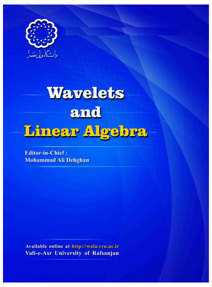
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۲۹-۴۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

مهتری توأم ماتریس‌های نرمال و چندجمله‌ایهای ماتریسی

فاطمه خالویی[*آ]

[آ]دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی محض، استان کرمان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۶ شهریور ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۲۵ مهر ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:

مهتری توأم، ماتریس‌های نرمال، ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته، نگهدارنده‌های خطی، چندجمله‌ایهای ماتریسی، خطی‌سازی همراه.

چکیده

خانواده $(B_i)_{i=1}^m$ را مهتر توأم خانواده $(A_i)_{i=1}^m$ می‌نامیم هرگاه ماتریس تصادفی دوگانه D موجود باشد به طوری که $A_i = DB_i$ برای هر $i = 1, \dots, m$. در این مقاله با کمک تعریف مهتری توأم رابطه مهتری را روی چندجمله‌ایهای ماتریسی تعریف می‌کنیم و سپس ساختار نگهدارنده‌های خطی مهتری توأم روی ماتریس‌ها و مهتری چندجمله‌ایهای ماتریسی را به دست می‌آوریم. برای بردارهای $x, y \in \mathbb{C}^n$، y را مهتر تعمیم یافته بردار x گوییم و می‌نویسیم $x \prec_g y$ هر گاه ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته D موجود باشد به طوری که $x = Dy$. ثابت می‌کنیم ماتریس‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته در تناظر یک به یک با مجموعه تمام نگاشت‌های یکه و حافظ در روی فضای ماتریسهای قطری است. در ادامه با کمک این حکم نتایج جالبی روی ماتریسهای به طور همزمان قطری شونده به دست می‌آوریم.

در این مقاله همچنین مهتری توأم تعمیم یافته روی خانواده مرتب از بردارها تعریف شده و سپس روی خانواده مرتب از ماتریسها گسترش داده و آن را مهتری توأم تعمیم‌یافته می‌نامیم. در ادامه $(A_i)_{i=۱}^m$ و $(B_i)_{i=۱}^m$ را دو خانواده مرتب و جابه‌جا شونده از ماتریس‌های نرمال در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم (B_i) مهتر توأم خانواده (A_i) است اگر و تنها اگر نگاشت یکه و حافظ رد T موجود باشد به طوری که $T(A_i) = B_i$ برای هر $i = ۱, ۲, \dots, m$.

۱. مقدمه

روابط مهتری روی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ که در شاخه‌های آنالیز ماتریسی و آمار کار می‌شوند، در علوم دیگر مانند کوانتوم و اقتصاد کاربرد دارند. تعاریف مختلف از مهتری را می‌توان در [۱۳]–[۲] یافت و [۱۱] کتاب مرجع مناسبی در این زمینه است. در بین این روابط مهتری رابطه $\prec$ روی ماتریسهای مختلط $n \times m$ مد نظر ما است، می‌نویسیم $A \prec B$ و می‌خوانیم B مهتر A است، اگر ماتریس تصادفی دوگانه D از مرتبه $n \times n$ موجود باشد به طوری که $A = DB$. این تعریف مهتری، روی خانواده مرتب از ماتریس‌ها تعمیمی دارد که مهتری توأم نامیده می‌شود [۱۲] . به این ترتیب که خانواده مرتب $\{B_i\}_{i=۱}^m$ از ماتریس‌ها مهتر توأم خانواده $\{A_i\}_{i=۱}^m$ از ماتریس‌ها است اگر ماتریس تصادفی دوگانه D موجود باشد به طوری که برای هر $i = ۱, ۲, \dots, m$ ، $A_i = DB_i$. مسأله دیگری که اخیرا روی آن زیاد کار شده، مسأله یافتن ساختار نگهدارنده‌های خطی این روابط مهتری است. جهت دیدن تکنیک‌ها و ساختارهای مختلف نگهدارنده‌های مهتری می‌توانید به [۹]–[۲] ، [۱۰] و [۱۳] مراجعه نمایید. در سراسر این مقاله $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ یا به اختصار $\mathcal{M}_n$ برای ماتریس‌های مختلط $n \times n$ به کار برده می‌شود. مجموعه بردارهای $n \times ۱$ با درآیه‌های مختلط با $\mathbb{C}^n$ نمایش داده شده است. بردار $e \in \mathbb{C}^n$ برداری است که تمام مؤلفه‌هایش عدد یک است. برای بردار $x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$ ، $tr(x)$ مجموع مؤلفه‌های x خواهد بود، یعنی $tr(x) = \sum_{i=۱}^n x_i$. همچنین نماد D_x برای ماتریس قطری با درآیه‌های قطری بردار x به کار برده می‌شود، یعنی $D_x = diag[x_۱, x_۲, \dots, x_n]$. بردار مقادیر ویژه ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ با $\lambda(A) \in \mathbb{C}^n$ نمایش داده شده است. $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ نیز برای مجموعه

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: f_ khalooei@uk.ac.ir (فاطمه خالویی).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.538419.1345

تمام ماتریسهای نرمال $n \times n$ استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۱. نگاشت خطی $T : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{M}_n$ تصادفی دوگانه نام دارد هرگاه سه ویژگی زیر را داشته باشد:

الف) مثبت باشد، یعنی برای هر ماتریس نیمه معین مثبت A، ماتریس $T(A)$ نیز نیمه معین مثبت باشد؛

ب) یکه باشد، یعنی $T(I_n) = I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی از مرتبه n است؛

ج) حافظ رد باشد، یعنی برای هر $A \in \mathcal{M}_n$، $tr(T(A)) = tr(A)$.

همچنین نگاشت خطی $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ را تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته گویند هر گاه شرایط (ب) و (ج) را داشته باشد یعنی یکه و حافظ رد باشد.

ماتریس $D \in \mathcal{M}_n$ تصادفی دوگانه نامیده می‌شود هر گاه تمام درآیه‌های آن نامنفی باشند و مجموع درآیه‌های هر سطر و هر ستون آن عدد یک باشند. مجموعه تمام ماتریس‌های تصادفی دوگانه از مرتبه n با $\mathcal{DS}(n)$ نمایش داده می‌شود. در ادامه تعریف ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته را می‌آوریم.

تعریف ۲.۱. ماتریس $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ را تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته گویند هرگاه، مجموع درآیه‌های هر سطر و ستون آن مساوی عدد یک باشد، یعنی

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

همچنین، مجموعه ماتریس‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته را با نماد $\mathcal{GDS}(n)$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه یک شرط معادل به دست می‌آوریم برای این که یک ماتریس، تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته باشد.

قضیه ۳.۱. $A \in \mathcal{GDS}(n)$ *اگر و تنها اگر* $Ae = e$ *و برای هر* $x \in \mathbb{C}^n$، $tr(Ax) = tr(x)$.

اثبات. فرض کنید $A = [A_1 \cdots A_n] \in \mathcal{GDS}(n)$، که در آن A_j برای $1 \leq j \leq n$، ستون jام ماتریس A است. در این صورت،

$$Ae = \textstyle\sum_{j=1}^{n} A_j = e$$

و همچنین

$$tr(Ax) = tr(\sum_{j=1}^{n} x_j A_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j tr(A_j) = tr(x).$$

برعکس، برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $tr(Ax) = tr(x)$ پس

$$tr(A_j) = tr(Ae_j) = tr(e_j) = 1,$$

و این یعنی برای هر $1 \leq j \leq n$، $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. از اینکه $Ae = e$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = e.$$

در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq n$، $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. بنابراین $A \in \mathcal{GDS}(n)$. □

این مقاله بعد از مقدمه که بخش اول است در پنج بخش دیگر ادامه می‌یابد. بخش دوم با کمک مهتری توأم، یک تعریف برای مهتری روی چندجمله‌ایهای ماتریسی ارایه می‌دهیم و همچنین نشان می‌دهیم که برقراری مهتری بین دو چندجمله‌ای معادل برقراری مهتری بین خطی‌سازیهای آن دو چندجمله‌ای است. در بخش سوم به تعیین ساختار نگهدارنده‌های خطی رابطه مهتری توأم روی ماتریس‌ها و مهتری چندجمله‌ایهای ماتریسی می‌پردازیم. در بخش چهارم مهتری تعمیم‌یافته روی بردارها معرفی می‌شود که عبارت است از $x \prec y$ اگر و تنها اگر ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم یافته $D \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که $x = Dy$ برای بردارهای $x, y \in \mathbb{C}^n$. در این بخش همچنین مهتری تعمیم یافته به دو گونه روی ماتریس‌ها توسعه می‌یابد و قضایایی در این خصوص بیان و اثبات می شود. در بخش پنجم مهتری توأم تعمیم یافته روی خانواده‌های مرتب از ماتریس‌ها تعریف می‌شود و یک قضیه جالب که شرط معادل برای مهتری توأم خانواده جابه‌جا شونده از ماتریس‌های نرمال است را به دست می‌آوریم. در بخش آخر دو تعریف برای مهتری تعمیم‌یافته روی چندجمله‌ایهای ماتریسی آورده‌ایم و دو مسأله باز در رابطه با نگهدارنده‌های خطی آنها بیان می‌شود.

۲. مهتری توأم و چند جمله ای‌های ماتریسی

در این بخش با استفاده از تعریف مهتری توأم، مهتری را روی چندجمله‌ایهای ماتریسی تعریف می‌کنیم. نقطه قوت این تعریف این است که $p(\lambda) \prec q(\lambda)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{L}(p) \prec \mathcal{L}(q)$ که در آن $\mathcal{L}(p)$ خطی سازی چندجمله‌ای p است. ابتدا فرم کلی چندجمله‌ای ماتریسی $p(\lambda)$ را ببینیم.

$$p(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$$
$$\lambda \in \mathbb{C}, A_j \in \mathcal{M}_n, j = 0, 1, \ldots, m.$$

$\mathcal{L}(p)$ را خطی‌سازی همراه چندجمله‌ای $p(\lambda)$ در نظر می‌گیریم که عبارت است از [۴]:

$$\mathcal{L}(p) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -A_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (۱.۲)$$

خطی‌سازی‌های متعددی برای چندجمله‌ای ماتریسی تعریف می‌شود که ما در اینجا خطی‌سازی همراه را در نظر گرفته‌ایم و در ادامه به اختصار آن را خطی‌سازی می‌نامیم. برای انواع خطی‌سازی یک چندجمله‌ای می‌توان به [۴] مراجعه کرد. فرض کنید $p(\lambda)$ یک چندجمله‌ای ماتریسی باشد. صفرهای چندجمله‌ای $\det p(\lambda)$ را مقادیر ویژه چندجمله‌ای ماتریسی $p(\lambda)$ می‌نامند. مجموعه تمام مقادیر ویژه چندجمله‌ای ماتریسی یا همان طیف $p(\lambda)$ را با $\sigma(p)$ نمایش می‌دهند. بردار $x \neq 0$ را بردار ویژه چندجمله‌ای ماتریسی $p(\lambda)$ نظیر مقدار ویژه $\lambda_0 \in \sigma(p)$ گویند هر گاه $p(\lambda_0)x = 0$. وقتی ضریب پیشرو در چندجمله‌ای ماتریسی $p(\lambda)$ همانی باشد آنگاه [۴]

$$\det \mathcal{L}(p) = \det p(\lambda).$$

به عبارت دیگر $\sigma(p) = \sigma(\mathcal{L}(p))$. اما چندجمله‌ای ماتریسی $\mathcal{L}(p)$ از درجه یک است و در ابعاد و مرتبه‌های بالا محاسبه $\sigma(\mathcal{L}(p))$ به مراتب ساده تر از $\sigma(p)$ است. همچنین اگر ضریب پیشرو در چندجمله‌ای ماتریسی وارون‌پذیر باشد آنگاه طیف خطی‌سازی همان طیف ماتریس همراه است که به راحتی قابل محاسبه می‌باشد.

در حل نوعی از دستگاههای معادلات دیفرانسیل نیز می‌توان از رابطه $\sigma(p) = \sigma(\mathcal{L}(p))$ استفاده کرد.

معادله دیفرانسیل به فرم کلی زیر را در نظر بگیرید.

$$A_l x^{(l)}(t) + A_{l-1} x^{(l-1)}(t) + \cdots + A_1 x^{(1)}(t) + A_0 x(t) = f(t)$$

که در آن $A_0, A_1, \ldots, A_l \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $\det A_l \neq 0$. همچنین $x(t) \in \mathbb{C}^n$ تابع برداری از متغیر t و اندیس‌های بالایی نمایانگر مشتقات این تابع برداری‌اند. $f(t)$ تابعی معلوم از متغیر t با مقادیر در $\mathbb{C}^n$ می‌باشد. نظیر دستگاه فوق چندجمله‌ای ماتریسی $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} A_j \lambda^j$ نسبت داده می‌شود. در حل دستگاه $\sigma(p(\lambda))$ نیاز است. برای دیدن نمونه‌هایی از حل این دستگاهها خواننده به [۴] و [۴] ارجاع می‌شود. در ادامه برای نحوه نوشتن چندجمله‌ای ماتریسی یک دستگاه معادلات مثال [۴] را در نظر بگیرید.

$$x_1^{(2)}(t) = 0,$$

$$x_2^{(2)}(t) + x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t) + x_1 = 0.$$

با نوشتن این دستگاه به فرم کلی فوق داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{(2)}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x^{(1)}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = 0.$$

چندجمله‌ای ماتریسی نظیر آن عبارت است از

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ \lambda + 1 & \lambda(\lambda - 1) \end{bmatrix}.$$

همچنین چندجمله‌ای خطی سازی آن عبارت است از

$$\mathcal{L}(P) = \lambda I - \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & \lambda & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \lambda - ۱ \end{bmatrix}.$$

جهت مطالعه بیشتر روی خطی‌سازی چندجمله‌ایهای ماتریسی می‌توان به [۱] مراجعه کرد که در آن رابطه‌ی بین غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار یک چندجمله‌ای ماتریسی و غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار خطی‌سازی آن مورد مطالعه قرار گرفته است. در ادامه این بخش تعریف مهتری توأم را می‌آوریم و سپس مهتری را روی چندجمله‌ایهای ماتریسی تعریف می‌نماییم.

تعریف ۱.۲. [۱۲]

الف) فرض کنید $A, B \in \mathcal{M}_n$ ماتریس B را مهتر ماتریس A گویند و می‌نویسند $A \prec B$ هرگاه ماتریس تصادفی دوگانه $D \in \mathcal{DS}(n)$ موجود باشد به طوری که $A = DB$.

ب) فرض کنید $(A_i)_{i=۱}^m$ و $(B_i)_{i=۱}^m$ دو خانواده مرتب از ماتریس‌های $\mathcal{M}_n$ باشند. گویند (B_i) مهتر توأم (A_i) است و می‌نویسند $(A_i) \prec (B_i)$ هرگاه ماتریس تصادفی دوگانه $D \in \mathcal{DS}(n)$ موجود باشد به طوری که برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $A_i = DB_i$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید

$$p(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + A_۰$$
$$q(\lambda) = B_m\lambda^m + B_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + B_۰$$

دو چندجمله‌ای ماتریسی باشند که $\lambda \in \mathbb{C}$ و برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n$. چندجمله‌ای $q(\lambda)$ را مهتر چندجمله‌ای $p(\lambda)$ گویند و نوشته می‌شود $p(\lambda) \prec q(\lambda)$ هرگاه $(A_i)_{i=۱}^m \prec (B_i)_{i=۱}^m$.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید*
$p(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + A_۰$ *و* $q(\lambda) = B_m\lambda^m + B_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + B_۰$ *دو چندجمله‌ای ماتریسی باشند، در این صورت* $p(\lambda) \prec q(\lambda)$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{L}(p) \prec \mathcal{L}(q)$.

اثبات. فرض کنید $p(\lambda) \prec q(\lambda)$ در این صورت برای یک $D \in \mathcal{DS}(n)$ و برای هر $j = ۱, ۲, \dots, m$ ، $A_j = DB_j$. بنابراین می‌توان نوشت $p(\lambda) = Dq(\lambda)$. به سادگی می‌توان نشان داد که با فرض

$$D' = diag[I_n, \dots, I_n, D] \in \mathcal{DS}(nm),$$

داریم $\mathcal{L}(p) = D'\mathcal{L}(q)$ و در نتیجه $\mathcal{L}(p) \prec \mathcal{L}(q)$. برعکس، فرض کنید $\mathcal{L}(p) \prec \mathcal{L}(q)$ پس ماتریس $D' \in \mathcal{DS}(nm)$ موجود است به طوری که

$$\mathcal{L}(p) = D'\mathcal{L}(q).$$

D' را به صورت بلوکی $D' = [D_{ij}]_{i,j=۱}^{m}$ در نظر بگیرید که $D_{ij} \in \mathcal{M}_n$. در این صورت

$$D' diag[I_n, \dots, I_n, B_m] = diag[I_n, \dots, I_n, A_m].$$

در نتیجه $D_{ii} = I_n, D_{ij} = o, i \neq j = ۱, ۲, \dots, m - ۱$ ، $A_m = D_{mm}B_m$. از طرفی

$$D'\begin{pmatrix} ۰ & I_n & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_n & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & I_n & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & I_n \\ -B_۰ & -B_۱ & \cdots & \cdots & \cdots & -B_{m-۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & I_n & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_n & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & I_n & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & I_n \\ -A_۰ & -A_۱ & \cdots & \cdots & \cdots & -A_{m-۱} \end{pmatrix}. \quad (۲.۲)$$

نتیجه می‌دهد $A_i = D_{mm}B_i, i = ۰, ۱, \dots, m - ۱$. از آنجا که $D_{mm} \in \mathcal{DS}(n)$ پس $p(\lambda) \prec q(\lambda)$. $\square$

۳. نگهدارنده‌های خطی

ساختار نگهدارنده‌های مهتری $\prec$ روی بردارها در [۲] و همچنین ساختار این نگهدارنده‌ها روی ماتریس‌ها در [۱۰] به دست آمده است. لذا قضیه زیر را از [۱۰] می‌آوریم و جهت تعیین ساختار نگهدارنده‌های مهتری توأم روی ماتریس‌ها از آن استفاده می‌نماییم.

قضیه ۱.۳. *[۱۰] فرض کنید $T: \mathcal{M}_{nm} \to \mathcal{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.*

الف) $TX \prec TY$ هرگاه $X \prec Y$ برای هر $X, Y \in \mathcal{M}_{nm}$.

ب) یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱) ماتریسهای $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}_{nm}$ موجود باشند به طوری‌که $T(X) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_{ij})A_j$ برای هر $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{nm}$.

۲) $R, S \in \mathcal{M}_m$ و ماتریس جایگشتی $P \in \mathcal{M}_n$ موجود باشند به طوری‌که $T(X) = PXR + JXS$ برای هر $X \in \mathcal{M}_{nm}$.

در ادامه این بخش ساختار نگهدارنده‌های مهتری توأم، مطابق تعریف ۱.۲ را روی ماتریس‌ها به دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $T: \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ نگهدارنده خطی رابطه مهتری $\prec$ باشد، در این صورت اگر*

$$X = DY, \exists D \in \mathcal{DS}(n)$$

آنگاه یکی از دو شرط زیر برای هر $X, Y \in \mathcal{M}_n$ برقرار است.

الف) یک ماتریس جایگشتی P وجود دارد به طوری‌که $T(X) = PDP^tT(Y)$.

ب) $T(X) = T(Y)$.

اثبات. طبق قضیه ۱.۳ اگر $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n$ موجود باشند به طوری که برای هر $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n$، $T(X) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_{ij})A_j$ آنگاه فرض کنید $X = DY, D = [d_{ij}] \in \mathcal{DS}(n)$ در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(DY)_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} d_{ik}y_{kj})\\ &= \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} d_{ik})y_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n} y_{kj}.\end{aligned}$$

بنابراین $tr(X_j) = tr(Y_j)$ برای هر $j = 1, 2, \ldots, n$ در نتیجه

$$T(X) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_{ij})A_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} y_{ij})A_j = T(Y).$$

طبق قضیه ۱.۳ اگر $R, S \in \mathcal{M}$ و ماتریس جایگشتی $P \in \mathcal{M}_n$ موجود باشند به طوری که $T(X) = PXR + JXS$ برای هر $X \in \mathcal{M}_n$. آنگاه فرض کنید $X = DY, \exists P \in \mathcal{DS}(n)$ و $D' = PDP^t$ در این صورت

$$\begin{aligned} T(X) &= PXR + JXS \\ &= PDYR + JDYS \\ &= D'PYR + D'JYS \\ &= D'T(Y). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۳. *اگر $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ نگاشت خطی باشد آنگاه شرایط زیر معادل‌اند*

الف) T نگهدارنده رابطه مهتری $\prec$ است،

ب) T نگهدارنده رابطه مهتری توأم $\prec$ است،

ج) T نگهدارنده رابطه مهتری $\prec$ روی چندجمله ای ماتریسی است.

بنابراین طبق این نتیجه ساختار نگهدارنده‌های خطی رابطه مهتری توأم روی ماتریس‌ها و رابطه مهتری روی چندجمله‌ایهای ماتریسی همانند قضیه ۱.۳ می‌باشد.

۴. مهتری و نگاشت‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته

در این بخش مهتری تعمیم‌یافته روی $\mathbb{C}^n$ تعریف می‌شود و در تعاریف ۱.۴ و ۲.۴ به دو گونه روی $\mathcal{M}_n$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $x, y \in \mathbb{C}^n$ ، می‌نویسیم $x \prec_g y$ و می‌خوانیم y مهتر تعمیم‌یافته x است، هرگاه ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته $D \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که $x = Dy$. همچنین

ماتریس $B \in \mathcal{M}_n$ را مهتر تعمیم‌یافته ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ گوییم و می‌نویسیم $A \prec_g B$ هر گاه ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته D موجود باشد به طوری که $A = DB$.

تعریف ۲.۴. فرض کنید $A, B \in \mathcal{M}_n$. B را مهتر ماتریسی تعمیم‌یافته A نامیم و می‌نویسیم $A \precsim_g B$، هرگاه $D \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که $\lambda(A) = D\lambda(B)$. به عبارت دیگر $\lambda(A) \prec_g \lambda(B)$.

در قضیه زیر نگاشت‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته روی ماتریس‌های قطری را با یک شرط لازم و کافی به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر ثابت می‌کنیم نگاشت‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته روی مجموعه ماتریس‌های قطری از مرتبه n، در تناظر یک به یک با $\mathcal{GDS}(n)$ است.

قضیه ۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{D}_n$ مجموعه ماتریس‌های قطری در $\mathcal{M}_n$ باشد. در این صورت نگاشت خطی $T : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ یکه و حافظ رد است اگر و تنها اگر $A \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $T(D_x) = D_{Ax}$.*

اثبات. فرض کنید نگاشت خطی $T : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ یکه و حافظ رد باشد. با توجه به اینکه $\mathcal{D}_n$ با $\mathbb{C}^n$ یکریخت است نگاشت T، یک نگاشت $\tilde{T} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ با ضابطه $\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n}(T(D_x))_{ii}e_i$ به ازای $x \in \mathbb{C}^n$، القا می‌کند. فرض کنید A ماتریس $\tilde{T}$ در پایه استاندارد باشد، بنابراین برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $\tilde{T}(x) = Ax$.

قرار دهید $A = [A_1, \ldots, A_n]$. از آنجایی که $tr(\tilde{T}(x)) = tr(x)$ از طرفی $\tilde{T}(e_j) = A_j$ برای هر $j = 1, 2, \ldots, n$. بنابراین

$$tr(A_j) = tr(\tilde{T}(e_j)) = tr(e_j) = 1.$$

در نتیجه برای هر $j = 1, \ldots, n$،

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

T یکه است، پس $\tilde{T}(e) = e$ و بنابراین $Ae = e$. در نتیجه $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ برای هر $i = 1, \ldots, n$. لذا $A \in \mathcal{GDS}(n)$.

همچنین

$$Ax = \tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n}(T(D_x))_{ii}e_i,$$

در نتیجه برای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$(T(D_x))_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = (Ax)_i.$$

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $T(D_x) = D_{Ax}$.

برعکس، فرض کنید $A \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که $T(D_x) = D_{Ax}$. طبق قضیه ۳.۱، $Ae = e$ و $tr(Ax) = tr(x).$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$. نتیجه می‌گیریم که

$$T(I) = T(D_e) = D_{Ae} = D_e = I,$$

و همچنین داریم

$$\begin{aligned} tr(T(D_x)) &= tr(D_{Ax}) \\ &= tr(Ax) \\ &= tr(x) \\ &= tr(D_x), \forall x \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

پس T یکه و حافظ رد است. □

ماتریس $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ را یکانی نامیم هرگاه $U^*U = I$. مدار یکانی یک ماتریس دلخواه به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۴. فرض کنید $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. مدار یکانی A با نماد $\mathcal{U}(A)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از

$$\mathcal{U}(A) = \{U^*AU : U \in \mathcal{U}_n\}.$$

که در آن $\mathcal{U}_n$ مجموعه ماتریس‌های یکانی از مرتبه n می باشد.

مدار یکانی ماتریس‌ها دارای خواص جبری و هندسی جالبی هستند و کاربردهای مهمی در فیزیک و کوانتوم دارند. در ادامه این بخش با یک قضیه و نتیجه آن رابطه ای بین مدار یکانی یک ماتریس نرمال و رابطه مهتری به دست می آوریم.

قضیه ۵.۴. *(۱) اگر $A, B \in \mathcal{N}_n$ و اسکالرهای $t_1, t_2, \ldots, t_k$ و ماتریس‌های یکانی $U_1, U_2, \ldots, U_k$ موجود باشند به طوری که*

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = 1, \quad A = \sum_{j=1}^{k} t_j U_j^* B U_j,$$

آنگاه نگاشت یکه و حافظ رد $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ وجود دارد به طوری که $A = \varphi(B)$.

(۲) فرض کنید $A, B \in \mathcal{N}_n$ و برای یک نگاشت یکه و حافظ رد φ داشته باشیم $\varphi(B) = A$. در این صورت، $A \precsim_g B$.

اثبات. (۱) نگاشت φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^{k} t_j U_j^* X U_j.$$

نگاشت φ یکه است زیرا

$$\varphi(I) = \sum_{j=1}^{k} t_j U_j^* I U_j = \sum_{j=1}^{k} t_j I = I.$$

نگاشت φ حافظ رد است زیرا

$$\begin{aligned} tr(\varphi(X)) &= tr(\sum_{j=1}^{k} t_j U_j^* X U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} t_j tr(U_j^* X U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} t_j tr(X U_j U_j^*) \\ &= tr(X) \sum_{j=1}^{k} t_j \\ &= tr(X). \end{aligned}$$

همچنین $A = \varphi(B)$. اثبات (۲). فرض کنید φ نگاشت یکه و حافظ رد باشد و $A = \varphi(B)$. $A, B \in \mathcal{N}_n$ ماتریس‌های $U, W \in \mathcal{U}_n$ وجود دارند به طوری که

$$D_{\lambda(A)} = W^*AW \quad , \quad D_{\lambda(B)} = V^*BV.$$

نگاشت ψ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\psi(X) := W\varphi(VXV^*)W^* \quad , \quad X \in \mathcal{M}_n.$$

نگاشت خطی، ψ یکه و حافظ رد می‌باشد و همچنین

$$\begin{aligned} D_{\lambda(A)} &= W^*AW \\ &= W^*\varphi(B)W \\ &= W^*\varphi(VD_{\lambda(B)}V^*)W \\ &= \psi(D_{\lambda(B)}), \end{aligned}$$

بنابراین

$$D_{\lambda(A)} = \psi(D_{\lambda(B)}). \tag{۱.۴}$$

حال فرض کنید $P_j,\ ۱ \leq j \leq n$ تصویر متعامد روی زیر فضای یک بعدی تولید شده توسط e_j باشد، لذا

$$P_j = diag(۰, \cdots, ۱, ۰, \cdots, ۰) = \begin{pmatrix} ۰ & \cdots & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix},$$

لذارابطه (۱.۴) نتیجه می‌دهد که

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A)P_j = D_{\lambda(A)} = \psi(D_{\lambda(B)})$$
$$= \psi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B)P_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B)\psi(P_j).$$

حال بنا به نتیجه فوق و خاصیت خطی بودن ضرب داخلی $\langle A, B\rangle = trB^*A$ روی مؤلفه اول برای هر $i = 1, \ldots, n$ داریم

$$\sum_{j=1}^{n}\langle\psi(P_j), P_i\rangle\lambda_j(B) = \langle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B)\psi(P_j), P_i\rangle$$
$$= \langle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A)P_j, P_i\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A)\langle P_j, P_i\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A)\delta_{ij} = \lambda_i(A).$$

بنابراین $\lambda(A) = D\lambda(B)$ که در آن $D = [d_{ij}]$ یک ماتریس مربعی است و برای هر $i, j = 1, \ldots, n$،

$$d_{ij} = \langle\psi(P_j), P_i\rangle = tr(P_i^*\psi(P_j)) = tr(P_i\psi(P_j)).$$

چون نگاشت ψ یکه و خطی است و P_iها تصاویر متعامد هستند. در نتیجه برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} tr(P_i\psi(P_j))\\ &= tr(P_i \sum_{j=1}^{n} \psi(P_j))\\ &= tr(P_i\psi(\sum_{j=1}^{n} P_j))\\ &= tr(P_i\psi(I)) = tr(P_i) = 1.\end{aligned}$$

به طور مشابه از این که نگاشت ψ حافظ رد است داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} tr(P_i\psi(P_j))\\ &= tr(\sum_{i=1}^{n} P_i\psi(P_j))\\ &= tr(\psi(P_j) \sum_{i=1}^{n} P_i\\ &= tr(\psi(P_j)) = tr(P_j) = 1.\end{aligned}$$

بنابراین $D \in \mathcal{GDS}(n)$. پس بنا به تعریف ۲.۴، نتیجه می‌گیریم که $A \precsim_g B$. □

نتیجه ۶.۴. *فرض کنید $A, B \in \mathcal{N}_n$. اگر ماتریس‌های یکانی $U_1, U_2, \ldots, U_k$ و اسکالرهای $t_1, t_2, \ldots t_k$ موجود باشند به طوری که*

$$\textstyle\sum_{j=1}^{k} t_j = 1, \quad A = \sum_{j=1}^{k} t_j U_j^* B U_j.$$

آنگاه $A \precsim_g B$.

۵. مهتری توأم و نگاشت‌های تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته

در این بخش مهتری تعمیم یافته را روی خانواده مرتب از بردارها و ماتریس‌ها تعمیم می‌دهیم. برای این منظور تعاریفی از [۱۲] می‌آوریم.

تعریف ۱.۵. فرض کنید $(x_i)_{i=1,\dots,m}, (y_i)_{i=1,\dots,m} \subseteq \mathbb{C}^n$ دو خانواده مرتب از بردارها باشند و همچنین $X, Y \in M_{n\times m}$ ماتریس‌هایی باشند که به صورت زیر معرفی شده‌اند،

$$C_i(X) = x_i, \quad C_i(Y) = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

در این صورت، خانواده $(y_i)_{i=1,\dots,m}$ را مهتر توأم تعمیم‌یافته خانواده $(x_i)_{i=1,\dots,m}$ گوییم هرگاه $X \prec_g Y$ و می‌نویسیم $(x_i) \prec_g (y_i)$.

تعریف ۲.۵. فرض کنید $(A_i)_{i=1,\dots,m}, (B_i)_{i=1,\dots,m} \subseteq \mathcal{M}_n$ دو خانواده مرتب از ماتریس‌ها باشند. در این صورت، خانواده $(B_i)_{i=1,\dots,m}$ را مهتر توأم ماتریسی تعمیم‌یافته خانواده $(A_i)_{i=1,\dots,m}$ گوییم هرگاه

$$(\lambda(A_i))_{i=1}^m \prec_g (\lambda(B_i))_{i=1}^m$$

و می‌نویسیم $(A_i) \precsim_g (B_i)$.

نکته ۳.۵. $(x_i) \prec_g (y_i)$ اگر و تنها اگر ماتریس $D \in \mathcal{GDS}(n)$ موجود باشد به طوری که برای هر $i = 1, \dots, m$، $x_i = Dy_i$.

در ادامه برای اثبات قضیه ۵.۵ از نتایج معروف لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۴.۵. *فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، $\mathbb{C}^*$-زیر جبر یکه ای از $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ باشد. در این صورت نگاشت تصادفی دوگانه $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که برای هر $A \in \mathcal{A}$، $\psi(A) = A$.*

فرض کنید $(A_i)_{i=1}^m \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ در اینصورت $\mathcal{A} = C^*(A_1, A_2, \dots, A_m)$ عبارت از $*-$ زیرجبر یکه تولید شده توسط $A_1, A_2, \dots, A_m$ می‌باشد. به عبارت دیگر $\mathcal{A}$ کوچکترین $*-$زیرجبر یکه از $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ است به طوری که برای هر $i = 1, 2, \dots, m$، $A_i \in \mathcal{A}$. بدیهی است که اگر $(A_i)_{i=1}^m$ خانواده آبلی از $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ باشند و U ماتریس یکانی باشد که به طور همزمان A_iها را قطری می‌کند

آنگاه U هر عضو $C^*(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ را قطری می‌کند. یعنی $\exists x \in \mathbb{C}^n$,$U^*AU = D_x$ برای هر $A \in C^*(A_1, A_2, \ldots A_m)$. در نتیجه

$$C^*(A_1, A_2, \ldots, A_m) \subseteq U\mathcal{D}_nU^* = \{UD_xU^* : x \in \mathbb{C}^n\}.$$

در قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای مهتری توأم خانواده‌ای مرتب و جابه‌جا شونده از ماتریس‌های نرمال بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۵. *فرض کنید $(A_i)_{i=1}^m, (B_i)_{i=1}^m \subseteq \mathcal{N}_n$ دو خانواده جابه‌جا شونده و مرتب از ماتریس‌های نرمال باشند. در این صورت، $(B_i) \prec_g (A_i)$ اگر و تنها اگر نگاشت یکه و حافظ رد (تصادفی دوگانه تعمیم‌یافته)،*

$$T : \mathbb{C}^*(A_1, \ldots, A_m) \longrightarrow \mathbb{C}^*(B_1, \ldots, B_m),$$

وجود داشته باشد به طوری‌که $T(A_i) = B_i$ ، برای هر $i = 1, 2, \ldots, m$.

اثبات. با توجه به اینکه $(A_i), (B_i)$ دو خانواده جابه‌جا شونده و نرمال هستند، پس $U, V \in \mathcal{U}_n$ وجود دارد به طوری که برای هر $i = 1, \ldots, m$،

$$U^*A_iU = D_{\lambda(A_i)}, \quad , V^*B_iV = D_{\lambda(B_i)}.$$

ابتدا لزوم رابطه را ثابت می‌کنیم، فرض کنید که $T : \mathbb{C}^*(A_1, \ldots, A_m) \longrightarrow \mathbb{C}^*(B_1, \ldots, B_m)$ نگاشت یکه و حافظ رد باشد به طوری که برای هر $i = 1, \ldots, m$، $T(A_i) = B_i$.
در نظر بگیرید $\tilde{T} : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ را با ضابطه، $\tilde{T}(D) = V^*T(\psi(UDU^*))V$ که در آن بنا به لم ۴.۵، $\psi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*(A_1, \ldots, A_m)$ نگاشت تصادفی دوگانه می‌باشد و $\tilde{T}(D_{\lambda(A_i)}) = D_{\lambda(B_i)}$،
همچنین $\tilde{T}$ نگاشت یکه و حافظ رد می‌باشد. لذا بنا به لم ۳.۴، $A \in \mathcal{GDS}(n)$ وجود دارد به طوری که $\tilde{T}(D_{\lambda(A_i)}) = D_{A\lambda(A_i)}$، پس

$$A\lambda(A_i) = \lambda(B_i) \quad , \quad i = 1, \ldots, m.$$

بنابراین $(\lambda(B_i)) \prec_g (\lambda(A_i))$، در نتیجه $(B_i) \prec_g (A_i)$.
برای اثبات کفایت رابطه، فرض می‌کنیم $(B_i) \prec_g (A_i)$. پس $A \in \mathcal{GDS}(n)$ وجود دارد به طوری

که $A\lambda(A_i) = \lambda(B_i)$، حال نگاشت $T : \mathbb{C}^*(A_1,\ldots,A_m) \longrightarrow \mathbb{C}^*(B_1,\ldots,B_m)$ را به صورت $T(UD_xU^*) = \varphi(VD_{Ax}V^*)$ در نظر می‌گیریم که در آن $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*(B_1,\ldots,B_m)$. بنا به لم ۴.۵، φ نگاشت تصادفی دوگانه می‌باشد و برای هر $B \in \mathbb{C}^*(B_1,\ldots,B_m)$، $\varphi(B) = B$. با توجه به اینکه $VD_{Ax}V^* \in \mathbb{C}^*(B_1,\ldots,B_m)$، پس

$$\varphi(VD_{Ax}V^*) = VD_{Ax}V^*,$$

بنابراین، $T(A_i) = B_i$. □

۶. مهتری تعمیم‌یافته چندجمله‌ایهای ماتریسی و مسأله باز

با استفاده از تعریف ۱.۴ و تعریف ۱.۵ می توان مهتری تعمیم‌یافته را روی چندجمله‌ای‌های ماتریسی به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۶. فرض کنید

$$p(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$$
$$q(\lambda) = B_m\lambda^m + B_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + B_0$$

دو چندجمله‌ای ماتریسی باشند که $\lambda \in \mathbb{C}$ و برای هر $i = 1, 2, \ldots, m$، $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n$. چندجمله‌ای $q(\lambda)$ را مهتر تعمیم‌یافته چندجمله‌ای $p(\lambda)$ گویند و نوشته می‌شود $p(\lambda) \prec_g q(\lambda)$ هر گاه $(A_i)_{i=1}^m \prec_g (B_i)_{i=1}^m$.

قضیه زیر را نیز داریم اما از آوردن اثبات آن به دلیل تشابه با اثبات قضیه ۳.۲ صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۲.۶. *فرض کنید $p(\lambda)$ و $q(\lambda)$ دو چندجمله‌ای ماتریسی باشند، در این صورت $p(\lambda) \prec_g q(\lambda)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{L}(p) \prec_g \mathcal{L}(q)$.*

در مقاله [۳] ساختار نگهدارنده‌های خطی مهتری تعمیم‌یافته تعریف ۱.۴ روی ماتریس‌ها به دست آمده است، با توجه به این ساختار مسأله باز زیر مطرح می‌شود.

مسأله ۱. ساختار نگهدارنده‌های خطی تعمیم یافته $\prec_g$ روی چندجمله‌ایهای ماتریسی، طبق تعریف ۱.۶ به چه گونه است؟ اگر مهتری را روی چند جمله‌ایها بر اساس تعاریف ۲.۴ و ۲.۵ تعریف نماییم، به طور مشابه مسأله ساختار نگهدارنده‌های خطی مطرح می‌شود.

تعریف ۳.۶. فرض کنید

$$p(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$$
$$q(\lambda) = B_m\lambda^m + B_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + B_0$$

دو چندجمله‌ای ماتریسی باشند که $\lambda \in \mathbb{C}$ و برای هر $i = 1, 2, \dots, m$، $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n$. چندجمله‌ای q را مهتر تعمیم‌یافته چندجمله‌ای p گویند و نوشته می‌شود $p \prec_g q$ هرگاه $(\lambda(A_i))_{i=1}^m \prec_g (\lambda(B_i))_{i=1}^m$.

مسأله۲. ساختار نگهدارنده‌های خطی تعمیم یافته $\prec_g$ همانند تعریف ۳.۶ ، روی چندجمله‌ایهای ماتریسی چیست؟

تشکر و قدردانی

از داوران محترم به واسطه ارائه پیشنهادات سازنده آنان که منجر به بهبود کیفیت علمی این مقاله شده است، تشکر و قدردانی می نمایم.

مراجع

[۱] ز. بوربور عظیمی و غ. آقاملایی، بررسی همگرایی روش GMRES برای ماتریس‌های همرا ه بلوکی از طریق غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار، *مجله موجک‌ها و جبرخطی*، **۵**(۳) (۱۳۹۸)، ۹۵-۱۱۱.

[2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra and its Applications*, **118** (1989), 163–248.

[3] A. Armannejad and A. Salemi, The Structure of linear Preservers of GS-Majorization, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **32**(2) (2006), 31–42.

[4] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Academic Press*, New York, 1982.

[5] A.M. Hasani and M. Radjabalipour, On linear preservers of (right) matrix majorization, *Linear algebra and its Applications*, **23**(2) (2007), 255–261.

[6] A. Ilkhanizadeh Manesh, On linear preservers of sgut-majorization on $\mathbf{M}_{n,m}$, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* **42**(2) (2016), 470–481.

[7] M. Jamshidi, UC-Majorization and its strongly linear preservers, *Operator and Matrices*, **12**(1) (2018), 263–270.

[8] F. Khalooei, Linear preservers of two-sided matrix majorization, *Wavelets and Linear Algebra*, **1** (2014), 43–50.

[9] F. Khalooei, Linear maps preserving or strongly preserving majorization on matrices, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **41**(7) (2015), 77–83.

[10] C.K. Li and E. Poon, Linear Operators Preserving Directional Majorization, *Linear Algebra and its Applications* **325** (2001), 141–146.

[11] A.W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[12] F.D. Martínez Pería, P.G. Massey and L.E. Silvestre, Weak matrix majorization, *Linear Algebra and its Applications*, **403** (2005), 343–368.

[13] M. Soleymani and A. Armandnejad, Linear preservers of even majorization on Mn,m, *Linear and Multilinear Algebra* **62**(11) (2014), 1437–1449.