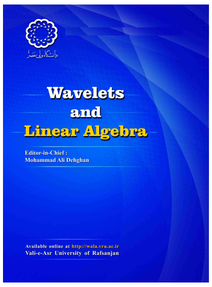
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱-۱۳



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

نگاشتهای مقدماتی روی عملگرهای بر فضاهای هیلبرت و قضیه فوگلد-پاتنم در رابطه با تبدیلات آلوثگ

سید محمد صادق نبوی ثالث[*آ]

[آ]*گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، استان خراسان رضوی، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۲ بهمن ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۱۴ فروردین ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱
ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:
قضیه فوگلد-پاتنام، تعمیم تبدیل آلوثگ، زیر فضای بسته کاهنده یک عملگر.

چکیده

در این مقاله تعمیم تبدیل آلوثگ $\tilde{A}_{(f_1,f_2)}$ را برای عملگر نوعی A که روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ تعریف شده است را نسبت به دو تابع پیوسته f_1 و f_2 در نظر گرفته‌ایم و برای نگاشت‌های مقدماتی δ و Δ یک نوع قضیه فوگلد-پاتنام را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. به طور خاص در بین نتایجی که به دست آورده‌ایم نشان داده‌ایم که اگر (A, B) در شرط فوگلد-پاتنام صدق کند آنگاه $(\tilde{A}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}_{(g_1,g_2)})$ نیز در آن صدق می‌کند.

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: sadegh.nabavi@gmail.com; sadegh.nabavi@hsu.ac.ir (سید محمد صادق نبوی ثالث).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.139440.1319

۱. مقدمه

قضیه فوگلد-پاتنام یکی از قضایای مهم در نظریه عملگرهاست. شواهد مهمی از کاربردهای این قضیه در فیزیک کوانتوم وجود دارد. این قضیه اولین بار در رابطه با جابجاگرهای عملگرهای نرمال روی فضاهای هیلبرت مطرح شده است. عملگر نرمال عملگری است که با الحاق خود جابجا می‌شود. در واقع فوگلد نشان داد که اگر یک عملگر نرمال با یک عملگر دلخواه جابجا شود الحاق آن عملگر نرمال نیز با آن عملگر دیگر جابجا می‌شود. سپس پاتنام تعمیم این قضیه را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۱. *[۴] فرض کنید A و B عملگرهای کراندار نرمالی روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشند و X عملگر دلخواهی روی $\mathscr{H}$ باشد که در شرط $AX = XB$ صدق کند. در این صورت $A^*X = XB^*$.*

اگر $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ نشان دهنده جبر همه عملگرهای خطی کراندار بر $\mathscr{H}$ باشد و $\delta_{A,B} : \mathbb{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{B}(\mathscr{H})$ به صورت $\delta_{A,B}X = AX - XB$ تعریف شود هسته این تبدیل یعنی $\mathscr{N}(\delta_{A,B})$ تشکیل شده از همه عملگرهای $X \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ که $AX = XB$. بنابراین قضیه فگلد-پاتنام را می‌توان به این صورت نیز نوشت:

اگر A و B عملگرهایی نرمال باشند و $X \in \mathscr{N}(\delta_{A,B})$ آنگاه $X \in \mathscr{N}(\delta_{A^*,B^*})$. به عبارت دیگر

$$\mathscr{N}(\delta_{A,B}) \subset \mathscr{N}(\delta_{A^*,B^*}).$$

اگر $\Delta_{A,B}(X) := AXB - X$ تعریف شود نتیجه مشابهی برای Δ توسط شولمن در [۱۴] به دست آمده است که نشان داده است برای عملگرهای نرمال A و B؛

$$\mathscr{N}(\Delta_{A,B}) \subset \mathscr{N}(\Delta_{A^*,B^*}).$$

تعمیم‌های بسیاری از این قضیه وجود دارد که عموما در این جهت بوده‌اند که شرط نرمال بودن را برای عملگرهای این قضیه سبک‌تر کنند. به عنوان مثال به مقالات [۱۰، ۱۳، ۶، ۱۵] و بعضی از مراجع موجود در آنها اشاره می‌کنیم. در واقع برای عملگرهای A و B نماد $(A,B) \in \mathrm{FP}(d)$ به این مفهوم است که

$$\mathscr{N}(d_{A,B}) \subset \mathscr{N}(d_{A^*,B^*})$$

که در آن d یکی از δ یا Δ است و در این حالت گفته می‌شود که دوتایی (A, B) در خاصیت فوگلد-پاتنام نسبت به نگاشت d صدق می‌کند. این نوع عملگرها را که روی $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ مانند δ یا Δ عمل می‌کنند را عملگرهای مقدماتی می‌نامیم. در [۱۰] نویسندگان نوعی قضیه فوگلد-پاتنام را برای تبدیلات آلوثگ یک عملگر در نظر گرفته‌اند. البته در آنجا فقط نگاشت مقدماتی δ مورد مطالعه قرار گرفته است.

برای عملگر A می‌توان تجزیه قطبی $A = U|A|$ را در نظر گرفت که در آن U یک عملگر طولپای جزئی است و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ است. تبدیل آلوثگ برای یک عملگر A با تجزیه‌ی قطبی $A = U|A|$ به صورت $\tilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. این تبدیل اولین بار توسط آلوثگ [۱] در جریان مطالعه رو عملگرهای غیر نرمال معرفی شد و پس از آن بسیار مورد توجه قرار گرفت [۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۶] . در [۱۲] تعمیمی از این تبدیل به صورت زیر در نظر گرفته شده است. برای عملگر A و دو تابع پیوسته f_1 و f_2

$$\tilde{A}_{(f_1,f_2)} := f_1(|A|)Uf_2(|A|)$$

تعریف می‌شود. در حالت خاص $f_1(t) = t^r$ و $f_2(t) = t^s$ این تعمیم قبلا در متون ریاضی در نظر گرفته شده است [۴] که به آن تبدیل (r, s)- آلوثگ عملگر A گفته می‌شود و با $\tilde{A}_{r,s}$ نشان داده می‌شود. در [۹] نویسندگان بررسی کرده‌اند که تحت چه شرایطی $(A, B) \in \mathrm{FP}(\delta)$ نتیجه می‌دهد $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathrm{FP}(\delta)$. همچنین شرایطی که رابطه $X \in \mathscr{N}(\delta_{(A,B)})$ رابطه $X \in \mathscr{N}(\delta_{(\tilde{A},\tilde{B})})$ را نتیجه می‌دهد و همین‌طور عکس این گزاره مورد مطالعه قرار گرفته است. در اینجا این مساله به طور گسترده‌تری مورد مطالعه قرار می‌گیرد و مساله‌ی مشابه برای نگاشت مقدماتی Δ نیز بیان و اثبات می‌شود.

لازم است که یادآوری کنیم که برای عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ برد A با $\mathscr{R}(A)$ و هسته آن با $\mathscr{N}(A)$ نشان داده می‌شود. زیر فضای بسته $\mathscr{M}$ از $\mathscr{H}$ را کاهنده عملگر A می‌نامیم هرگاه $A\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ و $A^*\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ هر دو با هم برقرار باشند. عملگرهای A و B را به طور یکانی هم‌ارز می‌نامیم هر گاه عملگر یکانی U وجود داشته باشد که $UA = BU$. در بعضی از مقالات تبدیل $*$-آلوثگ عملگر A به صورت $\tilde{A}^{(*)} = |A^*|^{\frac{1}{2}}U|A^*|^{\frac{1}{2}}$ در نظر گرفته شده است. در اینجا ما برای تابع‌های پیوسته f_1 و f_2 تعمیم این مفهوم را به صورت زیر معرفی می‌کنیم؛ $\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)} = f_1(|A^*|)Uf_2(|A^*|)$ و برای آن نیز نتایجی از نوع گفته شده در بند قبل در رابطه با قضیه فوگلد-پاتنام بیان می‌کنیم.

۲. نتایج

لم‌های زیر در بحث‌های این بخش بسیار اساسی‌اند. اولین لم در واقع به نوعی عکس قضیه فوگلد-پاتنام برای نگاشت‌های δ و Δ می‌باشد.

لم ۱.۲. *[۶] فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ و $(A, B) \in \mathrm{FP}(d)$ و فرض کنید $X \in \mathscr{N}(d_{A,B})$. در این صورت $\overline{\mathscr{R}(X)}$ کاهنده‌ی A است و $\mathscr{N}(X)^{\perp}$ کاهنده‌ی B و اگر $d = \delta$ آنگاه عملگرهای $A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}$ و $B|_{\mathscr{N}(X)^{\perp}}$ عملگرهای نرمال به طور یکانی هم ارز هستند. اگر $d = \Delta$ آنگاه عملگرهای $A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}$ و $\left(B|_{\mathscr{N}(X)^{\perp}}\right)^{-1}$ عملگرهایی نرمال و به طور یکانی هم‌ارز هستند.*

لم ۲.۲. *فرض کنید $A = U|A|$ و $B = V|B|$ تجزیه‌ی قطبی برای عملگرهای A و B باشند و f تابعی پیوسته بر $\Sigma = \sigma(|A|) \cup \sigma(|B|)$ باشد. در این صورت اگر $(A, B) \in \mathrm{FP}(d)$ و $X \in \mathscr{N}\left(d_{(A,B)}\right)$ آنگاه*

$$X \in \mathscr{N}\left(d_{(Uf(|A|),Vf(|B|))}\right) \bigcap \mathscr{N}\left(d_{(f(|A|)U^*,f(|B|)V^*)}\right).$$

اثبات. فرض کنید $d = \delta$. چون $(A, B) \in \mathrm{FP}(d)$ بنابراین $A^*X = XB^*$ که نتیجه می‌دهد $|A|^{۲}X = X|B|^{۲}$ که با به کار بردن استدلال سرراستی در حسابان تابعی خواهیم داشت $|A|X = X|B|$ که همراه با فرض قضیه ما را به رابطی

$$U|A|^nX = XV|B|^n. \tag{۱.۲}$$

می‌رساند. حال فرض کنید که $P_k(t)$ دنباله‌ای از چند جمله‌ای ها باشد که بر $\sigma(|A|) \cup \sigma(|B|)$ به طور یکنواخت به تابع f میل می‌کند. در نتیجه طبق (۱.۲) داریم $UP_k(|A|)X = XVP_k(|B|)$. بنابراین طبق قضیه حسابان تابعی

$$Uf(|A|)X = XVf(|B|).$$

اثبات $f(|A|)U^*X = Xf(|B|)V^*$ کاملا مشابه است. در حالتی که $d = \Delta$ توجه می‌کنیم که چون $(A, B) \in \mathrm{FP}(d)$ و $X \in \mathscr{N}\left(\Delta_{(A,B)}\right)$ آنگاه طبق لم قبل $\overline{\mathscr{R}(X)}$ کاهنده A است و $\mathscr{N}(X)^{\perp}$ کاهنده ی B و عملگرهای $A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}$ و $\left(B|_{\mathscr{N}(X)^{\perp}}\right)^{-1}$ عملگرهایی نرمال و به طور یکانی هم‌ارز هستند. یعنی می‌توان تجزیه $U|A| = N \oplus T$ و $V|B| = M \oplus S$

را به ترتیب روی $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{R}(X)} \oplus \mathscr{R}(X)^{\perp}$ و $\mathscr{K} = \mathscr{N}(X)^{\perp} \oplus \mathscr{N}(X)$ و

$$X = X_1 \oplus 0 : \mathscr{K}(= \mathscr{N}(X)^{\perp} \oplus \mathscr{N}(X)) \to \mathscr{H}(= \overline{\mathscr{R}(X)} \oplus \mathscr{R}(X)^{\perp})$$

در نظر گرفت که M و N عملگرهایی نرمال هستند. به سادگی دیده می‌شود که $|A|^2X|B^*|^2 = X$ که نتیجه می‌دهد $|A|X|B^*| = X$. اما $|A| = |N| \oplus |T|$ و $|B^*| = |M^*| \oplus |S^*| = |M| \oplus |S^*|$ زیرا M نرمال است و $|M| = |M^*|$. بنابراین

$$\begin{aligned} |A|X|B| &= (|N| \oplus |T|)(X_1 \oplus 0)(|M| \oplus |S|) = |N|X_1|M| \oplus 0 \\ &= |N|X_1|M^*| \oplus 0 = (|N| \oplus |T|)(X_1 \oplus 0)(|M^*| \oplus |S^*|) = |A|X|B^*| \end{aligned}$$

بنابراین $|A|X|B| = X$. در نتیجه $|A|U|A|XV|B|^2 = X$. از طرف دیگر می‌توان تجزیه $U = U_1 \oplus U_2$ را در نظر گرفت که برای آن می‌توان نوشت $N = U_1|N|$ و $T = U_2|T|$. بنابراین به ازای دو عملگر طولپای جزئی V_1 و V_2 داریم

$$\begin{aligned} U|A|^2XV|B|^2 &= (U_1|N|^2 \oplus U_2|T|^2)(X_1 \oplus 0)(V_1|M|^2 \oplus V_2|S|^2) \\ &= (|N|U_1|N| \oplus U_2|T|^2)(X_1 \oplus 0)(V_1|M|^2 \oplus V_2|S|^2) \\ &= (|N|U_1|N|X_1V_1|M|^2 \oplus 0) \\ &= (|N|U_1|N| \oplus |T|U_2|T|)(X_1 \oplus 0)(V_1|M|^2 \oplus V_2|S|^2) \\ &= |A|U|A|XV|B|^2 = X \end{aligned}$$

یعنی $U|A|^2XV|B|^2 = X$. به استقرائ می‌توان نشان داد که برای هر n طبیعی $U|A|^nXV|B|^n = X$ و بنابراین برای هر چند جمله ای $P(t)$ می‌توان به دست آورد که $UP(|A|)XVP(|B|) = X$ که با استفاده از یک استدلال سر راست در حسابان تابعی آنچه می‌خواهیم برای این حالت نیز نتیجه می‌شود. بقیه اثبات مشابه است. $\square$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید و $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ طوری که $(A, B) \in FP(d)$ که d یکی از δ یا Δ باشد. اگر*

h تابعی پیوسته روی $\Sigma = \sigma(|A|) \cup \sigma(|B|)$ باشد و f_1 و f_2 پیوسته روی $\sigma(|A|)$ و g_1 و g_2 تابعهای پیوسته روی $\sigma(|B|)$ باشند که $f_1 f_2 = g_1 g_2 = h$ و اگر $X \in \mathscr{N}(d_{A,B})$ آنگاه گزاره‌های زیر برقرار است؛

الف) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

ب) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

ج) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

د) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

ه) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}^{*}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}^{*}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

اثبات. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که اگر $X \in \mathscr{N}(d_{(A,B)})$ بنابراین طبق لم قبل $X \in \mathscr{N}(d_{(Uh(|A|),XVh(|B|))})$ و $X \in \mathscr{N}\left(d_{(f(|A|)U^*,f(|B|)V^*)}\right)$. فرض می‌کنیم $X \in \mathscr{N}(\Delta_{A,B})$. بنابراین $\overline{\mathscr{R}(X)}$ عملگر A را کاهش می‌دهد و $\mathscr{N}(X)^\perp$ عملگر B را کاهش می‌دهد و $U|A||_{\overline{\mathscr{R}(X)}}$ و $V|B||_{\mathscr{N}(X)^\perp}$ عملگرهایی نرمال هستند. بنابراین می‌توان تجزیه $U|A| = N \oplus T$ و $V|B| = M \oplus S$ را به ترتیب روی $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{R}(X)} \oplus \mathscr{R}(X)^\perp$ و $\mathscr{K} = \mathscr{N}(X)^\perp \oplus \mathscr{N}(X)$ در نظر گرفت. حال به سادگی دیده می‌شود که $|A| = |N| \oplus |T|$ و

$$|B| = |M| \oplus |S|$$

که متعاقبا با توجه به منحصر به فرد بودن تجزیه قطبی نتیجه می‌دهد که $U = U_1 \oplus U_2$ و $V = V_1 \oplus V_2$ و بنابراین $A = U_1|N| \oplus U_2|T|$ و $B = V_1|M| \oplus V_2|S|$. همچنین واضح است که

$$X : \mathscr{K} = \mathscr{N}(X)^\perp \oplus \mathscr{N}(X) \to \mathscr{H} = \overline{\mathscr{R}(X)} \oplus \mathscr{R}(X)^\perp$$

تجزیه‌ای به صورت $X = X_1 \oplus 0$ دارد که

$$X_1 : \mathscr{N}(X)^\perp \to \mathscr{R}(X)$$

تعریف می‌شود. اما طبق لم قبل $X \in \mathscr{N}\left(\Delta_{(Uh(|A|,Vh(|B|))}\right)$. از طرف دیگر $Uh(|A|) = U_1h(|N|)\oplus$ $U_2h(|T|)$ و $Vh(|A|) = V_1h(|M|) \oplus V_2h(|S|)$. حال با توجه به اینکه عملگرهای $U_1h(|N|)$ و $V_1h(|M|)$ نرمال هستند داریم $\tilde{A}_{f_1,f_2} = U_1h(|N|) \oplus \tilde{T}_{f_1,f_2}$ (و همین طور به شکل مشابه $\tilde{A}^{(*)}_{f_1,f_2} =$ $U_1h(|N|) \oplus \tilde{T}^{(*)}_{f_1,f_2}$ ، $\tilde{B}_{g_1,g_2} = V_1h(|M|) \oplus \tilde{S}_{g_1,g_2}$ و $\tilde{B}^{(*)}_{g_1,g_2} = V_1h(|M|) \oplus \tilde{S}^{(*)}_{g_1,g_2}$.)

از طرف دیگر چون $X \in \mathscr{N}\left(\Delta_{(Uh(|A|),Vh(|B|))}\right)$ یعنی $Uh(|A|)XVh(|B|) = X$ و این نیز به این معنی است که

$$\begin{aligned}
Uh(|A|)XVh(|B|) &= \begin{pmatrix} U_1h(|N|) & 0 \\ 0 & U_2h(|T|) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1h(|M|) & 0 \\ 0 & V_2h(|S|) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_1h(|N|)X_1V_1h(|M|) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{f_1,f_2}X\tilde{B}_{g_1,g_2} &= \begin{pmatrix} U_1h(|N|) & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{f_1,f_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1h(|M|) & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{g_1,g_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_1h(|N|)X_1V_1h(|M|) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X
\end{aligned}$$

یعنی $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$. اثبات در (ب)، (ج)، (د) و (ه) مشابه است. همچنین اگر فرض کنیم $d = \delta$ با تکرار استدلال بالا می‌توان (الف)–(ه) را نتیجه گرفت.

□

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ طوری که $(A, B) \in FP(\Delta)$. اگر h تابعی پیوسته روی $\Sigma = \sigma(|A|) \cup \sigma(|B|)$ باشد و f_1 و f_2 پیوسته روی $\sigma(|A|)$ و g_1 و g_2 تابع‌های پیوسته روی $\sigma(|B|)$ باشند که $f_1 f_2 = g_1 g_2 = h$ و اگر $X \in \ker(\Delta_{A,B})$ آنگاه*

$$\tilde{A}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}_{(g_1,g_2)} = \tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)} = \tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}_{(g_1,g_2)}$$

$$= \tilde{A}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)} = \tilde{A}^{*}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}^{*}_{(g_1,g_2)}.$$

حال می خواهیم عکس قضیه فوق را بیان کنیم

قضیه ۵.۲. *فرض کنید و $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ طوری که $(A, B) \in FP(d)$ که d یکی از δ یا Δ باشد. همچنین فرض کنید f_1 و f_2 پیوسته روی $\sigma(|A|)$ باشند و f_1 دارای وارون ضربی پیوسته باشد و g_1 و g_2 تابع‌های پیوسته روی $\sigma(|B|)$ باشند که $f_1(t) f_2(t) = g_1(t) g_2(t) = t$ و گزاره‌ی زیر برقرار باشد*

$$X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)} \right).$$

در این صورت

$$X \in \mathscr{N}\left(d_{(A,B)} \right).$$

اثبات. فرض می‌کنیم که $d = \Delta$. بنابراین $\tilde{A}_{(f_1,f_2)} X \tilde{B}_{(g_1,g_2)} = X$. این رابطه را از سمت راست در $g_1(|B|)$ و از سمت چپ در $f_1^{-1}(|A|)$ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت

$$f_1^{-1}(|A|) \tilde{A}_{(f_1,f_2)} f_1(|A|) f_1^{-1}(|A|) X \tilde{B}_{(g_1,g_2)} g_1(|B|) = f_1^{-1}(|A|) X g_1(|B|).$$

حال توجه می‌کنیم که

$$f_1^{-1}(|A|) \tilde{A}_{(f_1,f_2)} f_1(|A|) = A$$

و

$$\tilde{B}_{(g_1,g_2)} g_1(|B|) = g_1(|B|) B$$

که نتیجه می‌دهد $AWB = W$ که $W = f_1^{-1}(|A|)Xg_1(|B|)$. بنابراین $\overline{\mathscr{R}(W)}$ کاهنده A است و $\mathscr{N}(W)^\perp$ کاهنده B است و $A|_{\overline{\mathscr{R}(W)}}$ و $\left(B|_{\mathscr{N}(W)^\perp}\right)^{-1}$ عملگرهایی وارون پذیر، نرمال و به طور یکانی هم‌ارز هستند و با قرار دادن $N = A|_{\overline{\mathscr{R}(W)}}$ و $T = A|_{\mathscr{R}(W)^\perp}$ داریم $A = N \oplus T$ و همچنین با قرار دادن $M = B|_{\mathscr{N}(W)^\perp}$ و $S = B|_{\mathscr{N}(W)}$ خواهیم داشت $B = M \oplus S$. حال می‌توان عملگر

$$W : \mathscr{N}(W)^\perp \oplus \mathscr{N}(W) \to \overline{\mathscr{R}(W)} \oplus \mathscr{R}(W)^\perp$$

را به صورت $W_1 \oplus 0$ نوشت که $W_1 : \mathscr{N}(W)^\perp \to \overline{\mathscr{R}(W)}$ تعریف می‌شود. همچنین عملگر

$$X : \mathscr{N}(W)^\perp \oplus \mathscr{N}(W) \to \overline{\mathscr{R}(W)} \oplus \mathscr{R}(W)^\perp$$

به صورت

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

نوشته می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم $X_2 = 0$ ، $X_3 = 0$ و $X_4 = 0$. برای این منظور توجه می‌کنیم چون

$$W = f_1^{-1}(|A|)Xg_1(|B|)$$

و

$$f_1^{-1}(|A|) = \begin{pmatrix} f_1^{-1}(|N|) & 0 \\ 0 & f_1^{-1}(|T|) \end{pmatrix}$$

و

$$g_1(|B|) = \begin{pmatrix} g_1(|M|) & 0 \\ 0 & g_1(|S|) \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(|A|)Xg_1(|B|) &= \begin{pmatrix} f_1^{-1}(|N|) & 0 \\ 0 & f_1^{-1}(|T|) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1(|M|) & 0 \\ 0 & g_1(|S|) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1^{-1}(|N|)X_1g_1(|M|) & f_1^{-1}(|N|)X_2g_1(|S|) \\ f_1^{-1}(|T|)X_3g_1(|M|) & f_1^{-1}(|T|)X_4g_1(|S|) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $X_2g_1(|S|) = 0$، $X_3 = 0$ و $X_4g_1(|S|) = 0$ و بنابراین $X_4\tilde{S}_{(g_1,g_2)} = 0$ و $X_2\tilde{S}_{(g_1,g_2)} = 0$. از طرف دیگر چون M و N عملگرهایی نرمال هستند بنابراین $\tilde{A}_{(f_1,f_2)} = N \oplus \tilde{T}_{(f_1,f_2)}$ و $\tilde{B}_{(g_1,g_2)} = M \oplus \tilde{S}_{(g_1,g_2)}$. حال داریم

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(f_1,f_2)}X\tilde{B}_{(g_1,g_2)} &= \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{(f_1,f_2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{(g_1,g_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} NX_1M & NX_2\tilde{S}_{(g_1,g_2)} \\ 0 & \tilde{T}_{(f_1,f_2)}X_4\tilde{S}_{(g_1,g_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} NX_1M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $NX_1M = X_1$، $X_2 = 0$ و $X_4 = 0$. یعنی $X = X_1 \oplus 0$ و

$$AXB = (N \oplus T)(X_1 \oplus 0)(M \oplus S) = NX_1M \oplus 0 = X_1 \oplus 0 = X$$

که همان چیزی است که ما می‌خواستیم اثبات کنیم. در حالتی که $d = \delta$ اثبات کاملا مشابه است و ارایه آن به نظر زائد است.

$\square$

نتیجه ۶.۲. *تحت شرایط قضیه قبل گزاره زیر نیز نتیجه می‌شود*

$$X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\widetilde{A}^{*}_{(f_1,f_2)},\widetilde{B}^{*}_{(g_1,g_2)}\right)}\right).$$

به خصوص اگر $(A,B) \in \mathrm{FP}(d)$ *آنگاه* $\left(\widetilde{A}_{(f_1,f_2)}, \widetilde{B}_{(g_1,g_2)}\right) \in \mathrm{FP}(d)$.

با روشی مشابه قضیه قبل و در پرتو قضیه ۳.۲ می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۷.۲. *فرض کنید و* $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ *طوری که* $(A,B) \in FP(d)$ *که* d *یکی از* δ *یا* Δ *باشد. همچنین فرض کنید* f_1 *و* f_2 *پیوسته ودارای وارون ضربی پیوسته روی* $\sigma(|A|)$ *و* g_1 *و* g_2 *تابع‌های پیوسته و دارای وارون ضربی پیوسته روی* $\sigma(|B|)$ *باشند که* $t = f_1(t)f_2(t) = g_1(t)g_2(t)$ *وحداقل یکی ازگزاره‌های زیر برقرار باشد*

الف) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

ب) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

ج) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

د) $X \in \mathscr{N}\left(d_{\left(\tilde{A}_{(f_1,f_2)},\tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}\right)}\right)$.

در این صورت بقیه گزاره‌ها نیز بر قرار است و همچنین

$$X \in \mathscr{N}\left(d_{(A,B)}\right).$$

نتیجه ۸.۲. *فرض کنید* $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ *طوری که* $(A,B) \in FP(d)$ *که* d *یکی از* δ *یا* Δ *باشد. همچنین فرض کنید* f_1 *و* f_2 *پیوسته و دارای وارون ضربی پیوسته روی* $\sigma(|A|)$ *و* g_1 *و* g_2 *تابع‌های پیوسته و دارای وارون ضربی پیوسته روی* $\sigma(|B|)$ *باشند که* $t = f_1(t)f_2(t) = g_1(t)g_2(t)$. *در این صورت*

الف) $(\tilde{A}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}_{(g_1,g_2)}) \in \mathrm{FP}(d)$.

ب) $(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}) \in \mathrm{FP}(d)$.

ج) $(\tilde{A}^{(*)}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}_{(g_1,g_2)}) \in \mathrm{FP}(d)$.

د) $(\tilde{A}_{(f_1,f_2)}, \tilde{B}^{(*)}_{(g_1,g_2)}) \in \mathrm{FP}(d)$.

نکته ۹.۲. عکس نتیجه اخیر در حالت کلی بر قرار نیست. در حقیقت در [۱۰] برای ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

نشان داده شده است که $\tilde{A}$ خودالحاق است که به این مفهوم است که $(\tilde{A}, \tilde{A}) \in \mathrm{FP}(d)$ در حالی که به راحتی می‌توان ماتریس X را یافت که $X \in \mathscr{N}(d_{(A,A)})$ اما $X \notin \mathscr{N}(d_{(A^*,A^*)})$. با این وجود در حالتی که با λ -تبدیل آلوثگ سرو کار داریم به نظر نمی‌رسد بتوان قضیه‌ای مشابه ثابت کرد. چرا که در مثال فوق در واقع معلوم می‌شود که $\tilde{A}$ خودالحاق است در حالی که A حتی نرمال نیست. اما مثالی مشابه مثال اخیر برای این نوع از تبدیلات آلوثگ نمی‌توان ارایه کرد. در واقع در [۱۲] ما نشان داده ایم که در حالت $\lambda \neq \frac{1}{2}$ خود الحاق بودن $\tilde{A}_\lambda$ خود الحاق بودن A را نتیجه نمی‌دهد البته با این شرط که عملگر A وارونپذیر باشد. بنابراین به نظر می‌رسد که در این زمینه مساله‌هایی برای تحقیق وجود دارد که نگارنده این مقاله در حال مطالعه‌ی بیشتر روی آنها است.

مراجع

[۱] A. Aluthge، On p-hyponormal operators for $0 < p < 1$، *Integral Equations Operator Theory*، ۱۳ ،(۱۹۹۰) .۳۱۵–۳۰۷

[۲] T. Ando، Aluthge transforms and the convex hull of the eigenvalues of a matrix، *Linear and Multilinear Algebra* ۵۲ ،(۲۰۰۴) .۲۹۲–۲۸۱

[۳] A. Antezana، P. Massey and D. Stojanoff، λ-Aluthge transforms and Shatten ideals، *Linear Algebra Appl.* ۴۰۵ ،(۲۰۰۵) .۱۹۹–۱۷۷

[۴] T. Furuta، *Invitation to Linear Operators؛ From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space* ، Taylor and Francis، London، .۲۰۰۱

[۵] F. Botelho، L. Molnár and G. Nagy، Linear bijections on von Neumann factors commuting with λ-Aluthge transform، *Bull. London Math. Soc.* ،(۲۰۱۶) ۴۸ :(۱) .۸۴–۷۴

[۶] B.P. Duggal and C.S. Kubrusly، A Putnam–Fuglede commutativity property for Hilbert space operators، *Linear Algebra Appl. Soc.*۴۵۸ ،(۲۰۱۴) .۱۱۵–۱۰۸

[۷] M. Ito، T. Yamazaki، and M. Yanagida، On the polar decomposition of the Aluthge transformation and related results، *J. Operator Theory*، ۵۱ ،(۲۰۰۴) .۳۱۹–۳۰۳

[۸] I. B. Jung، E. Ko and C. Pearcy، Aluthge transforms of operators، *Integral Equations Operator Theory*، ۳۷ ،(۲۰۰۰) .۴۴۸–۴۳۷

[۹] M.S. Moslehian and S.M.S. Nabavi Sales، Some conditions implying normality of operators، *C. R. Acad. Sci. Paris*، *Ser. I*، ۳۴۹ ،(۲۰۱۱) .۲۵۴–۲۵۱

[۱۰] M.S. Moslehian and S.M.S. Nabavi Sales، Fuglede–Putnam type theorem via the Aluthge transform، *Positivity*، ۳۴۹ ،(۲۰۱۳) .۱۶۲–۱۵۱

[۱۱] S.M.S. Nabavi Sales، A note on λ–Aluthge transforms of operators، *Wavelets and Linear Algebra*، ۳ ،(۲۰۱۶) .۶۰–۵۳

[۱۲] S.M.S. Nabavi Sales، On the Hyponormal Property of Operators، *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*، ۱۵ (۲۰۲۰)،no ،۲ .۳۰–۲۱

[۱۳] A. Oloomi and M. Rajabalipour، Operators with normal Aluthge transforms، *C. R. Acad. Sci. Paris*، *Ser. I*، ۳۵۰ ،(۲۰۱۲) .۲۶۶–۲۶۳

[۱۴] V.S. Shulman، On linear equation with normal coefficients،، *Sov. Math.*، *Dokl.*، ۲۷،(۱۹۸۳)(۳) ۷۲۹–۷۲۶ .

[۱۵] A. Uchiyama and K. Tanahashi، *Fuglede–Putnam theorem for p–hyponorma or log–hyponormal operators*، *Glasgow Math. J.*، ۴۴ ،(۲۰۰۲) .۴۱۰–۳۹۷

[۱۶] T. Yamazaki، An expression of spectral radius via Aluthge transformation، *Proc. Amer. Math. Soc.*، ۱۳۰ ،(۲۰۰۲) .۱۱۳۷–۱۱۳۱