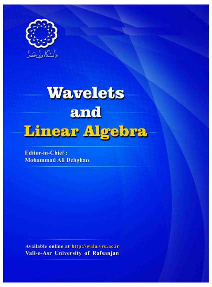
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۲) (۱۳۹۸) ۷۵-۹۲



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

حل معادلات عملگری $X - AXB = C$ و $AX + X^*C = B$ در C^*- مدول های هیلبرت

مهدی محمدزاده کاریزکی[*][آ]، امین حسینی[ب]

[آ] *استادیار، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه، ایران*
[ب] *استادیار ریاضی، مرکز آموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۶ مرداد ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۲۵ آبان ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸

ادیتور رابط: قاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:
معادلات عملگری، وارون مور-پنروز، C^*- مدول هیلبرت.

چکیده

معادلات $X - AXB = C$ و $AX + X^*C = B$ دارای کاربرد وسیعی در نظریه کنترل و سیستم های خطی می باشند. در این پژوهش به بررسی شرط لازم و کافی برای وجود جواب آن‌ها با در نظرگرفتن شرایطی پرداخته شده است. برای پیدا کردن جواب دقیق معادله دوم از نمایش ماتریسی عملگرها استفاده شده است، که این امکان را فراهم آورده، که بتوان جواب معادله را بر حسب وارون مور-پنروز عملگرها بیان نمود.

[*]نویسنده مسئول

۱. مقدمه و پیشنیازها

C^*- مدول های هیلبرت تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند، که حاصل ضرب داخلی آن‌ها، به‌جای میدان اعداد مختلط در یک C^*- جبر قرار می گیرد. مدول‌های هیلبرت ابزارهای مفیدی در نظریه AW^*- جبر [۱۰] ، نظریه عملگرهای جبری و نظریه فضاهای عملگری هستند. برخی از ویژگی های اساسی فضاهای هیلبرت با تنظیمات C^*- مدول های هیلبرت در حالت کلی معتبر نیستند. به‌عنوان مثال، یک زیرمدول بسته ممکن است متمم پذیر متعامد نباشد یا یک عملگر خطی کراندار بین C^*- مدول‌های هیلبرت، ممکن است الحاق پذیر نباشد [۸]. از این‌رو پژوهش در C^*- مدول‌های هیلبرت، برای محققان جذاب بوده، چه بسا در حالتی که نتایج مشابه آن در فضاهای هیلبرت دوباره بدست آمده باشد، البته در برخی موارد نتایج بسیار کلی تر و جامع تری بدست آمده است.

بعد از معرفی C^*- مدول‌های هیلبرت بر روی C^*- جبرهای جابجایی، توسط کاپلانسکی [۵]، سپس کاسپاروف با استفاده از مفهوم C^*- مدول‌های هیلبرت نتایج بسیار عمیقی در $KK-$ نظریه به دست آورد [۶].

امروزه C^*- مدول‌هاي هيلبرت يك ابزار استاندارد در نظريه عملگرها محسوب مي‌شود، رده‌ي مهمی از عملگرها بروي C^*- مدول‌هاي هيلبرت، عملگرهایی با برد بسته می باشند. لنس در [۸] برخی از خاصیت های این عملگرها را مورد توجه قرار داد، که قضیه ۱.۱ نمونه ای از آن است. شو و شنگ در [۱۲] نشان دادند که عملگرهای الحاق‌پذیر کراندار بین دو C^*- مدول هیلبرت، بردی بسته دارند اگر و تنها اگر وارون مور-پنروز داشته باشند.

با توجه به ساختار مقاله، تعریف های C^*- مدول هیلبرت، وارون مور-پنروز و تجزیه عملگرها الزامی است.

یک C^*- مدول پیش هیلبرت راست روی یک C^*- جبر $\mathfrak{A}$ یک $\mathfrak{A}-$ مدول $\mathcal{X}$ است که به نگاشت $\langle .,. \rangle : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \longrightarrow \mathfrak{A}$، مجهز شده باشد و برای هر $x, y, z \in \mathcal{X}$، $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathfrak{A}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$؛

آدرس ایمیلها: m.mohammadzadeh@torbath.ac.ir (مهدی محمدزاده کاریزکی)، hosseini.amin82@gmail.com (امین حسینی).

http://doi.org/10.22072/wala.2019.112027.1241

(ب) $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$؛

(ج) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^*$؛

(د) $\langle x, x\rangle \geq ۰$ و $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

نگاشت $\langle .,. \rangle$ ضرب داخلی $\mathfrak{A}-$ مقدار نامیده می شود. یک $\mathfrak{A}-$ مدول پیش هیلبرت، $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت نامیده می شود اگر نسبت به نرم $\| . \| := \|\langle .,. \rangle\|^{\frac{۱}{۲}}$ کامل باشد. به‌عنوان مثال هر C^*- جبر $\mathfrak{A}$ یک $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت، با ضرب داخلی $\langle x, y\rangle = x^*y$ است.

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت باشند، در این صورت مجموعه همه نگاشت‌های الحاق‌پذیر $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ نمایش می دهیم، که نگاشت $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ موجود باشد و آن را الحاق A می نامیم، به طوری که $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$، برای هر $x \in \mathcal{X}$ و $y \in \mathcal{Y}$. واضح است که، هر عنصر A از $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ باید یک عملگر خطی کراندار باشد، همچنین $\mathfrak{A}-$ خطی باشد، یعنی برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in \mathcal{X}$، $A(xa) = (Ax)a$ خطی باشد [۸، صفحه ۸]. برای راحتی در نوشتن، بجای $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ از $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ و از نمادهای $\mathcal{N}(\cdot)$ و $\mathcal{R}(\cdot)$، به ترتیب برای هسته و برد یک عملگر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت باشد و $\mathcal{M}$ یک زیر مدول بسته از آن باشد. زیر مدول $\mathcal{M}$ را متمم متعامد گوییم، هرگاه $\mathcal{X} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$، که در آن $\mathcal{M}^\perp := \{y \in \mathcal{X} : \langle x, y\rangle = ۰ \quad x \in \mathcal{M}$ برای هر $\}$. در این حالت تصویر متعامد از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{M}$ را با $P_{\mathcal{M}}$ نشان می دهیم. تصویر متعامد یعنی عملگری که خودتوان و خودالحاق است. یادآوری می‌کنیم که هر زیر مدول بسته از یک C^*- مدول هیلبرت، لزومی ندارد که متمم متعامد باشد. با این وجود قضیه زیر ثابت می‌کند که زیر مدول هایی هستند که متمم متعامد هستند.

قضیه ۱.۱. *(قضیه ۲.۳ [۸]) فرض کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر $\mathfrak{A}$ باشند و برد عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ بسته باشد. دراین صورت؛*

(آ) $\mathcal{N}(A)$ در $\mathcal{X}$ متمم پذیر متعامد با متمم $\mathcal{R}(A^*)$ است،

(ب) $\mathcal{R}(A^*)$ در $\mathcal{Y}$ متمم پذیر متعامد با متمم $\mathcal{N}(A)$ است،

(ج) همچنین عملگر $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ دارای برد بسته است.

نظر به معادل بودن عملگری که بردی بسته دارد با وجود وارون مور-پنروز، در ادامه به تعریف این وارون پرداخته می شود.

فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$، وارون مور-پنروز A را (در صورت وجود) با $A^\dagger$ نمایش می دهیم، که یکتاست و در شرایط زیر صدق می کند:

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad \left(AA^\dagger\right)^* = AA^\dagger, \quad \left(A^\dagger A\right)^* = A^\dagger A$$

براساس تعریف وارون مور-پنروز $A^\dagger A$ و $AA^\dagger$ تصاویری متعامد هستند. همچنین آن‌ها به ترتیب، تصاویری متعامدی به $\mathcal{R}(A^*)$ و $\mathcal{R}(A)$ هستند. بوضوح A وارون مور-پنروز دارد، اگر و تنها اگر A^* نیز اینچنین باشد. در این حالت $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$. متذکر می شویم که اگر $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$، عملگرهایی با برد بسته باشند. آنگاه $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ اگر و تنها اگر $AA^\dagger = BB^\dagger$.

بر اساس تعریف وارون مور-پنروز، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \mathcal{R}(AA^\dagger), & \mathcal{R}(A^\dagger) &= \mathcal{R}(A^\dagger A) = \mathcal{R}(A^*), \\ \mathcal{N}(A) &= \mathcal{N}(A^\dagger A), & \mathcal{N}(A^\dagger) &= \mathcal{N}(AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^*), \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو زیر مدول بسته متمم متعامد، از $\mathfrak{A}$- مدول‌های هیلبرت $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشند. در این صورت $\mathcal{X} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$. از این‌رو، برای عملگر الحاق‌پذیر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ این زیر مدول های بسته‌ی متمم متعامد، می تواند یک نمایش ماتریسی به صورت زیر القا کند:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{۱.۱}$$

که در آن $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$، $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N})$، $A_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\perp)$ و $A_4 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp)$.

پس با استفاده از تصاویر متعامد می توان نوشت: $A_1 = P_\mathcal{N} A P_\mathcal{M}$، $A_2 = P_\mathcal{N} A(1 - P_\mathcal{M})$، $A_3 = (1 - P_\mathcal{N})AP_\mathcal{M}$ و $A_4 = (1 - P_\mathcal{N})A(1 - P_\mathcal{M})$ [۳].

از این رو به بیان لم زیر می‌پردازیم که اثبات آن را می توانید در [۹، نتیجه ۲.۱] مشاهده نمایید.

لم ۲.۱. *فرض کنید که برد عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ بسته باشد. آنگاه عملگر A با زیرمدول‌های متمم متعامد*

$\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$ دارای تجزیه ماتریسی به صورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

که A_1 وارون پذیر است و در این حالت نمایش ماتریسی وارون مور-پنروز آن به صورت خواهد بود

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

معادلات ماتریسی $X - AXB = C$ و $AX + X^TC = B$ دارای کاربردهای وسیعی در نظریه سیستم‌های خطی و نظریه کنترل هستند، که در حالت ماتریس های متناهی البعد مبادرت به حل آن ها شده است [۲، ۱، ۴].

معادله ماتریسی $AX + X^TC = B$ معادله سیلوستر نامیده می‌شود، که به حالت خاص آن، هنگامی که $A = C^T$ معادله لیاپانوف گفته می‌شود (X^T ترانهاده ماتریس X است.) [۱۱].

در این مقاله شرایطی را برای حل‌پذیری این دو معادله در C^*- مدول های هیلبرت فراهم می کنیم. در بخش ۲، شرط لازم و کافی را برای حل پذیری معادله $X - AXB = C$ بیان می‌کنیم. در بخش ۳، شرط حل‌پذیری و جواب معادله سیلوستر $AX + X^*C = B$ وقتی که A و C عملگرهایی وارون پذیرند، را بیان می کنیم. با بکار بردن این نتیجه و با استفاده از تجزیه عملگرها به ماتریسی‌های بلوکی روشی را برای حل این معادله، وقتی که A و C عملگرهایی با برد بسته هستند، ارائه می دهیم و جواب آن را بر حسب وارون مور-پنروز این عملگرها بیان می‌کنیم.

۲. حل پذیری معادله $X - AXB = C$.

در این بخش شرط لازم و کافی برای حل پذیری معادله $X - AXB = C$ را بدست می‌آوریم. از این‌رو بیان لم زیر ضروری است.

لم ۱.۲. *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک $\mathfrak{A}-$ مدول هیلبرت باشد. اگر عملگر* $R = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$

وارون‌پذیر باشد، آنگاه $FF^* + GG^*$ در $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ وارون‌پذیر است.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت قرار می‌دهیم ۱ = $\|FF^* + GG^*\|$. نشان می‌دهیم که $FF^* + GG^*$ از پایین کران دار است. فرض کنید از پایین کران دار نباشد. دنباله $\{x_n\} \in \mathcal{X}$ با ۱ = $\|x_n\|$ را در نظر می گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}
\|R^*(\circ, x_n)\|^{۲} &= \|\langle R^*(\circ \oplus x_n), R^*(\circ \oplus x_n)\rangle\| \\
&= \|\langle RR^*(\circ \oplus x_n), (\circ \oplus x_n)\rangle\| \\
&= \|\langle \begin{bmatrix} DD^* + EE^* & DF^* + EG^* \\ FD^* + GE^* & FF^* + GG^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & x_n \end{bmatrix} \rangle\| \\
&= \|\langle \begin{bmatrix} \circ & DF^* + EG^*(x_n) \\ \circ & FF^* + GG^*(x_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & x_n \end{bmatrix} \rangle\| \\
&= \|\langle FF^* + GG^*(x_n), (x_n)\rangle\| = \circ
\end{aligned}$$

که با وارون‌پذیری R تناقض دارد. چون $FF^* + GG^*$ خودالحاق و از پایین کراندار است، پس بنا به [۸، لم ۳.۱] وارون‌پذیر می‌باشد. □

در قضیه زیر، شرط حل‌پذیری یک معادله عملگری را بیان می کنیم که عملگرهای ضریب، خود الحاق هستند.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک $\mathfrak{A}$- مدول هیلبرت باشد و $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ به طوری که A, B عملگرهایی خود الحاق باشند. آنگاه دو گزاره زیر معادل هستند:*

(۱) *معادله عملگری $X - AXB = C$ دارای جواب است،*

(۲) *عملگر $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ و عملگر وارون‌پذیر $R \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ وجود دارند، به طوری که در شرایط*

زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ \circ & I \end{bmatrix} R = S \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix} R = S \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix}.$$

اثبات. (۲)⇒(۱) با فرض اینکه $R = \begin{bmatrix} I & XB \\ \circ & I \end{bmatrix}$ و $S = \begin{bmatrix} I & X \\ \circ & I \end{bmatrix}$. عملگر R وارون پذیر است و وارون آن برابر $R^{-1} = \begin{bmatrix} I & -XB \\ \circ & I \end{bmatrix}$ است. چون معادله دارای جواب است، پس داریم

$$\begin{bmatrix} A & C \\ \circ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & XB \\ \circ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AXB + C \\ \circ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & X \\ \circ & I \end{bmatrix},$$

همچنین، شرط $\begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix} R = S \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix}$ بوضوح برقرار است.

(۱)⇒ (۲) با انتخاب عملگر وارون پذیر $R = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ و عملگر $S = \begin{bmatrix} H & K \\ M & N \end{bmatrix}$، و بازنویسی شرایط (۲) داریم

$$\begin{bmatrix} A & C \\ \circ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & K \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & K \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & B \end{bmatrix},$$

با ضرب ماتریس‌ها روابط زیر بدست می‌آیند

$$AD + CF = HA \qquad (۱.۲)$$

$$AE + CG = K \qquad (۲.۲)$$

$$F = MA \qquad (۳.۲)$$

$$G = N \qquad (۴.۲)$$

و

$$D = H \qquad (۵.۲)$$

$$E = KB \qquad (۶.۲)$$

$$BF = M \qquad (۷.۲)$$

$$BG = NB. \qquad (۸.۲)$$

با توجه به خود الحاق بودن A و B و بکاربردن تساوی‌های (۱.۲)، (۳.۲)، (۵.۲) و (۷.۲)، نتیجه می‌گیریم که

$$CFF^* = HAF^* - ADF^* = DAF^* - ADAF^*B, \qquad (۹.۲)$$

از طرفی عبارت‌های (۴.۲) و (۸.۲) جابجایی B و G را نتیجه می‌دهد، این نکته و تساوی‌های (۲.۲)، (۶.۲) و (۸.۲) منجر به تساوی زیر می‌شود

$$CGG^* = KG^* - AEG^* = KG^* - AKG^*B. \qquad (۱۰.۲)$$

با جمع تساوی‌های (۹.۲) و (۱۰.۲) به معادله زیر می‌رسیم

$$C(FF^* + GG^*) = (DAF^* + KG^*) - A(DAF^* + KG^*)B. \qquad (۱۱.۲)$$

با استفاده از (۸.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$GG^*B = GBG^* = BGG^*$$

رابطه های (۳.۲) و (۷.۲) نتیجه می دهند که

$$BFF^* = MF^* = MAM^* = MAF^*B = FF^*B.$$

بنابراین B با FF^* و GG^* جابجا می شود، پس با $FF^* + GG^*$ جابجا می شود.

چون R وارون پذیر است، لم ۱.۲ نتیجه می دهد که $FF^* + GG^*$ وارون پذیر است. بنابراین B با $(FF^* + GG^*)^{-1}$ جابجا می شود. با توجه به این جابجایی، عبارت $(FF^* + GG^*)^{-1}$ را از طرف راست در تساوی (۱۱.۲) ضرب می کنیم، که به تساوی زیر منتهی می‌شود

$$C = (DAF^* + KG^*)(FF^* + GG^*)^{-1} - A(DAF^* + KG^*)(FF^* + GG^*)^{-1}B. \quad (۱۲.۲)$$

که در واقع

$$X = (DAF^* + KG^*)(FF^* + GG^*)^{-1}$$

و این اثبات را کامل می کند. □

با استفاده از قضیه فوق، حل‌پذیری یک معادله عملگری را تحت شرایطی خاص بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک $\mathfrak{A}$– مدول هیلبرت باشد و $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ به طوری که A و C عملگرهایی وارون پذیر و عملگرهای $A^{-1}C^*$ و $(A^{-1})^*C$ خود الحاق باشند. آنگاه دوگزاره زیر معادل هستند:*

(۱) معادله عملگری $AX + X^*C = B$ دارای جواب است،

(۲) عملگر $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ و عملگر وارون‌پذیر $R \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ وجود دارند، به طوری که در شرایط

زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{bmatrix} A^{-1}C^{*} & A^{-1}B - A^{-1}B^{*}\left(A^{-1}\right)^{*}C \\ 0 & I \end{bmatrix} R = S \begin{bmatrix} A^{-1}C^{*} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \left(A^{-1}\right)^{*}C \end{bmatrix} R = S \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \left(A^{-1}\right)^{*}C \end{bmatrix}.$$

اثبات. با در نظرگرفتن معادله $AX + X^{*}C = B$ و ضرب از طرف راست در C^{-1} داریم

$$AXC^{-1} + X^{*} = BC^{-1} \tag{۱۳.۲}$$

دوباره با ضرب A^{-1} در طرف چپ معادله اصلی، داریم $X + A^{-1}X^{*}C = A^{-1}B$ و با الحاق گیری از این معادله داریم

$$X^{*} + C^{*}X(A^{-1})^{*} = (A^{-1}B)^{*} \tag{۱۴.۲}$$

با کم کردن معادله (۱۴.۲) از (۱۳.۲) نتیجه می‌شود

$$AXC^{-1} - C^{*}X\left(A^{-1}\right)^{*} = BC^{-1} - \left(A^{-1}B\right)^{*}.$$

بوضوح بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} X - A^{-1}C^{*}X\left(A^{-1}\right)^{*}C &= A^{-1}\left(BC^{-1} - \left(A^{-1}B\right)^{*}\right)C \\ &= A^{-1}B - A^{-1}B^{*}\left(A^{-1}\right)^{*}C \end{aligned}$$

با بکاربردن قضیه ۲.۲ معادل بودن (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. □

۳. حل پذیری معادله $AX + X^*C = B$.

در این بخش، ابتدا شرط حل پذیری و سپس جواب معادله عملگری

$$AX + X^*C = B \tag{۱.۳}$$

در حالتی که عملگرهای A و C وارون پذیرند، را بدست می‌آوریم. سپس با بکاربردن نتایج آن، شرط حل‌پذیری و جواب این معادله را در حالتی که A و C دارای بردهای بسته باشند، را بدست می‌آوریم.

قضیه زیر معادله (۱.۳) را در حالتی که عملگرهای ضریب وارون‌پذیرند، حل می‌نماید.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو $\mathfrak{A}$- مدول هیلبرت باشند و $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ و $C \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ عملگرهایی وارون پذیر باشد و $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:*

(۱) وجود دارد $X \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ که در معادله (۱.۳) صدق می‌کند،

(۲) $B = B^*(A^*)^{-1}C$.

هرکدام از شرط‌های (۱) یا (۲) برقرار باشد، هر جوابی از معادله (۱.۳) به صورت زیر است:

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}B + \frac{1}{2}ZC, \tag{۲.۳}$$

عملگر $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ دلخواه است و در شرط $Z = -Z^*A^*C^{-1}$ صدق می‌کند.

اثبات. (۲)$\Rightarrow$(۱) با قراردادن عبارت (۲.۳) در معادله (۱.۳) شرط (۲) بوضوح دیده می شود.

(۱)$\Rightarrow$(۲) با توجه به وارون پذیری عملگرهای A و C معادله (۱.۳) را در نظر بگیرید. بنابراین داریم:

$$X = A^{-1}B - A^{-1}X^*C$$

و

$$A^{-1}X^{*} = A^{-1}BC^{-1} - XC^{-1}.$$

اکنون به محاسبه X می پردازیم

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}A^{-1}B + (\frac{1}{2}A^{-1}BC^{-1} - A^{-1}X^{*})C \\ &= \frac{1}{2}A^{-1}B + (\frac{1}{2}[A^{-1}X^{*} + XC^{-1}] - A^{-1}X^{*})C \\ &= \frac{1}{2}A^{-1}B + (\frac{1}{2}(XC^{-1} - A^{-1}X^{*}))C \\ &= \frac{1}{2}A^{-1}B + \frac{1}{2}ZC. \end{aligned}$$

در حالتی که $Z = XC^{-1} - A^{-1}X^{*}$.

با در نظر گرفتن دوباره معادله (۱.۳) داریم:

$$X^{*} = BC^{-1} - AXC^{-1}$$

و

$$XC^{-1} = A^{-1}BC^{-1} - A^{-1}X^{*}.$$

با محاسبه X^* داریم :

$$\begin{aligned} X^* &= \frac{1}{2}BC^{-1} + A(\frac{1}{2}A^{-1}BC^{-1} - XC^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}BC^{-1} + A(\frac{1}{2}[XC^{-1} + A^{-1}X^*] - XC^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}BC^{-1} + A(\frac{1}{2}(A^{-1}X^* - XC^{-1})) \\ &= \frac{1}{2}BC^{-1} - \frac{1}{2}AZ. \end{aligned}$$

چون (۲) برقرار است، یعنی $B = B^*(A^*)^{-1}C$ یا $BC^{-1} = (A^{-1}B)^*$ و Z بدست آمده، در شرط $Z = -Z^*A^*C^{-1}$ صدق کند، آنگاه معادله جواب دارد.

□

قضیه زیر، شرط حل پذیری و جوابی برای معادله (۱.۳) را در حالتی که برد عملگرهای A و C بسته باشند، ارائه می دهد.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو $\mathfrak{A}$– مدول هیلبرت باشند و برد عملگرهای $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ و $C \in \mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ بسته باشند به طوری که $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(C^*)$ و $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(C)$ و $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:*

(۱) $X \in \mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ جوابی از معادله (۱.۳) است،

(۲) $BC^\dagger C = B^*(A^*)^\dagger C$ و $(1 - AA^\dagger)B(1 - C^\dagger C) = 0$.

هرکدام از شرط های (۱) یا (۲) برقرار باشد، هر جوابی از معادله (۱.۳) به صورت زیر است:

$$X = A^\dagger B - \frac{1}{2}A^\dagger BC^\dagger C + (1 - A^\dagger A)Y + \frac{1}{2}A^\dagger AZC, \tag{۳.۳}$$

عملگر $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ دلخواه است و در شرط $A^\dagger A(Z + Z^*A^*C^\dagger)CC^\dagger = 0$ صدق می کند.

اثبات. (۲)⇐(۱) اگر معادله (۱.۳) دارای جواب باشد، با قراردادن (۳.۳) در معادله به وضوح داریم، که $BC^\dagger C = B^*(A^*)^\dagger C$. همچنین با ضرب $1 - AA^\dagger$ از طرف چپ و $1 - C^\dagger C$ از راست، نتیجه می‌گیریم

که

$$(۱ - AA^\dagger)B(۱ - C^\dagger C) = (۱ - AA^\dagger)(AX + X^*C)(۱ - C^\dagger C)$$
$$= (۱ - AA^\dagger)AX(۱ - C^\dagger C) + (۱ - AA^\dagger)X^*C(۱ - C^\dagger C) = ۰.$$

(۱)⇐ (۲) چون $\mathcal{R}(A)$ و $\mathcal{R}(C)$ بسته است، پس داریم $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(C) \oplus \mathcal{N}(C^*)$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(C^*) \oplus \mathcal{N}(C)$. از این رو نمایش‌های ماتریسی A و C به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}$$

و

$$C = \begin{bmatrix} C_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^*) \end{bmatrix},$$

لم ۲.۱ نتیجه می دهد که $A_۱$ و $C_۱$ وارون‌پذیرند. شرط های $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(C^*)$ و $(۱ - AA^\dagger)B(۱ - C^\dagger C) = ۰$ ایجاب می‌کند که عملگر B نمایش ماتریسی به صورت زیر داشته باشد:

$$B = \begin{bmatrix} B_۱ & B_۲ \\ B_۳ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}.$$

فرض کنید که نمایش ماتریسی X نیز به صورت زیر باشد:

$$X = \begin{bmatrix} X_۱ & X_۲ \\ X_۳ & X_۴ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

آنگاه $AX + X^*C = B$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_1^* & X_3^* \\ X_2^* & X_4^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} A_1X_1 & A_1X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_1^*C_1 & 0 \\ X_2^*C_1 & 0 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} A_1X_1+X_1^*C_1 & A_1X_2 \\ X_2^*C_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

یعنی

$$A_1X_1 + X_1^*C_1 = B_1, \tag{۴.۳}$$

$$A_1X_2 = B_2, \tag{۵.۳}$$

$$X_2^*C_1 = B_3. \tag{۶.۳}$$

با توجه به وارون‌پذیری A_1 و C_1 نمایش ماتریسی شرط $BC^\dagger C = B^*(A^*)^\dagger C$ به این صورت است که

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1^* & B_3^* \\ B_2^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1^*(A_1^*)^{-1}C_1 & 0 \\ B_2^*(A_1^*)^{-1}C_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$B_1 = B_1^*(A_1^*)^{-1}C_1, \quad (۷.۳)$$
$$B_3 = B_2^*(A_1^*)^{-1}C_1. \quad (۸.۳)$$

تساوی (۷.۳) شرط دوم قضیه ۱.۳ را فراهم می‌کند، این قضیه ایجاب می‌کند که، معادله (۴.۳) جوابی به صورت زیر داشته باشد:

$$X_1 = \frac{1}{2}A_1^{-1}B_1 + \frac{1}{2}Z_1C_1$$

آن جا که $Z_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(C))$ و در رابطه $Z_1 = -Z_1^*A_1^*C_1^{-1}$ صدق می‌کند. تساوی (۸.۳) نتیجه می‌دهد که

$$B_3C_1^{-1} = B_2^*(A_1^*)^{-1} = (A_1^{-1}B_2)^*. \quad (۹.۳)$$

معادلات (۵.۳) و (۶.۳) و تساوی (۹.۳) نتیجه می‌دهد، که $X_2 = A_1^{-1}B_2 = (B_3C_1^{-1})^*$. از این رو

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_1^{-1}B_1 + \frac{1}{2}Z_1C_1 & (A_1)^{-1}B_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

درآیه های X_3 و X_4 از ماتریس بلوکی X می‌توانند دلخواه در نظر گرفته شوند. از این رو عملگرهای دلخواه Y و Z

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}$$

و

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

که البته درآیه $Z_۱$ از عملگر دلخواه Z باید در شرط $Z_۱ = -Z_۱^*A_۱^*C_۱^{-۱}$ صدق کند. برآوردن این شرط با توجه به نمایش ماتریسی آن‌ها

$$
\begin{aligned}
A^\dagger AZCC^\dagger &= \begin{bmatrix} Z_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\
-A^\dagger AZ^*A^*C^\dagger &= \begin{bmatrix} -Z_۱^*A_۱^*C_۱^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

به این صورت است که $A^\dagger A(Z+Z^*A^*C^\dagger)CC^\dagger = ۰$. نمایش ماتریسی عملگرهای سایر قسمت های جواب، نیز به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\frac{۱}{۲}A^\dagger BC^\dagger C &= \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}A_۱^{-۱}B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \\
\frac{۱}{۲}A^\dagger AZC &= \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}Z_۱C_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\
A^\dagger B(۱-C^\dagger C) &= \begin{bmatrix} ۰ & (A_۱)^{-۱}B_۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\
(۱-A^\dagger A)Y &= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ X_۳ & X_۴ \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

بنابراین X جواب است و نمایشی به صورت آن چه در عبارت (۳.۳) بیان شده است را دارد. □

مراجع

[1] G.R. Duan, The solution to the matrix equation AV+BW = EVJ+R, *Appl. Math. Lett.*, **17**(10) (2004), 1197–1202.

[2] L.R. Fletcher, J. Kuatsky and N.K. Nichols, Eigenstructure assignment in descriptor systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **31**(12) (1986), 1138–1141.

[3] M. Jalaeian, M. Mohammadzadeh Karizaki and M. Hassani, Conditions that the product of operators is an EP operator in Hilbert C*-module, *Linear Multilinear Algebra*, (2019), DOI: 10.1080/03081087.2019.1567673.

[4] T. Jiang and M. Wei, On solutions of the matrix equations $X - AXB = C$ and $X - A\overline{X}B = C$, *Linear Algebra Appl.*, **367** (2003) 429–436.

[5] I. Kaplansky, Modules over operator algebras, *Am. J. Math.*, **75**(4) (1953), 839–858.

[6] G. Kasparov, Hilbert C*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, *J. Oper. Theory*, **4**(1) (1980), 133–150

[7] P. Kirrinnis, Fast algorithms for the Sylvester equation $AX + XB^T = C$, *Theor. Comput. Sci.*, **259**(1-2) (2001), 623–638.

[8] E.C. Lance, *Hilbert C*-Modules*, LMS Lecture Note Series 210, Cambridge Univ. Press, 1995.

[9] M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani, M. Amyari and M. Khosravi, Operator matrix of Moore-Penrose inverse operators on Hilbert C^*-modules, *Colloq. Math.*, **140** (2015), 171–182.

[10] K. Saitô and J.D. Maitland Wright, *On Defining AW*-Algebras and Rickart C*-Algebras*, ArXiv: 1501.02434v1, 2015.

[11] D.C. Sorensen and A.C. Antoulas, The Sylvester equation and approximate balanced reduction, *Linear Algebra Appl.*, (2002), 671–700.

[12] Q. Xu and L. Sheng, Positive semi-definite matrices of adjointable operators on Hilbert C*-modules, *Linear Algebra Appl.*, **428** (2008), 992–1000.