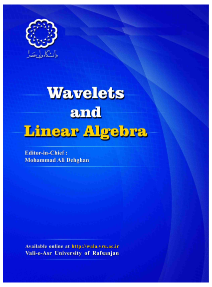
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۵-۲۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

قاب‌های بازیاب نرم و پایه‌های ریس بازیاب نرم

محمدعلی حسنخانی فرد[*آ]

[آ] ایران، رفسنجان، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، گروه ریاضی.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۸ تیر ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۳۰ تیر ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: رجبعلی کامیابی‌گل

کلمات کلیدی:

قاب، قاب بازیاب فاز،
قاب بازیاب نرم،
آشفتگی.

چکیده

این مقاله روی قاب‌های بازیاب نرم در فضاهای هیلبرت نامتناهی‌البعد متمرکز شده است و شرایط همارزی برای این قاب‌ها ارائه می‌دهد. همچنین نشان داده می‌شود پایه‌های ریس بازیاب نرم، دقیقا همان پایه‌های ریس متعامد هستند و بطور خاص پایه‌های ریس بازیاب نرم یکه، دقیقا همان پایه‌های متعامد یکه هستند. علاوه بر این نشان داده می‌شود که خاصیت بازیاب نرمی، تحت آشفتگی پایا نیست.

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: m.hasankhani@vru.ac.ir (محمدعلی حسنخانی فرد).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.533116.1333

۱. مقدمه

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد. دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک *قاب* برای $\mathcal{H}$ است اگر ثابت های $A > 0$، $B < \infty$، وجود داشته باشند به طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \tag{1.1}$$

که در آن B, A، به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. نامساوی دومی در شرط قاب (۱.۱)، شرط *بسل*[1] برای دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است. اگر $A = B$، آنگاه قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک *قاب کیپ* و اگر $A = B = 1$، آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کیپ نرمال شده یا *قاب پارسوال* گویند.

اگر همه‌ی اعضای قاب دارای نرم یکسان باشند، قاب را *قاب هم‌نرم* نامند، به ویژه اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب کیپ با کران قاب A باشد، به‌طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\|f_k\| = C$، آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب A-کیپ C-هم‌نرم گویند. دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک *دنباله‌ی قاب* نامیده می‌شود، اگر یک قاب برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد.

عملگر خطی کراندار

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

را *عملگر قاب اولیه* و عملگر خطی کراندار

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$$

را *عملگر قاب*، برای قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ گویند.

یک *پایه‌ی ریس* برای $\mathcal{H}$ یک دنباله به صورت $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ و $U \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر معکوس پذیر است. هر پایه‌ی ریس یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

---
[1] Bessel

دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس است اگر و تنها اگر کامل باشد و ثابت های $0 < A \leq B < \infty$، وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر دنباله‌ی متناهی $\{c_k\}_{k\in I}$ از اعداد مختلط داشته باشیم

$$A \sum_{k\in I} |c_k|^2 \leq \| \sum_{k\in I} c_k f_k \|^2 \leq B \sum_{k\in I} |c_k|^2,$$

که در آن B, A، به ترتیب کران پایه‌ی ریس پایین و کران پایه‌ی ریس بالای $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده می‌شوند. دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک *دنباله‌ی پایه‌ی ریس* نامیده می‌شود، اگر یک پایه‌ی ریس برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد.

دنباله‌ی $\{f_k\}_{k\in I}$ را *امگا مستقل* گویند، اگر برای هر دنباله‌ی $\{c_k\}_{k\in I}$ در $\ell_2(\mathbb{N})$، از $\sum_{k\in I} c_k f_k = 0$، نتیجه شود $c_k = 0$، برای هر $k \in I$. برای اطلاعات بیشتر درباره قاب‌ها به [۵، ۷، ۹، ۱۳، ۱۵] مراجعه فرمایید.

فضای همه‌ی عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت مختلط متناهی‌البعد $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و فضای همه‌ی عملگرهای خطی خودالحاق روی $\mathcal{H}$ را با $\mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهند. برای هر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی T را با $\sigma(T)$، رتبه‌ی T، که بعد فضای برد T است را با $\mathrm{rank}(T)$ و مجموع درایه های روی قطر اصلی T، را با $\mathrm{trace}(T)$ نمایش می‌دهند.

مساله‌ی بازسازی سیگنال‌ها با استفاده از قاب‌ها یک مساله‌ی مهم و جالب در فیزیک و مهندسی است. در مرجع [۲] قاب‌های کیپی ساخته شده است که بازسازی سیگنال را با استفاده از قدرمطلق ضرایب قاب امکان پذیر کرده است و لذا بازسازی سیگنال بدون استفاده از فاز سیگنال انجام شده است. فرآیند بازسازی یک سیگنال بدون استفاده از فاز آن سیگنال، را بازیابی فاز گویند.

قاب‌های بازیاب فاز کاربردهای مهمی در استفاده از اشعه X، کریستالوگرافی، میکروسکوپ های الکترونیکی، فرآیند تشخیص گفتار و غیره دارند[۳، ۴، ۱۰، ۱۴].

قاب‌های بازیاب نرم در مرجع [۱] معرفی شده‌اند. در آن مقاله درباره رابطه‌ی قاب‌های بازیاب نرم با قاب‌های بازیاب فاز بحث شده است. همچنین در مراجع [۱۱] و [۱۲] قاب‌های بازیاب نرم در فضای هیلبرت متناهی‌البعد کاملا مشخص سازی شده اند.

در این مقاله قاب‌های بازیاب نرم و پایه‌های ریس بازیاب نرم در فضای نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند و روی مساله پایایی این نوع از قاب‌ها تحت آشفتگی، کار شده است.

۲. نتایج اصلی

قاب‌های بازیاب فاز در مهندسی و فیزیک کاربرد دارند. مطالعات ریاضی درباره‌ی قاب‌های بازیاب فاز اولین بار در سال ۲۰۰۶ در مقاله‌ی [۲] شروع شد. همچنین در مقاله‌ی [۸] نتایج مهمی درباره‌ی این نوع از قاب‌ها بدست آمده است.

تعریف ۱.۲. قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک *قاب بازیاب فاز* گویند اگر برای هر دو بردار دلخواه $f, g \in \mathcal{H}$ که در شرط $|\langle f, f_k\rangle| = |\langle g, f_k\rangle|$، برای هر $k \in I$، صدق می‌کنند، داشته باشیم $f = cg$، به ازای یک c با شرط $|c| = ۱$.

قضیه‌ی زیر از مرجع [۲]، با استفاده از غلاف [2] عناصر قاب، قاب‌های بازیاب فاز را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مشخص کرده است.

قضیه ۲.۲. *[۲] قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی متناهی‌البعد $\mathcal{H}$ بازیاب فاز است اگر و تنها اگر برای هر افراز $\{I_j\}_{j=۱}^{۲}$ از I، داشته باشیم $span\{f_k\}_{k\in I_۱} = \mathcal{H}$ یا $span\{f_k\}_{k\in I_۲} = \mathcal{H}$.*

همچنین، قضیه‌ی زیر، قاب‌های بازیاب فاز را در فضاهای هیلبرت نامتناهی‌البعد مشخص سازی می‌کند.

قضیه ۳.۲. *[۶] قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ بازیاب فاز است اگر و تنها اگر برای هر افراز $\{I_j\}_{j=۱}^{۲}$ از I، داشته باشیم $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_۱} = \mathcal{H}$ یا $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_۲} = \mathcal{H}$.*

اگر $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب فاز باشد، آنگاه نگاشت غیر خطی $\mathcal{A} : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \ell_۲(I)$ با ضابطه‌ی $\mathcal{A}(\tilde{x}) := \Big[|\langle x, f_k\rangle|\Big]_{k\in I}$، یک به یک است. در نگاشت فوق $\tilde{\mathcal{H}}$ فضای خارج قسمتی وابسته به رابطه هم‌ارزی & روی $\mathcal{H}$ تعریف شده با

$$x\&y \Leftrightarrow y = cx, \text{for some scalar c with } |c| = ۱.$$

است.

[2] Span

بنابراین برای هر $x \in \mathcal{H}$، کلاس هم‌ارزی متناظر، برابر با $\tilde{x} = \{x, -x\}$، در فضاهای هیلبرت حقیقی و برابر با $\tilde{x} = \{e^{i\phi}x : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$، در فضاهای هیلبرت مختلط است. اگر $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب فاز برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه از یک به یک بودن نگاشت فوق نتیجه می‌شود که هر بردار در $\mathcal{H}$ را می‌توان با تقریبی از یک ضریب با قدرمطلق یک، از قدرمطلق ضرایب قاب بازسازی کرد. قاب‌های بازیاب نرم در مرجع [۱] به صورت زیر تعریف شده‌اند.

تعریف ۴.۲. قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک *قاب بازیاب نرم* گویند اگر برای هر دو بردار دلخواه $f, g \in \mathcal{H}$ که در شرط $|\langle f, f_k\rangle| = |\langle g, f_k\rangle|$، برای هر $k \in I$، صدق می‌کنند، داشته باشیم $\|f\| = \|g\|$.

مثال ۵.۲. به راحتی می‌توان نشان داد که هر قاب بازیاب فاز یک قاب بازیاب نرم نیز است. همچنین، به راحتی می‌توان نشان داد که هر قاب کیپ یک قاب بازیاب نرم است، درحالی که لزوما بازیاب فاز نیست. به ویژه هر پایه‌ی متعامد یکه، یک قاب بازیاب نرم است که بازیاب فاز نیست، اگر فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، داریم $|\langle e_1 + e_2, e_k\rangle| = |\langle e_1 - e_2, e_k\rangle|$، درحالی که $e_1 + e_2 \neq \alpha(e_1 - e_2)$، برای هر اسکالر α.

همچنین، $\mathcal{F} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$، که در آن $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است، یک قاب بازیاب نرم است که کیپ نیست. در حالت کلی هم واضح است که هر قاب شامل یک قاب بازیاب نرم، بازیاب نرم است.

قضیه‌ی زیر از مرجع [۱۱] با استفاده از غلاف عناصر قاب، قاب‌های بازیاب نرم را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مشخص کرده است.

قضیه ۶.۲. *[۱۱] یک قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی متناهی‌البعد $\mathcal{H}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر برای هر افراز $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ از I، داشته باشیم $span\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp} \perp span\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp}$.*

در مرجع [۱۲] قاب‌های بازیاب نرم در فضاهای هیلبرت مختلط متناهی‌البعد مورد بحث قرار گرفتند. در واقع نویسندگان آن مقاله نشان دادند $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت مختلط متناهی‌البعد $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}^{1,1} \subseteq \mathcal{T},$$

که در آن

$$\mathcal{A} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}^m, \quad \mathcal{A}(T) = [\langle T f_k, f_k\rangle]_{1\leq k\leq m},$$

$$\mathcal{S}^{1,1} = \{T \in \mathrm{Sym}(\mathcal{H}) : \quad \mathrm{rank}(T) \leq 2, \quad \sigma(T) = \{\lambda_{max}, 0, \lambda_{min}\}, \ \lambda_{max} \geq 0 \geq \lambda_{min}\},$$

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{trace}(T) = 0\}$$

و λ_{max} بزرگترین مقدار ویژه‌ی T و λ_{min} کوچکترین مقدار ویژه‌ی T است.

مشابه قضیه‌ی ۶.۲ برای فضاهای هیلبرت حقیقی نامتناهی‌البعد به صورت زیر برقرار است.

قضیه ۷.۲. *یک قاب $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ در فضای هیلبرت حقیقی نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر برای هر افراز $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ از I، داشته باشیم $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp} \perp \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp}$.*

اثبات. ابتدا فرض کنید برای هر افراز $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ از I، داریم $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp} \perp \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp}$ و $|\langle f, f_k\rangle| = |\langle g, f_k\rangle|$، برای هر $k \in I$. فرض کنید $I_1 := \{k \in I : \langle f, f_k\rangle = -\langle g, f_k\rangle\}$ و $I_2 := I \setminus I_1$. بنابراین $f + g \in span\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp}$ و $f - g \in span\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp}$. در نتیجه طبق فرض داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f + g, f - g\rangle \\ &= \|f\|^2 - \|g\|^2 - \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle \\ &= \|f\|^2 - \|g\|^2 \end{aligned}$$

و بنابراین $\|f\| = \|g\|$. در حالتی که $I_1 = \emptyset$ یا $I_2 = \emptyset$ داریم $f = \mp g$ و لذا باز هم داریم $\|f\| = \|g\|$.

حال برعکس فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت حقیقی نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ و $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ افراز دلخواهی از I باشند. برای هر $f \in \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp}$ و $g \in \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp}$ داریم $\langle f, f_k\rangle = 0$، برای هر $k \in I_1$ و $\langle g, f_k\rangle = 0$، برای هر $k \in I_2$. بنابراین $\langle f + g, f_k\rangle =$

$\langle f-g, f_k \rangle -$، برای هر $k\in I_1$ و $\langle f+g, f_k \rangle = \langle f-g, f_k \rangle$، برای هر $k\in I_2$. لذا $|\langle f+g, f_k\rangle| = |\langle f-g, f_k \rangle|$، برای هر $k\in I$. بنابراین از بازیاب نرم بودن $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ نتیجه می‌شود $\|f+g\| = \|f-g\|$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|f\|^2+\|g\|^2+2\langle f,g\rangle &= \|f+g\|^2\\ &= \|f-g\|^2\\ &= \|f\|^2+\|g\|^2-2\langle f,g\rangle .\end{aligned}$$

در این صورت داریم $\langle f,g\rangle = 0$ و لذا

$$\overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_1} \perp \overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_2}.$$

□

سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا قضیه‌ی فوق برای فضاهای هیلبرت مختلط هم درست است؟
حداقل یک طرف قضیه‌ی فوق برای فضاهای هیلبرت مختلط در قضیه‌ی زیر ثابت می‌شود ولی برای اثبات یا رد طرف دیگر قضیه چیزی بدست نیامده است.

قضیه ۸.۲. *اگر $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت مختلط نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه برای هر افراز $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ از I، داریم $\overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_1} \perp \overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_2}$.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت مختلط نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ و $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ افراز دلخواهی از I باشند. برای هر $f\in \overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_1}$ و $g\in \overline{span}\{f_k\}^{\perp}_{k\in I_2}$ داریم $\langle f, f_k\rangle = 0$، برای هر $k\in I_1$ و $\langle g, f_k\rangle = 0$، برای هر $k\in I_2$. بنابراین $\langle f+g, f_k\rangle = -\langle f-g, f_k\rangle$، برای هر $k\in I_1$ و $\langle f+g, f_k\rangle = \langle f-g, f_k\rangle$، برای هر $k\in I_2$. لذا $|\langle f+g, f_k\rangle| = |\langle f-g, f_k\rangle|$، برای هر $k\in I$. بنابراین از بازیاب نرم بودن $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ نتیجه می‌شود $\|f+g\| = \|f-g\|$. در این

صورت داریم

$$\begin{aligned}\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2Re\langle f,g\rangle &= \|f+g\|^2\\ &= \|f-g\|^2\\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2Re\langle f,g\rangle.\end{aligned}$$

و لذا $Re\langle f,g\rangle = 0$. از طرفی $\langle f+ig,f_k\rangle = -\langle f-ig,f_k\rangle$، برای هر $k\in I_1$ و $\langle f+ig,f_k\rangle = \langle f-ig,f_k\rangle$، برای هر $k\in I_2$. لذا $|\langle f+ig,f_k\rangle| = |\langle f-ig,f_k\rangle|$، برای هر $k\in I$. بنابراین از بازیاب نرم بودن $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ نتیجه می‌شود $\|f+ig\| = \|f-ig\|$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|f\|^2 + \|g\|^2 - 2Re\, i\langle f,g\rangle &= \|f+g\|^2\\ &= \|f-g\|^2\\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2Rei\langle f,g\rangle.\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد $Im\langle f,g\rangle = -Re\, i\langle f,g\rangle = 0$. در این صورت داریم $\langle f,g\rangle = 0$ و لذا

$$\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp} \perp \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp}.$$

□

نتیجه ۹.۲. *اگر $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت مختلط نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه برای هر افراز $\{I_j\}_{j=1}^{2}$ از I، داریم $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2} \subseteq \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}^{\perp}$ و $\overline{span}\{f_k\}_{k\in I_2}^{\perp} \subseteq \overline{span}\{f_k\}_{k\in I_1}$.*

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که در واقع پایه‌های ریس بازیاب نرم دقیقا پایه‌های ریس متعامد هستند.

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنید $\mathcal{F}=\{f_k\}_{k\in I}$ یک پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت $\mathcal{F}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ متعامد باشد.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{F}$ بازیاب نرم و $i \neq j \in I$. قرار دهید $J := I \setminus \{i\}$. از آنجایی که $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ پایه‌ی ریس است لذا یک $0 \neq f \in \overline{span}\{f_k\}_{k\in J}^{\perp}$ وجود دارد. با استفاده از نتیجه‌ی ۹.۲ داریم $f = \lambda f_i$، به ازای یک $\lambda \neq 0$. در این صورت داریم $\left\langle f_i, f_j \right\rangle = \frac{1}{\lambda}\left\langle f, f_j \right\rangle = 0$ ، چون $j \in I$. لذا $\mathcal{F}$ متعامد است.

برعکس فرض کنید $\mathcal{F}$ متعامد باشد. بنابراین $\{\frac{f_k}{\|f_k\|}\}_{k\in I}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است. در این صورت $\{\frac{f_k}{\|f_k\|}\}_{k\in I}$ بازیاب نرم و در نتیجه $\mathcal{F}$ بازیاب نرم است. □

نتیجه ۱۱.۲. *فرض کنید $\{f_k\}_{k\in I}$ یک پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت $\{f_k\}_{k\in I}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر $\{\frac{f_k}{\|f_k\|}\}_{k\in I}$ پایه‌ی متعامد یکه باشد.*

نتیجه ۱۲.۲. *پایه‌ی ریس یکه $\{f_k\}_{k\in I}$ برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر $\{f_k\}_{k\in I}$ پایه‌ی متعامد یکه باشد.*

در مثال زیر یک دسته از پایه‌های ریس بازیاب نرم معرفی شده است.

مثال ۱۳.۲. فرض کنید $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و α_1, α_2 دو عدد مختلط ناصفر باشند. دنباله‌ی

$$\mathcal{F} = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$$

الف) یک پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است،

ب) یک پایه‌ی ریس بازیاب نرم برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر $|\alpha_1| = |\alpha_2|$.

اولا $\mathcal{F}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است، زیرا با استفاده از قانون متوازی اضلاع برای اعداد مختلط، برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\rangle|^2 + |\langle f, \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + |\langle f, e_4\rangle|^2 + \cdots \\ &= 2|\alpha_1|^2 |\langle f, e_1\rangle|^2 + 2|\alpha_2|^2 |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + |\langle f, e_4\rangle|^2 + \cdots\end{aligned}$$

و لذا $\mathcal{F}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با کران های پایین و بالای به ترتیب

$$\min\{۲|\alpha_۱|^۲, ۲|\alpha_۲|^۲, ۱\}$$

و

$$\max\{۲|\alpha_۱|^۲, ۲|\alpha_۲|^۲, ۱\}$$

است.

علاوه بر این می‌توان نشان داد که $\mathcal{F}$ امگا مستقل نیز هست و لذا $\mathcal{F}$ یک پایه‌ی ریس برای $\mathcal{H}$ است. از طرفی با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۲، $\mathcal{F}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر متعامد باشد. بنابراین با توجه به ساختار $\mathcal{F}$ دنباله‌ی $\mathcal{F}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} ۰ &= \langle f_۱, f_۲\rangle \\ &= \langle \alpha_۱ e_۱ + \alpha_۲ e_۲, \alpha_۱ e_۱ - \alpha_۲ e_۲\rangle \\ &= |\alpha_۱|^۲ - |\alpha_۲|^۲. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $\mathcal{F}$ بازیاب نرم است اگر و تنها اگر $|\alpha_۱| = |\alpha_۲|$.

در فضاهای هیلبرت نامتناهی‌البعد قاب‌های بازیاب فاز، تحت آشفتگی پایا نیستند[۶]. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که خاصیت بازیاب نرمی هم تحت آشفتگی پایا نیست.

قضیه ۱۴.۲. *فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه یک $\lambda > ۰$ و یک دنباله‌ی $\{f'_k\}_{k\in I} \subset \mathcal{H}$ صادق در نامساوی $\sup_{k\in I}\|f_k - f'_k\| < \lambda$، وجود دارد به‌طوری‌که $\{f'_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم نیست.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای $\mathcal{H}$ باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ بازیاب فاز نیست. بنابراین بردارهای $f, g \in \mathcal{H}$ وجود دارند به‌طوری‌که $|\langle f, f_k\rangle| = |\langle g, f_k\rangle|$، برای هر $k \in I$ درحالی که $f \neq \alpha g$، برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ با خاصیت $|\alpha| = ۱$. با استفاده از خاصیت بازیاب نرمی $\{f_k\}_{k\in I}$، داریم $\|g\| = \|f\|$ و لذا $f \neq \alpha g$، برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$.

بردار ناصفر $e \in \mathcal{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\langle e, f\rangle = \langle e, g\rangle = ۰$، چون اگر $\operatorname{span}\{f, g\}^\perp = \{۰\}$، آنگاه $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{f, g\}$، که این تناقض است. اکنون فرض کنید $\{f'_k\}_{k\in I}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ تعریف شده

با $f'_k := f_k - \frac{\lambda\langle f_k,e\rangle g}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}$، برای هر $k \in I$ باشد که در آن B کران بالای قاب $\{f_k\}_{k\in I}$ است. با استفاده از نامساوی شوارتز [۳] ، به وضوح داریم $\sup_{k\in I}\|f_k - f'_k\| < \lambda$. همچنین برای هر $k \in I$ داریم

$$
\begin{aligned}
|\left\langle f + \frac{\lambda\langle f,g\rangle e}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}, f'_k\right\rangle| &= |\left\langle f + \frac{\lambda\langle f,g\rangle e}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}, f_k - \frac{\lambda\langle f_k,e\rangle g}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}\right\rangle| \\
&= |\langle f, f_k\rangle| \\
&= |\langle g, f_k\rangle| \\
&= |\left\langle g + \frac{\lambda\|g\|e}{۲\sqrt{B}\|e\|}, f_k - \frac{\lambda\langle f_k,e\rangle g}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}\right\rangle| \\
&= |\left\langle g + \frac{\lambda\|g\|e}{۲\sqrt{B}\|e\|}, f'_k\right\rangle|.
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم $|\langle f,g\rangle| < \|f\|\|g\|$، زیرا $f \neq \alpha g$ برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$. لذا

$$
\begin{aligned}
\|f + \frac{\lambda\langle f,g\rangle e}{۲\sqrt{B}\|e\|\|g\|}\|^۲ &= \|f\|^۲ + \frac{\lambda^۲|\langle f,g\rangle|^۲}{۴B\|g\|^۲} \\
&< \|f\|^۲ + \frac{\lambda^۲\|f\|^۲\|g\|^۲}{۴B\|g\|^۲} \\
&= \|g\|^۲ + \frac{\lambda^۲\|g\|^۲}{۴B} \\
&= \|g + \frac{\lambda\|g\|e}{۲\sqrt{B}\|e\|}\|^۲.
\end{aligned}
$$

این نتیجه می‌دهد که $\{f'_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب نرم برای $\mathcal{H}$ نیست.

اکنون فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in I}$ قاب بازیاب فاز است. طبق حکم ۱.۲ از مرجع [۶] دنباله‌ی $\{f'_k\}_{k\in I}$ در $\mathcal{H}$ صادق در نامساوی $\sup_{k\in I}\|f_k - f'_k\| < \frac{\lambda}{۲}$، وجود دارد به‌طوری که $\{f'_k\}_{k\in I}$ یک قاب بازیاب فاز برای $\mathcal{H}$ نیست. اگر $\{f'_k\}_{k\in I}$ بازیاب نرم هم نباشد که مساله حل است. ولی اگر $\{f'_k\}_{k\in I}$ بازیاب نرم باشد، طبق قسمت اول اثبات دنباله‌ی $\{f''_k\}_{k\in I}$ در $\mathcal{H}$ صادق در نامساوی $\sup_{k\in I}\|f'_k - f''_k\| < \frac{\lambda}{۲}$،

---
[3] Schwarz

وجود دارد به‌طوری که $\{f_k''\}_{k\in I}$ بازیاب نرم نیست. با استفاده از نامساوی مثلث برای نرم ها، اکنون یک دنباله‌ی $\{f_k''\}_{k\in I}$ در $\mathcal{H}$ با خاصیت $\sup_{k\in I}\|f_k - f_k''\| < \lambda$ داریم، به‌طوری که $\{f_k''\}_{k\in I}$ قاب بازیاب نرم برای $\mathcal{H}$ نیست. $\square$

مراجع

[۱] S. Bahmanpour، J. Cahill، P.G. Casazza، J. Jasper and L.M. Woodland، Phase retrieval and norm retrieval، *Contemp. Math.*، ۶۵۰ (۲۰۱۵) ۳–۱۴.

[۲] R. Balan، P.G. Casazza and D. Edidin، On Signal Reconstruction without Phase، *Applied and Computational Harmonic Analysis*، ۲۰ ،(۲۰۰۶) ۳۴۵–۳۵۶.

[۳] R.H. Bates and D. Mnyama، The status of practical Fourier phase retrieval، in W. H. Hawkes، ed، *Advances in Electronics and Electron Physics.*، ۶۷ ،(۱۹۸۶) ۱–۶۴.

[۴] C. Becchetti and L.P. Ricotti، *Speech Recognition Theory and C++ Implementation*، CRC Press، Boca Raton، FL، ۱۹۹۴.

[۵] J.J. Benedetto، *Frame Decomposition، Sampling and Uncertainty Principle Inequalities in Wavelets*، Mathematics and applications، Wiley، ۱۹۹۹.

[۶] J. Cahill، P.G. Casazza and I. Daubechies، Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces، *Transactions of the AMS، Series B.*، ۳ ،(۲۰۱۶) ۶۳–۷۶.

[۷] P.G. Casazza and N. Leonhard، Classes of Finite Equal Norm Parseval Frames، *Contemp. Math.*، ۴۵۱ ،(۲۰۰۸) ۱۱–۳۱.

[۸] P.G. Casazza and L.M. Woodland، Phase retrieval by vectors and projections، *Contemp. Math.*، ۶۲۶ ،(۲۰۱۴) ۱–۱۷.

[۹] O. Christensen، *An Introduction to Frames and Riesz Bases*، Birkhäuser، Boston، Basel، Berlin، ۲۰۰۲.

[۱۰] J.R. Fienup، Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform، *Optics Letters.*، ۳ ،(۱۹۷۸) ۲۷–۲۹.

[۱۱] M.A. Hasankhani Fard، Norm Retrievable Frames in $\mathbb{R}^n$، *Elect. J. Lin. Alg.*، ۳۱ ،(۲۰۱۶) ۴۲۵–۴۳۲.

[۱۲] M.A. Hasankhani Fard and L. Mohammadi Rad، Norm retrievable frames and their perturbation in finite dimensional complex Hilbert spaces، *Numer. Funct. Anal. Optim.*، ۳۸ ،(۲۰۱۷) ۵۱–۵۷.

[۱۳] C. Heil and D. Walnut، Continuous and discrete wavelet transform، *SIAM Rev.*، ۳۱ ،(۱۹۶۹) ۶۶۶-۶۲۸.

[۱۴] J.M. Renes، R. Blume-Kohout، A.J. Scott and C.M. Caves، Symmetric informationally complete Quantum measurements، *J. Math. Phys.*، ۴۵ ،(۲۰۰۴) ۲۱۸۰-۲۱۷۱.

[۱۵] R. Young، *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*، Academic Press، New York، ۱۹۹۲.