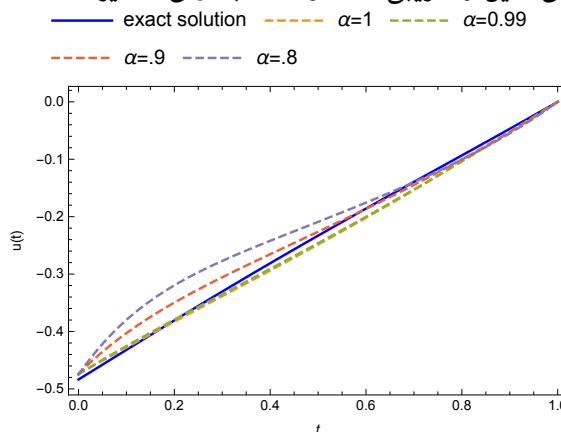
مقادیر تقریبی J_M با استفاده از روش مطرح شده در بخش قبل و به ازای انتخاب‌های مختلف α ، M و $\rho = -0.01$ در جدول ۳ ارائه شده است. همچنین، مقادیر به دست آمده با نتایج عددی حاصل از روش VIM [۳۳] در این جدول مقایسه شده است. این نتایج نشان می‌دهند که به ازای تمام مقادیر α ، با استفاده از تقریب چندجمله‌ایهای دیکسون مقدار کمتری برای تابع هدف J_M در مقایسه با روش VIM به دست می‌آید. بعلاوه، با توجه به اینکه این مسئله جواب دقیق دارد و در تکرار $M = 6$ به این جواب رسیده‌ایم، لذا $\alpha = 1$ بهترین انتخاب برای رسیدن به جواب دقیق مسئله (۱۰.۴)-(۱۲.۴) است. متغیرهای حالت $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و متغیر کنترل $u(t)$ برای $M = 6$ و مقادیر مختلف α به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده‌اند. خطای مطلق حاصل از این تقریب به ازای مقادیر مختلف M در جدول ۴ محاسبه شده است.

جدول ۳: نتایج عددی J_M به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۳.۴.

$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 1$	تکرار
۰٫۲۹۲۳۷۱	۰٫۳۵۱۰۶۰	۰٫۴۲۲۸۴۱	۰٫۴۳۲۲۳۱	$M = 4$
۰٫۲۷۳۸۹۲	۰٫۳۳۸۷۷۲	۰٫۴۲۰۹۷۱	۰٫۴۳۱۹۱۹	$M = 5$
۰٫۲۵۹۸۸۴	۰٫۳۲۹۴۱۲	۰٫۴۱۹۷۸۳	۰٫۴۳۱۹۸۸	$M = 6$
۰٫۳۷۶۰۱۲	۰٫۴۰۳۰۸۹	۰٫۴۲۹۰۰۵	۰٫۴۳۱۹۰۸	VIM [۲۳]



شکل ۴: جواب‌های دقیق و تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۳.۴.



شکل ۵: جواب‌های دقیق و تقریبی $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۳.۴.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با مشتق مرتبه کسری کاپوتو مطرح شد. برای این منظور، ابتدا شرایط لازم بهینگی را با استفاده از تابع هامیلتونی مسئله کنترلی بهینه کسری به

دادگانی، علی پور، سردی زید/ موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۵۱-۷۷

جدول ۴: خطای مطلق $E(t)$ به ازای $\alpha = 1$ ، $\rho = -0.001$ و مقادیر مختلف M برای مثال ۳.۴.

$u(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	تکرار
1.04179×10^{-4}	1.17976×10^{-5}	1.03197×10^{-4}	$M = 4$
1.12691×10^{-4}	5.71034×10^{-6}	1.04231×10^{-5}	$M = 5$
1.12673×10^{-4}	5.59531×10^{-7}	1.02812×10^{-5}	$M = 6$

جدول ۵: زمان CPU بر حسب ثانیه برای مثال ۳.۴.

$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 1$	تکرار
0.015600	0.0156001	0.0156001	0	$M = 6$

دست می‌آوردیم. سپس با اعمال رهیافت ارائه شده مبنی بر تقریب توابع حالت و کنترل مسئله توسط چندجمله‌ای‌های دیکسون و استفاده از نقاط کالوکیشن، شرایط لازم بهینگی را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. جواب‌های تقریبی این دستگاه معادلات را با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا محاسبه کردیم. بعلاوه، نشان دادیم که این جواب تقریبی به جواب بهینه مسئله کنترل بهینه کسری همگراست و کران خطا را برای این جواب‌های تقریبی به دست آوردیم. جدول ۵، زمان محاسباتی لازم را بر حسب ثانیه برای مثال ۳.۴ و به ازای $M = 6$ نشان می‌دهد. برای دو مثال دیگر، این زمان محاسباتی به ازای M -های مختلف تقریباً صفر شده است که بیانگر پیچیدگی محاسباتی بسیار کم این روش است. نتایج عددی به دست آمده به ما این اطمینان را می‌دهند که این تقریب نه تنها مسئله را ساده‌تر می‌کند بلکه سرعت محاسبات را نیز بهبود می‌بخشد که یکی از مزایای مهم این روش است.

مراجع

- [۱] J.T. Machado and A.M. Lopes. Analysis of natural and artificial phenomena using signal processing and fractional calculus, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, ۱۸(۲), (۲۰۱۵) ۴۷۸-۴۵۹.
- [۲] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen and Y. Chen. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, ۶۴, (۲۰۱۸) ۲۳۱-۲۱۳.

- [۳] N. Engheta. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, ۴۴(۴), (۱۹۹۶). ۵۶۶-۵۵۴
- [۴] R.L. Magin. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, *Computers & Mathematics with Applications*, ۵۹(۵), (۲۰۱۰). ۱۵۹۳-۱۵۸۶
- [۵] V.V. Kulish and J.L. Lage. Application of fractional calculus to fluid mechanics, *Journal of Fluids Engineering*, ۱۲۴(۳), (۲۰۰۲). ۸۰۶-۸۰۳
- [۶] K.B. Oldham. Fractional differential equations in electrochemistry, *Advances in Engineering software*, ۴۱(۱), (۲۰۱۰). ۱۲-۹
- [۷] V. Gafiychuk, B. Datsko and V. Meleshko. Mathematical modeling of time fractional reaction diffusion systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, ۲۲۰(۲-۱), (۲۰۰۸). ۲۲۵-۲۱۵
- [۸] F.C. Meral, T.J. Roysto and R. Magin. Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, ۱۵(۴), (۲۰۱۰). ۹۴۵-۹۳۹
- [۹] A. Carpinteri and F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer, .۲۰۱۴
- [۱۰] C. Lederman, J.M. Roquejoffre and N. Wolanski, Mathematical justification of a nonlinear integrodifferential equation for the propagation of spherical flames, *nnali di Matematica Pura ed Applicata*, ۱۸۳(۲), (۲۰۰۴). ۲۳۹-۱۷۳
- [۱۱] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II, *Geophysical Journal International*, ۱۳(۵), (۱۹۶۷). ۵۳۹-۵۲۹
- [۱۲] M. Caputo, *Elasticita de dissipazione*, SIAM journal on numerical analysis, Zanichelli, Bologna, .۱۹۶۹
- [۱۳] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, .۲۰۱۰
- [۱۴] V.T. Tarasov, *Fractional Dynamics*, Nonlinear physical science, Springer, .۲۰۰۹
- [۱۵] C.M.A. Pinto and J.A. Tenreiro Machadob. Fractional model for malaria transmission under control strategies, *Computers and Mathematics with Applications*, ۶۶, ۲۰۱۳. ۹۱۶-۹۰۸
- [۱۶] A.M. Lopes, J.A. Tenreiro Machadob, C.M.A. Pinto and A.M.S.F. Galhano. Fractional dynamics and MDS visualization of earthquake phenomena, *Computers and Mathematics with Applications*, ۶۶, (۲۰۱۳). ۶۵۸-۶۴۷

- [۱۷] S. Soradi-Zeid. Efficient radial basis functions approaches for solving a class of fractional optimal control problems. *Computational and Applied Mathematics*, ۳۹(۱), (۲۰۲۰) .۲۲-۱
- [۱۸] S.S. Zeid, S. Effati and A.V. Kamyad, Approximation methods for solving fractional optimal control problems. *Computational and Applied Mathematics*, ۳۷(۱), (۲۰۱۸) .۸۲-۱۵۸
- [۱۹] M. Dehghan, E.A. Hamed and H. Khosravian-Arab, A numerical scheme for the solution of a class of fractional variational and optimal control problems using the modified Jacobi polynomials. *Journal of Vibration and Control*, ۲۲(۶), (۲۰۱۶) .۱۵۵۹-۱۵۴۷
- [۲۰] S.S. Ezz-Eldien, E.H. Doha, D. Baleanu and A.H. Bhrawy, A numerical approach based on Legendre orthonormal polynomials for numerical solutions of fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, ۲۳ (۱), (۲۰۱۷) .۳۰-۱۶
- [۲۱] N. Singha and C. Nahak, An efficient approximation technique for solving a class of fractional optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, ۱۷۴(۳), (۲۰۱۷) .۸۰۲-۷۸۵
- [۲۲] M. Alipour, M.A. Vali and M.B. Valukola, Solving a class of fractional optimal control problems by homotopy analysis method. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, ۴۵,(۲۰۲۱) , .۷۴۵-۷۳۳
- [۲۳] R. Lidl, G.L. Mullen and G. Turnwald, *Dickson Polynomials*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. .۱۹۹۳
- [۲۴] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus*, In Fractals and fractional calculus in continuum mechanics, Springer, Vienna, .۱۹۹۷
- [۲۵] Ö.K. kürkcü, E. Aslan and M. Sezar, A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function. *Applied Numerical Mathematics*, ۱۲۱, (۲۰۱۷) .۱۴۸-۱۳۴
- [۲۶] Ö.K. kürkcü, E. Aslan and M. Sezar, A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, ۲۷۶, (۲۰۱۶) .۳۳۹-۳۲۴
- [۲۷] O.P. Agrawal and D. Baleanu, A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, ۱۳(۱۰-۹), (۲۰۰۷) .۱۲۸۱-۱۲۶۹
- [۲۸] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Courier Corporation, .۱۹۸۱
- [۲۹] i. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, frac-*

tional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic Press, San Diego, .۱۹۹۸

- [۳۰] N.H. Sweilam and T.M. Al-Ajami, Legendre spectral-collocation method for solving some types of fractional optimal control problems, *Journal of advanced research*, ۶(۳), (۲۰۱۵) .۴۰۳-۳۹۳
- [۳۱] E.H. Doha, A.H. Bhrawy, D. Baleanu, S.S. Ezz-Eldien and R.M. Hafez, An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems, *Advances in Difference Equations*, ۱, (۲۰۱۵) .۱۷-۱
- [۳۲] O. Defterli, A numerical scheme for two-dimensional optimal control problems with memory effect, *Computers and Mathematics with Applications*, ۵۹, (۲۰۱۰) .۱۶۳۶-۱۶۳۰
- [۳۳] A. Alizadeh and S. Effati, An iterative approach for solving fractional optimal control problems, *Journal of Vibration and Control*, ۲۴(۱), (۲۰۱۶) .۳۶-۱۸
- [۳۴] R. Kamocki, Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, ۳۷(۱۱), (۲۰۱۴) .۱۶۸۶-۱۶۶۸
- [۳۵] R. Kamocki, On the existence of optimal solutions to fractional optimal control problems, *Applied Mathematics and Computation*, ۲۳۵, (۲۰۱۴) .۱۰۴-۹۴