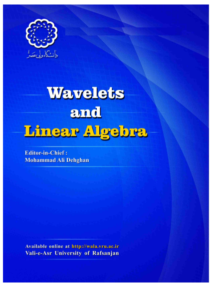
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۲) (۱۳۹۸) ۲۳-۴۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه و کاربرد آن در فیزیک کوانتوم

فرید بهرامی[آ]، سید محمود منجگانی[*آ]، شیرین معین[آ]

[آ] *دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲ خرداد ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۵ شهریور ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:

درهم‌تنیدگی، کانال کوانتومی LOCC، احاطه‌سازی.

چکیده

مسئله انتقال درهم‌تنیدگی در نظریه اطلاعات کوانتومی از اهمیت به سزایی برخوردار است. از آنجا که در سال‌های اخیر نظریه احاطه‌سازی به عنوان ابزار قدرتمند ریاضیات در ساده کردن پیچیدگی فیزیک کوانتوم نقش مهمی را ایفا کرده است، این مقاله با هدف بررسی مسئله انتقال کوانتومی پس از معرفی عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه به عنوان تعمیمی از ماتریس‌های تصادفی دوگانه و بررسی ارتباط آن‌ها با احاطه‌سازی روی فضای l^1 و مشخصه‌سازی آن‌ها و همچنین معرفی سه فرم از عملگرهای خطی نگهدارنده که جدای از تفاسیر کوانتومی در نظریه احاطه سازی در بُعد نامتناهی حائز اهمیت است تدوین شد. از دیگر اهداف این مقاله آشنا کردن علاقمندان علوم ریاضی و فیزیک کوانتوم به زبان مشترک این دو علم است.

۱. مقدمه

درهم‌تنیدگی[۱] یکی از موضوعات مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی است. مسئله‌ی تبدیل درهم‌تنیدگی کوانتومی[۲] مربوط به توانایی تبدیل پذیری حالت خالص[۳] یک سیستم ترکیبی[۴] با استفاده از عملیات موضعی و ارتباطات کلاسیک[۵] (LOCC) به حالت خالص دیگر است.

از دیدگاه ریاضی می‌توان سیستم‌های فیزیکی را به لحاظ بُعد به دو دسته‌ی متناهی و نامتناهی طبقه‌بندی و به ترتیب در چارچوب جبرخطی و آنالیز تابعی مطالعه کرد. از آنجا که همواره ویژگی‌های ریاضی دارای تفاسیر فیزیکی است، بررسی مسئله‌ی درهم‌تنیدگی در دوبعد متناهی و نامتناهی از دید ریاضی حائز اهمیت است. ابتدا لازم است بجهت دستیابی به زبانی مشترک بین ریاضیات و فیزیک کوانتوم مقدماتی بیان شود.

۱.۱. *زبان ریاضی فیزیک کوانتوم*

طبق اصل اول فیزیک کوانتوم(رجوع شود به زیر بخش ۱.۲.۲ از مرجع [۸])، متناظر با هر سیستم فیزیکی ایزوله، یک فضای هیلبرت به نام فضای حالت سیستم درنظر گرفته می‌شود که سیستم به طور کامل توسط یک بردار یکه از آن فضای هیلبرت موسوم به بردار حالت توصیف می‌گردد. در این مقاله با اتخاذ نمادگذاری معمول در فیزیک کوانتوم یعنی نمادگذاری دیراک[۶]، بردار یکه ستونی ϕ از فضای هیلبرت H را با نماد **کِت**[۷] $|\phi\rangle$ و بردار دوگانش، یعنی بردار ترانهاده مزدج آن را با نماد **بِرا**[۸] $\langle\phi|$ نمایش می‌دهیم.

---

*نویسنده مسئول
*نویسنده نماینده
آدرس ایمیلها: fbahrami@cc.iut.ac.ir (فرید بهرامی)، manjgani@cc.iut.ac.ir (سید محمود منجگانی)، s.moein@math.iut.ac.ir (شیرین معین)

[1]Entanglement
[2]Problem of Entanglement Transformation
[3]Pure State
[4]Composite System
[5]Local Operations and Classical Communication
[6] Dirac notation
[7]Ket notation
[8]Bra notation

عملگر یا ماتریس چگالی[۹] ابزاری مناسب جهت توصیف یک سیستم کوانتومی است که حالت آن دقیقاً مشخص نیست. درواقع اگر فرض کنیم $\{|\phi_i\rangle \ : i \in I\}$ مجموعه تمام حالات ممکن از سیستم کوانتومی باشد و به ازای هر $i \in I$، سیستم با احتمال p_i در حالت $|\phi_i\rangle$ قرار گیرد، آنگاه عملگر چگالی این سیستم را بصورت $\rho = \sum_i p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ تعریف می‌کنیم. لازم به ذکر است اگر بدانیم سیستم دقیقاً در وضعیت بردار حالت $|\phi\rangle$ است، حالت سیستم را خالص گوییم و بوضوح عملگر چگالی آن $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ می‌باشد (یعنی حالت $|\phi\rangle$ با احتمال یک و مابقی حالات با احتمال صفر اتفاق افتاده‌اند) و درغیر این صورت، حالت سیستم را مخلوط[۱۰] نامیم.

واضح است که در طبیعت همیشه با یک سیستم ایزوله سروکار نداریم به عنوان مثالی ساده، اگر سیستم فیزیکی ایزوله نباشد تاثیر محیط اطراف سیستم به عنوان یک سیستم ایزوله جدید با آن ترکیب شده است. بنابراین سیستم‌های غیر ایزوله نمونه ای از سیستم‌های ترکیبی هستند.

طبق اصل چهارم فیزیک کوانتوم (رجوع شود به زیر بخش ۸.۲.۲ از مرجع [۸])، فضای حالت سیستم‌های ترکیبی[۱۱] به کمک ضرب تانسوری فضاهای حالت سیستم‌های فیزیکی جزء، مدل سازی شده است. برای مثال $H_a \otimes H_b$ به عنوان یک سیستم ترکیبی، حاصل از ترکیب دو سیستم H_a و H_b است. علاوه بر این، اگر n سیستم ایزوله فیزیکی داشته باشیم که برای هر i، $|\phi_i\rangle$ بردارحالت i-امین سیستم باشد، $|\phi_۱\rangle \otimes |\phi_۲\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_n\rangle$ بردار حالت سیستم ترکیبی است.

اصل چهارم همچنین ما را قادر می‌سازد تا یکی از موضوعات مهم مربوط به سیستم‌های کوانتومی ترکیبی به نام درهم‌تنیدگی را که موضوع کلیدی این مقاله است تعریف کنیم. حالت خالص یک سیستم ترکیبی را درهم‌تنیده گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت حاصلضرب تانسوری حالات خالص سیستم‌های جزء بنویسیم. برای مثال با فرض $(۰, ۱) = |۱\rangle$ و $(۱, ۰) = |۰\rangle$، حالت بِل[۱۲] دوکیوبیتی

$$|\psi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰\rangle_a \otimes |۰\rangle_b + |۱\rangle_a \otimes |۱\rangle_b) \qquad (۱.۱)$$

به عنوان بردار یکه از سیستم ترکیبی $H_a \otimes H_b = \mathbb{C}^۴$ یک حالت درهم‌تنیده است زیرا نمی‌توان آن

9 Density Matrix
10 Mixed state
11 Composite System
12 Bell State

را به صورت ضرب تانسوری دو حالت یک کیوبیتی نوشت، برای نشان دادن این موضوع با تکیه بر استدلال خلف، فرض کنیم دو حالت یک کیوبیتی $\alpha|۰\rangle_a + \beta|۱\rangle_a \in H_a$ و $\gamma|۰\rangle_b + \delta|۱\rangle_b \in H_b$ که $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha|۰\rangle_a + \beta|۱\rangle_a) \otimes (\gamma|۰\rangle_b + \delta|۱\rangle_b) \\ &= \alpha\gamma(|۰\rangle_a \otimes |۰\rangle_b) + \alpha\delta(|۰\rangle_a \otimes |۱\rangle_b) + \beta\gamma(|۱\rangle_a \otimes |۰\rangle_b) + \beta\delta(|۱\rangle_a \otimes |۱\rangle_b). \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

بدیهی است با مقایسه رابطه فوق و رابطه (۱.۱) باید

$$\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \qquad \alpha\delta = \beta\gamma = ۰.$$

از $\alpha\delta = ۰$ داریم $\alpha = ۰$ یا $\delta = ۰$ که به ترتیب با $\alpha\gamma = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $\beta\delta = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حالت بِل $|\psi\rangle$ در هم‌تنیده است.

۱.۲. *نظریه احاطه‌سازی*

بعد از کنفرانس‌های برگزار شده در سالهای ۱۹۹۸ و ۲۰۰۲ در موسسه تکنولوژی کالیفرنیا[۱۳] و دانشگاه کوئینزلند استرالیا[۱۴] شاهد کاربرد وسیع نظریه احاطه‌سازی[۱۵] به عنوان یک ابزار قوی ریاضی، در علوم مختلف مانند فیزیک و نظریه اطلاعات کوانتومی هستیم. در سال ۱۹۹۹، نیلسن[۱۶] با استفاده از این ابزار قدرتمند زمینه ارتباط *مسئله تبدیل* درهم‌تنیدگی با ریاضیات را در بعد متناهی فراهم کرد. قبل از بیان قضیه نیلسن به بیان تعاریف مقدماتی احاطه‌سازی برداری و شرایط معادل آن خواهیم پرداخت. در سال ۱۹۲۹ مفهوم احاطه‌سازی برداری با نماد $\prec$ توسط هاردی[۱۷]، لیتلوود[۱۸] و پولیا[۱۹] روی $\mathbb{R}^n$ به

[13] California Institute of Technology
[14] The University of Queensland, Australia
[15] Majorization Theory
[16] Nielsen
[17] Hardy
[18] Littlewood
[19] Pólya

صورت زیر تبیین شد[۵].

تعریف ۱.۱ (احاطه‌سازی برداری[[۵]]). فرض کنیم $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر تجدید آرایش نزولی بردارهای X و Y را به ترتیب با نمادهای $X^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow}, \cdots, x_n^{\downarrow})$ و $Y^{\downarrow} = (y_1^{\downarrow}, y_2^{\downarrow}, \cdots, y_n^{\downarrow})$ نشان دهیم، یعنی برای هر n ،$i = 1, 2, \cdots, n$، مولفه ها پس از تجدید آرایش نزولی با نماد $x_i^{\downarrow}$ و $y_i^{\downarrow}$ نمایش داده شود و $x_i^{\downarrow} \geq x_{i+1}^{\downarrow}$ و $y_i^{\downarrow} \geq y_{i+1}^{\downarrow}$ ، آنگاه گوییم X توسط Y احاطه می‌شود و می‌نویسیم $X \prec Y$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد،

(۱) برای هر $k = 1, 2, ..., n - 1$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow},$$

(۲)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

از آنجا که تعریف فوق متکی بر تجدید آرایش نزولی مولفه‌هاست، برای nهای بزرگ کارایی لازم را ندارد و به شرط معادلی مستقل از تجدید آرایش نزولی نیاز است. هاردی، لیتلوود و پولیا بین سال‌های ۱۹۲۹ تا ۱۹۳۴ به بیان شرایط معادلی برای مفهوم احاطه‌سازی در فضای $\mathbb{R}^n$، بدون نیاز به تجدید آرایش نزولی و بر مبنای ماتریسی مربعی با درایه های نامنفی که مجموع درایه های هر سطر و هر ستون آن به طور مجزا یک است، موسوم به ماتریس تصادفی دوگانه[۲۰] و همچنین توابع محدب پرداختند که در قضیه زیر به طور خلاصه این نتایج را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱ (شروط معادل احاطه‌سازی برداری [[۵]]). *برای $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ در فضای $\mathbb{R}^n$ شرایط زیر معادلند.*

(۱) $X \prec Y$،

(۲) ماتریس تصادفی دوگانه $D_{n\times n}$ وجود دارد که $X = DY$،

[20] Doubly stochastic matrix

(۳) نامساوی

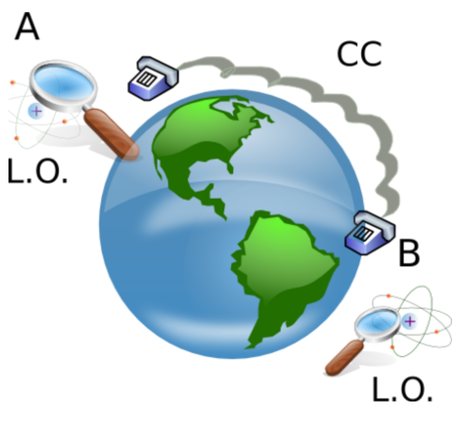
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i),$$

برای هر تابع پیوسته محدب $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ صادق است.

۳.۱. قضیه نیلسن در حالت متناهی

در این بخش از مقدمه قضیه ای را مطرح خواهیم کرد که با استفاده از مفهوم احاطه‌سازی برداری به بیان شرط لازم و کافی مسئله درهم تنیدگی کوانتومی منتقل شده با کانال LOCC در بُعد متناهی می‌پردازد. این قضیه در مراجع کوانتومی به قضیه نیلسن مشهور است.

برای فهم روند پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی در کانال LOCC، سیستم ترکیبی از بُعد متناهی $H_a \otimes H_b$ را به عنوان سیستم آلیس-باب در نظر می‌گیریم که یک کانال ارتباطی کلاسیک [۲۱] (CC) مانند تلفن و یا اینترنت بین آنها انتقال اطلاعات کلاسیک را امکان پذیر می‌کند. ابتدا آلیس یک عملیات کوانتومی موضعی [۲۲] (LO) را در سیستم خود بکار می‌گیرد و نتیجه را با کانال ارتباطی کلاسیک به باب گزارش می‌دهد سپس باب عملیات کوانتومی دیگری وابسته به نتیجه گزارش شده از آلیس روی سیستم خود اجرا می‌کند (شکل ۱). خوانندگان علاقمند برای جزئیات بیشتر در مورد LO به مرجع [۲] و LOCC به مرجع [۳] مراجعه کنند.



شکل ۱: روند پردازش LO

برای بیان مدلسازی LO و CC از دیدگاه ریاضی نیاز به مقدماتی است که در زیر بیان می‌شود.

[21] Classical Communication
[22] Local Operation

با فرض اینکه نماد $B(H)$ نشان دهنده مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از H به H باشد، عملگر $F : B(H_a) \to B(H_b)$ را یک کاهنده اثر[۲۳] گوییم هرگاه $Tr(F(\rho)) \leq Tr(\rho)$ و همچنین عملگر F را کاملاً مثبت[۲۴] خوانیم وقتی برای هر $d \in \mathbb{N}$، نگاشت

$$I_d \otimes F : M_d \otimes B(H_a) \to M_d \otimes B(H_b)$$

مثبت باشد. در نمادگذاری فوق منظور از M_d جبر ماتریسهای $d \times d$ با درایه مختلط و منظور از I_d ماتریس همانی $d \times d$ است.

با این مقدمات، به زبان ریاضی عملگر موضعی (LO) نگاشت کاملاً مثبت کاهنده اثر

$$F_a \otimes F_b : B(H_a \otimes H_b) \to B(H'_a \otimes H'_b)$$

باضابطه $F_a \otimes F_b = (F_a \otimes id_b) \circ (id_a \otimes F_b)$ است که در آن منظور از id عملگر همانی است.

همچنین منظور از ارتباط کلاسیک (CC) در مدل سازی ریاضی $F_a : B(H_a) \to B(H'_a) \otimes \mathcal{D}(M_d)$ یا/و $F_b : B(H_b) \otimes \mathcal{D}(M_d) \to B(H'_b)$ است که در اینجا نماد $\mathcal{D}(M_d)$ نشان دهنده جبر ماتریس‌های قطری $d \times d$ می‌باشد [۱۰، ۳].

قضیه ۳.۱ (تجزیه اشمیت در بُعد متناهی). *[۶، قضیه ۳.۶] برای هر بردار $\psi \in H_a \otimes H_b$ تجزیه‌ای موسوم به تجزیه اشمیت [۲۵] بصورت*

$$\psi = \sum_{i=1}^{d=\min\{d_a,d_b\}} \sqrt{\lambda_i}\, e_i \otimes f_i$$

وجود دارد که در آن $\{e_1, \cdots, e_{d_a}\} \subset H_a$ و $\{f_1, \cdots, f_{d_b}\} \subset H_b$ پایه‌های یکامتعامد [۲۶] هستند و

[23] Trace-Decreasing
[24] Completely Positive
[25] *Schmidt decomposition*
[26] *Orthonormal basis*

برای هر i، $\lambda_i \geq 0$. بردار $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ بردار اشمیت [۲۷] ψ نامیده می‌شود. بعلاوه یک حالت کوانتومی درهم‌تنیده است اگر و فقط اگر رتبه اشمیت آن [۲۸] (یعنی تعداد مولفه‌های ناصفر بردار اشمیت) بزرگتر از یک باشد.

حال آماده ایم که قضیه نیلسن در حالت متناهی را بیان کنیم.

قضیه ۴.۱ (قضیه نیلسن[۸]). *اگر λ_ψ و λ_ϕ به ترتیب بردار اشمیتِ حالات خالص $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ از یک سیستم ترکیبی با بُعد متناهی باشند، آنگاه یک کانال $LOCC$ وجود دارد که حالت خالص $|\psi\rangle$ را به حالت خالص $|\phi\rangle$ تبدیل می‌کند اگر و تنها اگر $\lambda_\psi \prec \lambda_\phi$.*

۲. تعمیم قضیه نیلسن در بُعد نامتناهی

از آنجا که در کاربرد با سیستم‌های از بُعد نامتناهی کوانتومی روبرو هستیم، تعمیم قضیه نیلسن به بُعد نامتناهی حائز اهمیت است. در این بخش به مشکل تعمیم این قضیه در مراجع کوانتومی اشاره خواهیم کرد و سپس به جهت رفع این مشکل دسته ای از عملگرها را تحت عنوان عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه [۲۹] معرفی خواهیم کرد.

وقتی صحبت از تعمیم قضیه نیلسن در بعد نامتناهی است، ابتدا باید تعمیمی خوش تعریف از رابطه احاطه‌سازی و انتقال توسط کانال LOCC بیان کنیم.

مطابق آنچه در مراجع [۱۰، ۹] گفته شده، به لحاظ تعاریف علم فیزیک منظور از انتقال LOCC در بعد نامتناهی، مفهوم ϵ-تبدیل پذیری [۳۰] تعریف شده به صورت زیر است.

تعریف ۱.۲. [۱۰، تعریف ۵] فرض کنیم $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in H = H_a \otimes H_b$ بردارهای یکه (حالت) باشند. در این صورت گوییم $|\psi\rangle$، ϵ-تبدیل پذیر به $|\phi\rangle$ است، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، یک کانال LOCC مانند Λ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$||\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|) - |\phi\rangle\langle\phi|||_{tr} < \epsilon.$$

---

[27] *Schmidt vector*
[28] *Schmidt rank*
[29] Semi doubly stochastic operators
[30] ϵ-convertibility

شرط کافی انتقال حالت خالص $|\psi\rangle$ به $|\phi\rangle$ در قضیه نیلسن در بعد متناهی، یعنی قضیه ۴.۱، مربوط به رابطه احاطه‌سازی بین بردارهای اشمیت متناظر با هر کدام از بردارهای حالت بود که در بعد نامتناهی تبدیل به دنباله اشمیت خواهند شد. قضیه زیر که تعمیم قضیه تجزیه اشمیت به بعد نامتناهی است، تضمین وجود این دنباله را در فضای باناخ

$$l^1 = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty\}$$

می‌دهد.

قضیه ۲.۲ (تجزیه اشمیت در بُعد نامتناهی). *[۹، قضیه ۴] اگر H_a و H_b دو سیستم از بعد نامتناهی باشند، آنگاه برای هر $|\psi\rangle \in H = H_a \otimes H_b$ مجموعه های متعامد یکه ای که لزوماً پایه نیستند مانند $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty} \subset H_a$ و $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty} \subset H_b$ وجود دارند که*

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle,$$

که درآن برای هر i، $\lambda_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله اشمیت نامیده می‌شوند.

بنابراین از آنجا که اعضای دنباله اشمیت نامنفی هستند می‌توانیم تعمیم احاطه‌سازی را برای فضای l^{1+} در نظر بگیریم. در مراجع مختلف فیزیک کوانتوم احاطه‌سازی روی فضای نامتناهی البعد l^{1+} را به عنوان تعمیم مستقیم احاطه‌سازی برداری یعنی تعریف ۱.۱ به صورت زیر تعریف کرده‌اند (برای مثال تعریف ۴ از مرجع [۱۰] را ببینید).

تعریف ۳.۲. [۱۰] فرض کنیم $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)$ و $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots)$ دنباله‌هایی در فضای l^{1+} باشند.در این صورت گوییم X توسط Y احاطه می‌شود و می‌نویسیم $f \prec g$، هرگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ دو شرط زیر برقرار باشد،

(۱) $\sum_{i=1}^{k} f_i^{\downarrow} \leqslant \sum_{i=1}^{k} g_i^{\downarrow}$،

(۲) $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$.

که منظور از نماد $f_i^{\downarrow}$ جمله i-ام دنباله f پس از تجدید آرایش نزولی جملات است.

براساس تعریف احاطه‌سازی فوق وابسته به تجدید آرایش نزولی، قضیه زیر تعمیم قضیه نیلسن در بعد نامتناهی است که در قضیه ۱ از مرجع [۱۰] آمده است.

قضیه ۴.۲ (تعمیم قضیه نیلسن در بُعد نامتناهی). *فرض کنید $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ دو حالت خالص از سیستم ترکیبی نامتناهی البُعد $H_a \otimes H_b$ باشند. در اینصورت $|\psi\rangle$، ϵ- تبدیل پذیر به $|\phi\rangle$ است، اگر و تنها اگر $\lambda_\psi \prec \lambda_\phi$، که λ_ψ و λ_ϕ به ترتیب بردارهای اشمیت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ هستند.*

یکی از اشکالات قضیه فوق در بکارگیری قسمت 'و تنها اگر' است، چراکه رابطه احاطه‌سازی در آن، همانطورکه در تعریف ۳.۲ مشاهده شد بر مبنای تجدید آرایش نزولی است که در بعد بینهایت ناکارآمد می‌باشد. به همین دلیل در قضیه ۲ از مرجع [۱۰] به جهت رفع ناکارآمدی مذکور، شرط معادلی برای احاطه‌سازی روی l^1 اثبات شده است. ما نیز با ایده‌گرفتن از شرط معادل احاطه‌سازی در بعد متناهی بر مبنای وجود ماتریس تصادفی دوگانه که در قضیه ۲.۱ مطرح شد شرط کافی انتقال کوانتومی قضیه نیلسن ۴.۲ در بعد نامتناهی را بر اساس عملگرهای تصادفی دوگانه بازنویسی کردیم. در واقع عملگرهای تصادفی دوگانه تعمیمی از ماتریس‌های تصادفی دوگانه است که در سال‌های اخیر بهرامی [31]، بیاتی [32] و منجگانی [33] [۱] تعریفی از این دسته از عملگرها روی فضای باناخ l^1 متشکل از تمامی توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با شرط $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| < +\infty$ ارائه کردند. در این بخش با اشاره اجمالی به تعریف عملگرهای تصادفی دوگانه روی فضای l^1 به ارتباط رابطه احاطه‌سازی برمبنای تجدید آرایش نزولی و عملگر تصادفی دوگانه می‌پردازیم. همچنین با معرفی دسته وسیعتری از عملگرهای تصادفی دوگانه تحت عنوان عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه با اثبات قضیه اصلی این بخش یعنی قضیه ۹.۲ نشان می‌دهیم که می‌توان عملگرهایی مانند $D : l^1 \to l^1$ را که برای هر $f \in l^1$، $Df \prec f$ است را با عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه مشخصه‌سازی کرد و مشکل ناکارآمدی تجدید آرایش نزولی در قضیه نیلسن در بعد نامتناهی را به کمک آن حل کرد. همچنین بازنویسی شرط کافی انتقال در قضیه نیلسن برمبنای عملگرهای نیم‌تصادفی دوگانه دارای تفسیر فیزیکی است که در انتهای این بخش به آن خواهیم پرداخت.

---
[31] Bahrami
[32] Bayati
[33] Manjegani

$e_n \in l^1$ را می‌توان به عنوان تابعی با ضابطه‌ی $e_n(m) = \delta_{mn}$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ در نظر گرفت که منظور از نماد δ_{mn} دلتا کرونیکر است. فرض کنیم نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^1 \times l^\infty \to \mathbb{R}$ برای هر $f \in l^1$ هر $g \in l^\infty$ تعریف شده با ضابطه

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) g(n)$$

نشان دهنده دوگانگی [34] بین فضاهای l^1 و دوگانش l^∞ باشد. در این صورت برای هر $f \in l^1$، اگر e_n را بعنوان عضوی در l^∞ در نظر بگیریم، آنگاه $\langle f, e_n \rangle = f(n)$ و بنابراین

$$\forall f \in l^1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

با نمادگذاری فوق آماده‌ایم که تعریف عملگرهای تصادفی دوگانه روی فضای دنباله‌ای l^1 را به صورت زیر بیان کنیم.

تعریف ۵.۲. [۱] عملگر خطی و کراندار $D : l^1 \to l^1$ را عملگر تصادفی دوگانه گوییم هرگاه نامنفی باشد و در دو شرط زیر صدق کند،

(۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sum_{m=1}^{\infty} \langle De_n, e_m \rangle = 1$ و

(۲) برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\sum_{n=1}^{\infty} \langle De_n, e_m \rangle = 1$.

اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $d_{mn} := \langle De_n, e_m \rangle$، آنگاه مثبت بودن عملگر D روی فضای مرتب l^1 برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، نشان دهنده $d_{mn} \geq 0$ است. بنابراین اگر اعضای l^1 را بصورت بردارهای ستونی مشخص کنیم، ماتریس $[d_{mn}]_{m,n \in \mathbb{N}}$ که ماتریس نمایش عملگر D است به صورت زیر روی اعضای l^1

[34] Dual pairing

عمل می‌کند.

$$\forall f \in l^{1}, \quad Df = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & \dots \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

با این نمایش ماتریسی، شروط بیان شده در تعریف فوق برای ماتریس $[d_{mn}]_{m,n\in\mathbb{N}}$ به ترتیب، معادل است با تعریف ماتریس تصادفی ستونی (ماتریس با درایه‌های نامنفی که مجموع درایه‌های هر ستون آن یک باشد) و ماتریس تصادفی سطری (ماتریس با درایه‌های نامنفی که مجموع درایه‌های هر سطر آن یک باشد). بنابراین همانطور که انتظار داریم ماتریس نمایش عملگر تصادفی دوگانه D یک ماتریس تصادفی دوگانه است و این نشان می‌دهد عملگرهای تصادفی دوگانه تعمیمی از ماتریس های تصادفی دوگانه‌اند.

بهرامی، بیاتی و منجگانی تعریف معادلی برای عملگر تصادفی دوگانه در لم ۳.۲ از مرجع [۱] اثبات کردند که در زیر بیان می‌شود.

عملگر مثبت خطی و کراندار $D : l^{1} \to l^{1}$ تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر

$$\forall f \in l^{1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\langle Df, e_m\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} f(m), \tag{۱.۲}$$

و

$$\forall f \in l^{1} \subset l^{\infty}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\langle De_n, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \tag{۲.۲}$$

مطابق قضیه ۲.۱، با فرض اینکه ماتریس D تصادفی دوگانه است، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $Dx \prec x$. بنابراین سوال طبیعی مشخصه‌سازی عملگر D روی فضای از بُعد نامتناهی l^{1} است طوری که برای هر $f \in l^{1}$، $Df \prec f$. از آنجا که رابطه احاطه سازی مطابق تعریف ۳.۲ محدود به l^{1+} است، در گزاره و مثال زیر پاسخ این سوال را بر مبنای عملگر تصادفی دوگانه روی l^{1+} بررسی کردیم.

گزاره ۶.۲. *اگر $D : l^{1+} \to l^{1+}$ عملگر تصادفی دوگانه باشد، آنگاه برای هر دنباله با مولفه های نزولی*

$\mu \in l^{1+}$، $D\mu \prec \mu$.

برهان. فرض کنیم $[d_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}} = \langle De_j, e_i\rangle$ نمایش ماتریسی عملگر D باشد. در این صورت برای هر $i = 1, \cdots, k$،

$$\begin{aligned}(D\mu)_i &= d_{i1}\mu_1 + \cdots + d_{ik}\mu_k + \cdots \\ &\leq d_{i1}\mu_1 + \cdots + d_{ik}\mu_k + d_{ik+1}\mu_k + \cdots,\end{aligned}$$

بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}(D\mu)_i &\leq d_{i1}\mu_1 + \cdots + d_{ik-1}\mu_{k-1} + (1 - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} d_{ij})\mu_k \\ &= d_{i1}(\mu_1 - \mu_k) + \cdots + d_{ik-1}(\mu_{k-1} - \mu_k) + \mu_k,\end{aligned}$$

که اولین شرط تعریف ۳.۲ را به صورت زیر نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{k}(D\mu)_i &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k} d_{i1}(\mu_1 - \mu_k) + \cdots + \sum_{i=1}^{k} d_{ik-1}(\mu_{k-1} - \mu_k) + k\mu_k \\ &\leq (\mu_1 - \mu_k) + \cdots + (\mu_{k-1} - \mu_k) + k\mu_k \\ &= \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} - (k-1)\mu_k + k\mu_k = \mu_1 + \cdots + \mu_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \mu_i.\end{aligned}$$

دومین شرط از تعریف ۳.۲ نیز به صورت زیر براحتی قابل مشاهده است.

$$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}(D\mu)_i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}\mu_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} d_{ij}\mu_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j. \qquad \square$$

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره فوق در حالت کلی صحیح نیست.

مثال ۷.۲. فرض کنید $D : l^{1+} \to l^{1+}$ عملگر انتقال پیشرو [35] باشد، به سادگی مشاهده می‌شود که برای هر $f \in l^{1+}$، $Df \prec f$. حال با در نظر گرفتن $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n$، داریم

$$g := Df = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_{n+1},$$

که $g \prec f$. بنابراین

$$0 = g_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle De_n, e_1 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle De_n, e_1 \rangle}{2^n},$$

و طبق مثبت بودن عملگر D، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\langle De_n, e_1 \rangle = 0$ که منجر به تناقض با اولین شرط تعریف ۵.۲ می‌شود. بنابراین D یک عملگر تصادفی دوگانه نیست.

بنابراین عملگر D روی l^{1+} طوری که برای هر $f \in l^{1+}$، $Df \prec f$ لزوماً تصادفی دوگانه نیست. این مسئله ایده معرفی یک کلاس وسیعتر از عملگرها را می‌دهد که ما آنها را نیم‌تصادفی دوگانه می‌نامیم و به صورت زیر و با هدف مشخصه‌سازی عملگر D تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۲. عملگر مثبت $S : l^1 \to l^1$ نیم‌تصادفی دوگانه نامیده می‌شود اگر $\sum_{i=1}^{\infty} S_{ij} = 1$ (خاصیت تصادفی ستونی) و $\sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} \leq 1$، که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، $S_{ij} := \langle Se_j, e_i \rangle$. مجموعه تمام این چنین عملگرهایی را با نماد $\mathcal{SD}(l^1)$ نشان می‌دهیم.

این عملگرها با استفاده از خاصیت تصادفی ستونی و بکارگیری نامساوی مثلثی به صورت زیر، کراندار هستند یعنی $\|S\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}\forall f \in l^1, \quad \|Sf\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Sf, e_i \rangle| = \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} f_j \langle Se_j, e_i \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \langle Se_j, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |f_j| = \|f\|_1.\end{aligned}$$

واضح است که عملگرهای تصادفی دوگانه در $\mathcal{SD}(l^1)$ هستند. قضیه زیر به عنوان یکی از قضایای اصلی این مقاله، مربوط به مشخصه‌سازی عملگرهای نیم تصادفی دوگانه روی l^1 است.

[35] Forward shift operator

قضیه ۹.۲. *موارد زیر معادلند.*

۱) *S روی l^1 نیم‌تصادفی دوگانه است.*

۲) *برای هر تابع محدب $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ و $f \in l^1$،*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi((Sf)_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(f_i),$$

و

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} (Sf)_i.$$

۳) *برای هر $u \in \mathbb{R}$ و هر $f \in l^1$،*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \max\{(Sf)_i - u, 0\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \max\{f_i - u, 0\},$$

و

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} (Sf)_i.$$

۴) *برای هر $f \in l^1$، $Sf \prec f$.*

برهان. ($1 \Rightarrow 2$) برای $i \in \mathbb{N}$ دلخواه داریم

$$(Sf)_i = \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} f_j,$$

بنابراین طبق محدب بودن ϕ،

$$\phi((Sf)_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} \phi(f_j),$$

پس

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi((Sf)_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} \phi(f_j)$$

با بکارگیری قضیه فوبینی و $\sum_{i=1}^{\infty} S_{ij} = 1$،

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi((Sf)_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij}\phi(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{ij}\phi(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(f_j)$$

و

$$\sum_{i=1}^{\infty}(Sf)_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij}f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{ij}f_j = \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

($3 \Rightarrow 2$) باتوجه به محدب بودن $\max\{\cdot, 0\}$ روی $\mathbb{R}$، به سادگی برای هر $u \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{\infty} \max\{(Sf)_i - u, 0\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \max\{f_i - u, 0\}.$$

و با در نظر گرفتن تابع محدب ϕ به عنوان تابع همانی و استفاده از فرض ۲ داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty}(Sf)_i.$$

($4 \Rightarrow 3$) با استفاده از [۴، نتیجه ۲.۱ و قضیه ۶.۱] برای فضای سیگما متناهی $(\mathbb{N}, \mu)$ که μ اندازه شمارشی است داریم،

$$\sum_{i=1}^{\infty} \max\{(Sf)_i - u, 0\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \max\{f_i - u, 0\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

معادل است با

$$\sum_{i=1}^{k}(Sf)_i^{\downarrow} \leqslant \sum_{i=1}^{k} f_i^{\downarrow}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

($1 \Rightarrow 4$) برای هر $f \in l^1$، فرض کنیم $Sf \prec f$. برای $j \in \mathbb{N}$، قرار می دهیم $f = e_j$، پس طبق

فرض $Se_j \prec e_j$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{\infty}(Se_j)_i = \sum_{i=1}^{\infty}(e_j)_i$$

و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\langle Se_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(Se_j)_i = \sum_{i=1}^{\infty}(e_j)_i = 1.$$

بعلاوه، برای $n \in \mathbb{N}$ دلخواه که ثابت در نظر گرفته می‌شود قرار می دهیم $f := \sum_{i=1}^{n} e_i$ پس با استفاده از فرض داریم $Sf \prec f$. در نتیجه طبق شرط اول تعریف ۳.۲ برای $k = 1$، $(Sf)_1^{\downarrow} \leq f_1^{\downarrow}$. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم که $(Sf)_{i_1} = \sum_{j=1}^{\infty} S_{i_1 j} f_j$ بزرگترین جمله از دنباله Sf باشد، بنابراین

$$(Sf)_1^{\downarrow} = \sum_{j=1}^{\infty} S_{i_1 j} f_j = \sum_{j=1}^{n} S_{i_1 j} \leq f_1^{\downarrow} = 1$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} S_{i_1 j} \leq 1$$

و از آنجا که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $(Sf)_i \leq (Sf)_1^{\downarrow}$ اثبات کامل است. □

نتیجه ۱۰.۲. *فرض کنید* $f = \{a_n\}_{i=1}^{\infty}, g = \{b_n\}_{i=1}^{\infty} \in l^1$ *و* $S \in \mathcal{SD}(l^1)$ *وجود دارد که* $Sf = g$. *در این صورت* $g \prec f$.

لازم به ذکر است عکس نتیجه فوق باز است.

تفسیر کوانتومی : برای اجتناب از ناکارآمدی تجدید آرایش نزولی در قسمت ''فقط اگر'' قضیه نیلسن ما این قضیه را به صورت زیر اصلاح می کنیم.

نتیجه ۱۱.۲ (اصلاح قسمت فقط اگر قضیه نیلسن ۴.۲). *فرض کنید* λ_ψ *و* μ_ϕ *به ترتیب دنباله های اشمیت حالات خالص* $|\psi\rangle$ *و* $|\phi\rangle$ *باشند. اگر* $S \in \mathcal{SD}(l^1)$ *وجود داشته باشد که* $\lambda_\psi = S\mu_\phi$*، آنگاه* $|\psi\rangle$*،* ϵ*–تبدیل پذیر به* $|\phi\rangle$ *است یعنی کانال LOCC وجود دارد که طبق تعریف ۱.۲ ،* $|\psi\rangle$ *را به* $|\phi\rangle$ *تبدیل می کند.*

نکته ۱۲.۲ . اگر حالت خالص مقصد یا به عبارت بهتر هدف تبدیل پذیری کوانتومی حالت خالص $|\phi\rangle \in H_a \otimes H_b$ با تجزیه اشمیت

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(\lambda_\phi)_i}\, e_i \otimes f_i$$

باشد با استفاده از نتیجه فوق، شناسایی مجموعه ای از حالات خالص ϵ-تبدیل پذیر به حالت خالص مقصدِ از پیش تعیین شده $|\phi\rangle$ به صورت زیر امکان پذیر است.

$$\mathfrak{A} = \left\{ |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(S\lambda_\phi)_i}\, e_i^* \otimes f_i^* \ : \quad S \in \mathcal{SD}(l^1) \right\}.$$

ما برای اطمینان از خالص بودن حالت $|\psi\rangle$، یعنی یکه بودن این بردار در $H_a \otimes H_b$، $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ را به ترتیب پایه‌های یکامتعامد توسیع یافته $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ شرکت کننده در تجزیه اشمیت $|\phi\rangle$ در نظر گرفتیم. در حقیقت، ضرایب جملاتی که به تجزیه اشمیت اضافه شدند صفر در نظر گرفته شدند که مشکلی برای رابطه احاطه‌سازی $S\lambda_\phi \prec \lambda_\phi$ ایجاد نخواهد کرد.

۳. نگهدارنده احاطه‌سازی

نگاشتی مانند $T : V \to V$ را نگهدارنده احاطه‌سازی[۳۶] روی فضای V گوییم هرگاه $v_1 \prec v_2$ نتیجه دهد $T(v_1) \prec T(v_2)$. آندو [۳۷] نگاشتهای خطی نگهدارنده احاطه‌سازی روی فضای از بُعد متناهی را به صورت زیر به طور کامل شناسایی کرد.

قضیه ۱.۳. *[۱، قضیه ۱.۱]. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد. آنگاه T حافظ احاطه‌سازی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد. در اینجا منظور از $tr(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ اثر بردار $y \in \mathbb{R}^n$ و منظور از e بردار $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$ است.*

(۱) برای یک $a \in \mathbb{R}^n$، $T(x) = tr(x)a$،

[36] Majorization preserver
[37] Ando

(۲) $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *و جایگشت* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *وجود داشته باشند که* $T(x) = \alpha P(x) + \beta tr(x)e$.

در قضیه زیر به معرفی سه دسته از نگهدارنده های احاطه‌سازی بر مبنای عملگر نیم‌تصادفی دوگانه در فضای l^1 می‌پردازیم.

قضیه ۲.۳. *اگر* $S \in \mathcal{SD}(l^1)$ *وجود داشته باشد که برای* $f \in l^1$ *و* $Sf \prec f$*، آنگاه نگاشت خطی* T *تعریف شده به صورت یکی از فرم های زیر نگهدارنده احاطه سازی است یعنی* $T(Sf) \prec T(f)$.

۱. *فرض کنیم* $I_0 \subseteq \mathbb{N}$ *و* $\sum = \{\sigma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad : i \in I_0\}$ *خانواده ای از نگاشتهای یک به یک باشد به طوری که برای هر* i_1, i_2 *مجزا در* I_0*،* $\sigma_{i_1}(\mathbb{N}) \cap \sigma_{i_2}(\mathbb{N}) = \varnothing$. *با در نظرگرفتن دنباله* $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I_0} \in l^1(I_0)$*، عملگر* T *به فرم*

$$T := \sum_{i=I_0} \alpha_i P_{\sigma_i},$$

که برای هر $i \in I_0$ *منظور از* $P_{\sigma_i} : l^1 \to l^1$ *یک عملگر کراندار و خطی است که* e_j *را به* $e_{\sigma_i(j)}$ *می نگارد.*

۲. *با فرض* $h \in l^1$*، عملگر* T *برای هر* $f \in l^1$ *با ضابطه*

$$T(f) = (\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i)h.$$

۳. *فرض کنید* $\mathbb{N} = I_1 \cup I_2$ *که* $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ *و* $T_1, T_2 : l^1 \to l^1$ *را طوری در نظر بگیرید که برای هر* $i \in I_2$*،* $(T_1 f)_i = 0$ *و برای هر* $i \in I_1$*،* $(T_2 f)_i = 0$. *اگر* $S_1, S_2 \in \mathcal{SD}(l^1)$ *وجود داشته باشد که* $T_1 S f = S_1 T_1 f$ *(نتیجه می‌دهد* T_1 *نگهدارنده است یعنی* $T_1(Sf) \prec T_1(f)$*)* *و* $T_2 S f = S_2 T_2 f$ *(نتیجه می‌دهد* T_2 *نگهدارنده است یعنی* $T_2(Sf) \prec T_2(f)$*)، آنگاه عملگر* T *به فرم*

$$T := T_1 + T_2.$$

(لازم به ذکر است که در حالت کلی، مجموع دو نگهدارنده احاطه‌سازی لزوماً نگهدارنده نیست.)

برهان. (۱) از آنجا که $\|T\| \leq \|\alpha\|_{۱}$، به وضوح T نگاشت خطی کراندار است. فرض کنید

$$\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})} : l^{۱} \to l^{۱}$$

روی $l^{۱}(\mathbb{N} \setminus \cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N}))$ به عنوان همانی تعریف شود و روی $l^{۱}(\cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N}))$ صفر باشد. قرار دهید

$$S_{\sum} := \sum_{i\in I_{\circ}} P_{\sigma_i} S P^*_{\sigma_i} + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})}$$

که $P^*_{\sigma_i}$ برای هر $i \in I_{\circ}$ نگاشت الحاق P_{σ_i} است. بسادگی دیده می‌شود برای هر $j \in \sigma_i(\mathbb{N})$، $P^*_{\sigma_i}(e_j) = e_{\sigma_i^{-۱}(j)}$ و در غیر اینصورت $P^*_{\sigma_i}(e_j) = \circ$. بنابراین بوضوح $S_{\sum} : l^{۱} \to l^{۱}$ عملگر خطی خوش تعریف است. ابتدا نشان می دهیم که $S_{\sum}$ عملگر نیم‌تصادفی دوگانه است.

اگر $j \in \mathbb{N} \setminus \cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})$، آنگاه

$$\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle S_{\sum}e_j, e_l\rangle = \sum_{l\in\mathbb{N}}\langle \circ + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})}(e_j), e_l\rangle = \sum_{l\in\mathbb{N}}\langle e_j, e_l\rangle = ۱,$$

و اگر $j \in \cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})$ (یعنی $i_{\circ} \in I_{\circ}$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $j = \sigma_{i_{\circ}}(n)$)، آنگاه

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle S_{\sum}e_j, e_l\rangle &= \textstyle\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle(\sum_{i\in I_{\circ}} P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i} + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_{\circ}}\sigma_i(\mathbb{N})})e_j, e_l\rangle \\
&= \textstyle\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle(\sum_{i\in I_{\circ}} P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i})e_j + \circ, e_l\rangle \qquad (۱.۳) \\
&= \textstyle\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle P_{\sigma_{i_{\circ}}}SP^*_{\sigma_{i_{\circ}}}e_j, e_l\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle SP^*_{\sigma_{i_\circ}}e_j, P^*_{\sigma_{i_\circ}}e_l\rangle + \sum_{l\notin\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle SP^*_{\sigma_{i_\circ}}e_j, P^*_{\sigma_{i_\circ}}e_l\rangle \\
&= \sum_{l\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle Se_{\sigma^{-۱}_{i_\circ}(j)}, e_{\sigma^{-۱}_{i_\circ}(l)}\rangle + \circ \\
&= \sum_{l\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle Se_{\sigma^{-۱}_{i_\circ}(\sigma_{i_\circ}(n))}, e_{\sigma^{-۱}_{i_\circ}(l)}\rangle \\
&= \sum_{l\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle Se_n, e_{\sigma^{-۱}_{i_\circ}(l)}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{N}}\langle Se_n, e_m\rangle = ۱,
\end{aligned}
$$

بنابراین برای هر $j \in \mathbb{N}$، $\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle S_\sum e_j, e_l\rangle = ۱$.
حال اگر $l \in \mathbb{N} \setminus \cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle S_\sum e_j, e_l\rangle &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle(\sum_{i\in I_\circ}P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i} + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})})e_j, e_l\rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle(\sum_{i\in I_\circ}P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i})e_j, e_l\rangle + \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}e_j, e_l\rangle \\
&= \circ + \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}e_j, e_l\rangle = \sum_{j\notin\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}\langle e_j, e_l\rangle = ۱,
\end{aligned}
$$

و اگر $l \in \cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})$ (یعنی اگر $i_\circ \in I_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $l = \sigma_{i_\circ}(n)$)، آنگاه

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle S_{\sum}e_j, e_l\rangle &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle(\sum_{i\in I_\circ} P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i} + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})})e_j, e_{\sigma_{i_\circ}(n)}\rangle \\
&= \sum_{j\in\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}\langle(\sum_{i\in I_\circ} P_{\sigma_i}SP^*_{\sigma_i})e_j + \circ, e_{\sigma_{i_\circ}(n)}\rangle \\
&+ \sum_{j\notin\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}\langle \circ + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})}e_j, e_{\sigma_{i_\circ}(n)}\rangle \\
&= \sum_{j\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle P_{\sigma_{i_\circ}}SP^*_{\sigma_{i_\circ}}e_j, e_{\sigma_{i_\circ}(n)}\rangle + \circ \\
&= \sum_{j\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle SP^*_{\sigma_{i_\circ}}e_j, P^*_{\sigma_{i_\circ}}e_{\sigma_{i_\circ}(n)}\rangle \\
&= \sum_{j\in\sigma_{i_\circ}(\mathbb{N})}\langle Se_{\sigma^{-1}_{i_\circ}(j)}, e_{\sigma^{-1}_{i_\circ}(\sigma_{i_\circ}(n))}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{N}}\langle Se_m, e_n\rangle \leq ۱,
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $l \in \mathbb{N}$، $\sum_{l\in\mathbb{N}}\langle S_{\sum}e_j, e_l\rangle \leq ۱$. پس $S_{\sum} \in \mathcal{SD}(l^۱)$. بسادگی بررسی می‌شود که برای هر $i \in I_\circ$، $P_{\sigma_i}S = S_{\sum}P_{\sigma_i}$. از اینرو

$$TSf = \sum_{i\in I_\circ}\alpha_i P_{\sigma_i}Sf = \sum_{i\in I_\circ}\alpha_i S_{\sum}P_{\sigma_i}f = S_{\sum}(\sum_{i\in I_\circ}\alpha_i P_{\sigma_i}f) = S_{\sum}(Tf).$$

از آنجا که $S_{\sum}$ نیم‌تصادفی دوگانه است با استناد به قضیه ۹.۲، قسمت (۴) $\Rightarrow$ (۱)، نتیجه می‌شود که $TSf \prec Tf$.

(۲) از آنجا که $Sf \prec f$،

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(Sf)_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i$$

و به وضوح $TSf \prec Tf$.

(۳) مطابق فرض، $(T_1Sf)_i, (T_1f)_i \in l^1(I_1)$ و $(T_2Sf)_i, (T_2f)_i \in l^1(I_2)$، بنابراین $S_1 \in \mathcal{SD}(l^1(I_1))$ و $S_2 \in \mathcal{SD}(l^1(I_2))$. در این صورت عملگر نیم‌تصادفی دوگانه $\tilde{S} : l^1 \to l^1$ با نمایش ماتریسی

$$\tilde{S} := \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \tilde{S}Tf = \tilde{S}(T_1 + T_2)f &= \tilde{S}(T_1f + T_2f) \\ &= S_1T_1f + S_2T_2f = T_1Sf + T_2Sf = (T_1 + T_2)Sf = TSf. \end{aligned}$$

پس با استفاده مجدد از قضیه ۹.۲، قسمت (۴) $\Rightarrow$ (۱)، داریم $TSf \prec Tf$. $\square$

مثال ۳.۳. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$، $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subset \mathbb{R}$ و عملگرهای خطی $T : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N})$ برای هر $f \in l^1$ به صورت

$$Tf = (\alpha_1 f_1, \cdots, \alpha_k f_1, \alpha_1 f_2, \cdots, \alpha_k f_2, \cdots)$$

تعریف شده باشند. اگر $\sigma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک نگاشت یک به یک برای هر $i = 1, \cdots, k$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ با ضابطه $\sigma_i(n) = nk - k + i$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} Tf &= \alpha_1(\overbrace{f_1, 0, \cdots, 0}^{\text{k-tuples}}, \overbrace{f_2, 0, \cdots, 0}^{\text{k-tuples}}, \cdots) + \cdots + \alpha_k(\overbrace{0, \cdots, 0, f_1}^{\text{k-tuples}}, \overbrace{0, \cdots, 0, f_2}^{\text{k-tuples}}, \cdots) \\ &= \alpha_1 P_{\sigma_1}(f) + \cdots + \alpha_k P_{\sigma_k}(f) = (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_{\sigma_k})(f), \end{aligned}$$

که $P_{\sigma_i}(f) = \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j e_{\sigma_i(j)}$. اگر $S \in \mathcal{SD}(l^1(\mathbb{N}))$ وجود داشته باشد که $f = Sg$ برای $f, g \in l^1(\mathbb{N})$، با استفاده از نتیجه ۱۰.۲، $f \prec g$ و طبق فرم اول از قضیه ۲.۳، $Tf \prec Tg$.

مثال ۴.۳. فرض کنید $I_0 \subseteq \mathbb{N}$ و $\{\sigma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad i \in I_0\}$ یک خانواده از نگاشت های یک به یک

با برد مجزا باشند و $\cup_{i\in I_\circ}\sigma_i(\mathbb{N})$ یک دنباله با جملات صفر روی $\{\alpha_i\}_{i\in I_\circ} \in l^1(I_\circ)$. اگر $h \in l^1$ باشد، آنگاه T که برای هر $f \in l^1$ تعریف شده با ضابطه

$$T(f) = \sum_{i\in I_\circ} \alpha_i P_{\sigma_i}(f) + (\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i)h,$$

حافظ رابطه $Sf \prec f$ به صورت $T(Sf) \prec T(f)$ است.

تفسیر کوانتومی: یادآور می‌شویم که هر سیستم کوانتومی داده شده با یک فضای هیلبرت از بعد متناهی یا نامتناهی مشخص و حالات خالص سیستم با بردارهای یکه در آن فضای هیلبرت مدل سازی می شوند. بنابراین آنها ملزمند که اثر یک داشته باشند و بنابراین اولین مورد از قضیه ۱.۳ و دومین مورد از قضیه ۲.۳ نمی تواند دارای تفسیر فیزیکی باشد. حال آنکه اگر سیستم ترکیبی $H_a \otimes H_b$ و حالات خالص $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ از آنرا با فرض اطلاع از تبدیل پذیری $|\psi\rangle$ به وسیله کانال LOCC به $|\phi\rangle$ در نظربگیریم (برای سیستم‌های از بعد نامتناهی فرض می کنیم که $|\psi\rangle$ یک عضو از مجموعه $\mathfrak{A}$ مطرح شده در نکته ۱۲.۲ باشد)، با استفاده از عملگرهای نگهدارنده در قضیه قبل می توانیم جفت حالات خالصی را شناسایی کنیم که یکی از آنها به دیگری تبدیل پذیر است. شایان ذکر است که شناسایی حالات خالص تبدیل پذیر بخصوص حالات خالص در هم تندیده در فیزیک کوانتوم حائز اهمیت و با عملیات آزمایشگاهی دشوار است.

روند شناسایی جفت حالات خالص ثانویه را به صورت موازی در سیستم‌های از بعد متناهی و نامتناهی در زیر توضیح می دهیم.

در سیستم‌های از بعد متناهی: پایه‌های یکامتعامد $\{e_i\}_{i=1}^{d_a}, \{e'_i\}_{i=1}^{d_a} \subset H_a$ و $\{f_i\}_{i=1}^{d_b}, \{f'_i\}_{i=1}^{d_b} \subset H_b$ وجود دارند که

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{(\lambda_\phi)_i}\ \ e_i \otimes f_i, \quad \text{و} \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{(\lambda_\psi)_i}\ \ e'_i \otimes f'_i,$$

جایی که d نشان دهنده کمترین بعد از H_a و H_b است.

در سیستم‌های از بعد نامتناهی: مجموعه های یکامتعامد (نه لزوماً پایه) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_a$ و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset$

H_b وجود دارند که

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(\lambda_\phi)_i}\ e_i \otimes f_i \quad \text{و} \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(\lambda_\psi)_i}\ e_i^* \otimes f_i^*,$$

در این حالت همانطور که قبلا توضیح داده شد، فرض شده $S \in \mathcal{SD}(l^1)$ وجود دارد که $\lambda_\psi = S\lambda_\phi$ و همچنین $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}$، به ترتیب پایه‌های یکامتعامد H_a و H_b بحث شده در نکته ۱۲.۲ هستند.

در هر دو حالت متناهی و نامتناهی با توجه به اطلاع داشتن از تبدیل حالت خالص $|\psi\rangle$ به وسیله کانال LOCC به $|\phi\rangle$، $\lambda_\psi \prec \lambda_\phi$. حال با استفاده از T در حالت متناهی به شکل دومین فرم از قضیه ۱.۳ وقتی $\alpha > 0$ و $\beta \geq 0$ است و در حالت نامتناهی به فرم اولین و سومین مورد از قضیه ۲.۳، داریم $T(\lambda_\psi) \prec T(\lambda_\phi)$. متعاقبا، با استفاده از این حقیقت که $\|T(\lambda_\phi)\| = \|T(\lambda_\psi)\| = c$، یک جفت جدید از حالات خالص $|\psi'\rangle$ و $|\phi'\rangle$ به صورت زیر بدست می‌آوریم که طبق قضیه نیلسن ۴.۱ و ۴.۲، $|\psi'\rangle$ می تواند در سیستم‌های متناهی تبدیل پذیر و در سیستم‌های از بُعد نامتناهی ϵ-تبدیل پذیر به $|\phi'\rangle$ توسط کانال LOCC باشد.

در سیستم از بعد متناهی:

$$|\phi'\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\frac{(T\lambda_\phi)_i}{c}}\ e_i \otimes f_i, \quad \text{و} \quad |\psi'\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\frac{(T\lambda_\psi)_i}{c}}\ e_i' \otimes f_i',$$

در سیستم از بعد نامتناهی:

$$|\phi'\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(T\lambda_\phi)_i}{c}}\ e_i^* \otimes f_i^*, \quad \text{و} \quad |\psi'\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(T\lambda_\psi)_i}{c}}\ e_i^* \otimes f_i^*.$$

در هر دو حالت متناهی و نامتناهی برای تضمین یکه بودن $|\psi'\rangle$ و $|\phi'\rangle$ در $H_a \otimes H_b$ ضرایب اشمیت را به c تقسیم می کنیم. بعلاوه برای $|\phi'\rangle$ در بعد نامتناهی از $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ به عنوان پایه‌های یکامتعامد به ترتیب H_a و H_b استفاده می کنیم. هیچیک از این قبیل تغییرات خللی در رابطه احاطه‌سازی

$\frac{T\lambda_\phi}{c} \prec \frac{T\lambda_\psi}{c}$، ایجاد نمی کند بنابراین به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که در دو بُعد متناهی و یا نامتناهی، حالت خالص $|\psi'\rangle$ می تواند توسط یک کانال LOCC به حالت خالص $|\phi'\rangle$ تبدیل پذیر یا ϵ-تبدیل پذیر باشد.

سپاسگزاری

این مقاله با استفاده از اعتبار پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان انجام شده است.

مراجع

[1] F. Bahrami, A. Bayati and S.M. Manjegani, Linear preservers of majorization on $l^p(I)$, *Linear Algebra Appl.*, **436** (2012), 3177–3195.

[2] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, Concentrating partial entanglement by local operations, *Phys. Rev. A (3)*, **22**, (1996), 2046-–2052.

[3] E. Chitambar, D. Leung, L. Maninska, M. Ozols and A. Winter, Everything you always wanted to know about LOCC (but were afraid to ask), *Commun. Math. Phys.*, **328** (2014), 303–326.

[4] K.M. Chong, Some extensions of a theorem of Hardy, Littlewood and Pólya and their applications, *Can. J. Math.*, **26**, (1974), 1321–1340.

[5] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Some simple inequalities satisfied by convex functions, *Messenger Math.*, **58** (1929), 145–152.

[6] T. Heinosaari and M.Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[7] A.W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[8] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000.

[9] M. Owari, S.L. Braunstein, K. Nemoto and M. Murao, ϵ-convertibility of entangled states and extension of Schmidt rank in infinite-dimensional systems, *Quantum Inf. Comput.*, **8** (2008), 30–52.

[10] R. Pereira and S.Plosker, Extending a characterization of majorization to infinite dimensions, *Linear Algebra Appl.*, **468**, (2015), 80–86.