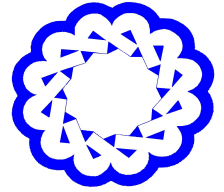


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

# خواص جدید نگاشتهای بدست آمده توسط $p$ -قابها روی فضاهای باناخ

الناز اسگویی\*، اصغر رحیمی ب

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران  
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

### چکیده

$p$ -قابها روی فضاهای باناخ توسیع مستقیمی از قابها روی فضاهای هیلبرت می‌باشند. برخلاف انواع دیگر قابها، نگاشت  $p$ -قابها به دلیل خطی نبودن نگاشت دوگانی، خاصیت خطی و عملگری خود را از دست داده و مانند یک نگاشت غیر خطی از فضای باناخ  $X$  به دوگان آن عمل می‌کند. در این مقاله با گذاشتن شرایطی روی  $p$ -قابها خواصی از نگاشت  $p$ -قاب مانند بطور ضعیف پیوستگی، یکنوایی و وادارنده بودن بررسی می‌شود. همچنین با ترکیب عملگر تجزیه  $U$  با الحاق عملگر  $T^\perp$ ، خواص فزاینده‌گی و طولپایی عملگر  $U(T^\perp)^*$  بررسی می‌شود.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:  
دریافت شده: ۳۱ اردیبهشت  
۱۳۹۸  
پذیرفته شده: ۲۳ تیر ۱۳۹۸  
دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸  
ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی  
جمال

### کلمات کلیدی:

قاب،  $p$ -قاب، نگاشت  
یکنوا، نگاشت وادارنده،  
نگاشت فزاینده.

## ۱. مقدمه

مفهوم قاب‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین<sup>۱</sup> و شفر<sup>۲</sup> در موضوع آنالیز غیرهارمونیک مطرح شد [۱۱]. مطالعات دافین و شفر کاربرد زیادی نداشت تا اینکه در سال ۱۹۸۶ دابشیز<sup>۳</sup>، گراسمان<sup>۴</sup> و مایر<sup>۵</sup> مفهوم قابها را در زمینه تبدیلات گابور و موجک بکار بردند [۹]. پس از آن نظریه قابها بطور گسترده و عمیق توسط بسیاری از افراد مطالعه شد و در بسیاری از علوم مانند پردازش سیگنال، پردازش تصویر، کدگذاری و سیستمهای اینترنت و موبایل مورد استفاده قرار گرفت [۸، ۱۳، ۱۵، ۱۹]. نظریه قابها روی فضاهای هیلبرت بطور وسیعی روی فضاهای باناخ توسعه داده شده است. در سال ۱۹۹۰ گروچنیک<sup>۶</sup>، الدروبی<sup>۷</sup>، سانگ<sup>۸</sup> و تنگ<sup>۹</sup> [۱، ۱۴] مفهوم قابها را روی فضاهای باناخ مطالعه کرده و دو نوع مختلف از قابها را روی فضاهای باناخ تحت عنوان قابهای باناخ و  $p$ -قابها مطرح نمودند. پس از آنها کریستینسن<sup>۱۰</sup> و استوا<sup>۱۱</sup> [۷] مفهوم  $p$ -قابها را روی فضاهای باناخ مطالعه کرده و هر عضو فضای باناخ را با استفاده از دنباله  $p$ -قاب بازسازی کردند. عارفی جمال و محمدخانی مفهوم دوگان  $p$ -قابها را مطرح نموده و رابطه بازنویسی شده کریستینسن را به کمک مفهوم دوگان بدست آوردند [۲]. فاروقی و اسگویی مفهوم  $p$ -قابهای پیوسته را مطرح کرده و نتایج مهمی در این زمینه ارائه داده‌اند که از جمله رابطه بازنویسی ذکر شده را به کمک  $p$ -قابهای پیوسته و قابهای باناخ بدست آورده و خواص نگاشتی نگاشت قاب را روی فضاهای باناخ بررسی کرده‌اند. [۱۲، ۱۸].

در مطالعه قابها، عملگرهای مرتبط با آنها بسیار مورد توجه بوده و به عنوان ابزاری بسیار نیرومند مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از عملگرهای وابسته به قابها عملگر قاب می‌باشد که بدلیل خواص خطی،

آدرس ایمیلها: e.osgooei@uut.ac.ir (الناز اسگویی)، rahimi@maragheh.ac.ir (اصغر رحیمی)  
موجک‌ها و جبرخطی

<sup>1</sup>Duffin

<sup>2</sup>Schaeffer

<sup>3</sup>Daubechies

<sup>4</sup>Grossmann

<sup>5</sup>Meyer

<sup>6</sup>Gröchenig

<sup>7</sup>Aldroubi

<sup>8</sup>Sung

<sup>9</sup>Tang

<sup>10</sup>Christensen

<sup>11</sup>Stoeva

کرانداری، معکوس پذیری، مثبت و خودالحاق بودن بیشتر مورد توجه می‌باشد. اما در مورد  $p$ -قابها این نگاهت متفاوت بوده و بدلیل خطی نبودن نگاهت دوگانی<sup>۱۲</sup> خاصیت خطی و عملگری خود را از دست می‌دهد.

در این مقاله با ایده گرفتن از نتایج استوا در [۲۲] که معکوس پذیری و مثبت بودن نگاهت قاب  $S$  را روی فضاهاى باناخ مطالعه نموده است، خواص متفاوتی از نگاهت  $p$ -قاب  $S$  بررسی شده است. در بخش اول این مقاله، تعاریف مقدماتی قابها آورده شده و سپس اشاره‌ای کوتاه به تعاریف  $p$ -قابها می‌شود. در بخش دوم با توجه به شرایطی که روی  $p$ -قابها گذاشته می‌شود، خواص متفاوتی از نگاهت  $p$ -قاب مانند بطور ضعیف پیوستگی،<sup>۱۳</sup> یکنوایی<sup>۱۴</sup> و وادارنده بودن<sup>۱۵</sup> بررسی می‌شود. در بخش سوم عملگر جدیدی از ترکیب عملگر تجزیه  $U$  و الحاق عملگر وارون  $(T^\perp)$  روی فضای  $\ell^p$  بدست می‌آید که خاصیت فزاینده‌گی<sup>۱۶</sup> این عملگر بسیار مورد توجه است. در سراسر این مقاله  $X$  یک فضای باناخ و  $X^*$  دوگان آن می‌باشد.

**تعریف ۱.۱.** [۶] دنباله  $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subseteq H$  یک قاب برای فضای هیلبرت  $H$  گفته می‌شود هرگاه اعداد ثابت  $0 < A \leq B < \infty$  موجود باشد بطوریکه

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H, \quad (1.1)$$

مقادیر ثابت  $A, B$  به ترتیب کرانهای پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. دنباله  $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subseteq H$  یک دنباله بسط برای  $H$  نامیده می‌شود اگر در عبارت (۱.۱) نابرابری سمت راست برقرار باشد. فرض کنیم  $\{f_i\}_{i=1}^\infty$  یک دنباله بسط برای  $H$  باشد. در اینصورت عملگر

$$T : \ell^2 \rightarrow H, \quad T\{a_i\}_{i=1}^\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i,$$

<sup>12</sup>duality mapping

<sup>13</sup>weakly continuous

<sup>14</sup>monotone

<sup>15</sup>coercive

<sup>16</sup>accretive

عملگر ترکیب و الحاق آن به صورت

$$T^* : H \rightarrow \ell^2, \quad T^* f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i=1}^{\infty},$$

عملگر تجزیه  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. [۷] دنباله  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$  یک  $p$ -قاب ( $1 < p < \infty$ ) برای فضای باناخ  $X$  نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت  $0 < A \leq B < \infty$  موجود باشند بطوریکه

$$A\|f\| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g_i, f \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|f\|, \quad f \in X, \quad (2.1)$$

دنباله  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک دنباله  $p$ -بسل نامیده می‌شود هرگاه نابرابری سمت راست در (۲.۱) برقرار باشد.

اگر  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. آنگاه عملگرهای

$$U : X \rightarrow \ell^p, \quad Uf = \{\langle g_i, f \rangle\}_{i=1}^{\infty},$$

و

$$T : \ell^q \rightarrow X^*, \quad T\{d_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i g_i,$$

خوشتعریف و کراندارند. عملگرهای  $T$  و  $U$  را به ترتیب عملگرهای تجزیه و ترکیب  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  می‌نامند. اگر  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک  $p$ -قاب و یا فقط یک دنباله  $p$ -بسل باشد در اینصورت  $U, T$  عملگرهای کراندار می‌باشند.

لم ۳.۱. [۷] فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک دنباله  $p$ -بسل باشد در اینصورت گزاره‌های زیر برقرارند:  
(۱)  $U^* = T$ .

(۲)  $U \subseteq T^*$ ، به این معنی که  $T^*$  توسعه‌ی  $U$  است و اگر  $X$  انعکاسی باشد، آنگاه  $U = T^*$ .

توجه شود که برای تعریف نگاشت  $p$ -قاب، به نگاشتی از فضای باناخ  $\ell^p$  بتوی فضای باناخ  $\ell^q$  نیاز است. برای رسیدن به این هدف از نگاشت دوگانی استفاده می‌شود.

ابتدا یادآوری می‌شود که فضای باناخ  $X$

-محدب اکید<sup>۱۷</sup> نامیده می‌شود در صورتیکه بازای  $x, y \in X$  اگر  $x \neq y$  و  $\|x\| = \|y\| = 1$ ، آنگاه بازای  $\lambda \in (0, 1)$ ،  $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$ ، [۱۷، ۲۲].

-محدب یکنواخت<sup>۱۸</sup> نامیده می‌شود در صورتیکه فرضیات  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ ،  $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ ،  $\|x_i\| \leq 1$  و  $\|y_i\| \leq 1$  و  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i + y_i\| = 2$  نتیجه دهد که  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - y_i\| = 0$ ، [۱۷، ۲۲].

نگاشت  $\phi_X$  از  $X$  بتوی مجموعه زیرمجموعه‌های  $X^*$  تعریف شده بصورت

$$\phi_{XX} = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},$$

نگاشت دوگانی روی  $X$  نامیده می‌شود [۱۷، ۲۲]. با استفاده از قضیه هان باناخ، بازای هر  $x \in X$  یک مجموعه ناتهی بوده و  $\phi_{XX} \circ = 0$ . فضای باناخ  $X$  هموار<sup>۱۹</sup> نامیده می‌شود هرگاه  $\phi_X(x)$  برای هر  $x \in X$  یک مجموعه تک عضوی باشد [۱۷، ۲۲].

گزاره ۴.۱. [۱۰، ۲۲] اگر  $X$  یک فضای باناخ باشد گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر  $X^*$  محدب اکید باشد، آنگاه برای هر  $x \in X$ ،  $\phi_{XX}$  یک مجموعه تک عضوی است.

(۲) اگر  $X$  و  $X^*$  محدب اکید بوده و  $X$  انعکاسی باشد در اینصورت  $\phi_X$  دوسویی است.

گزاره ۵.۱. [۱۷، ۲۲] فرض کنید  $1 < p, q < \infty$  بطوریکه  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  و  $X = \ell^p$ . در آن صورت  $X$  محدب یکنواخت بوده و هموار است. همچنین، برای هر عنصر غیر صفر  $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$  خواهیم داشت  $\phi_{\ell^p}(x) = x^* \in \ell^q$  که در آن  $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$  و

$$x_i^* = \|x\|_{\ell^p}^{p-1} |x_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

تعریف ۶.۱. [۲۲] فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. نگاشت  $S := T\phi_{\ell^p}U$

<sup>17</sup>strictly convex

<sup>18</sup>uniformly convex

<sup>19</sup>smooth

$X \rightarrow X^*$  نگاشت  $p$ -قاب برای  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  نامیده می‌شود و

$$\langle Sf, f \rangle = \langle T\phi_{\ell p}Uf, f \rangle = \langle \phi_{\ell p}Uf, Uf \rangle = \|Uf\|_p^2 = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g_i, f \rangle|^p \right)^{\frac{2}{p}}.$$

۲. خواص القا شده به نگاشت  $S$  توسط  $p$ -قابها

در این بخش با در نظر گرفتن اینکه  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  است، خواصی از نگاشت  $S$  مطالعه می‌شود. در واقع، شرایطی که تحت آن، نگاشت  $S$  می‌تواند بطور ضعیف پیوسته، یکنوا و وادارنده باشد، بررسی می‌گردد.

تعریف ۱.۰۲. [۵، ۲۰] نگاشت  $A : X \rightarrow X^*$  یکنوا نامیده می‌شود هرگاه بازای هر  $x, y \in X$

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0.$$

لم ۲.۰۲. [۱۶] فرض کنید  $X$  یک فضای باناخ هموار و  $\phi_X$  نگاشت دوگانی روی آن باشد. در این صورت

$$\langle \phi_X x - \phi_X y, x - y \rangle \geq 0.$$

گزاره ۳.۰۲. فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) نگاشت  $p$ -قاب  $S$  بطور ضعیف پیوسته است.

(۲) نگاشت  $p$ -قاب  $S$  یکنوا است.

اثبات. (۱) از آنجا که  $\phi_{\ell p}$  بطور ضعیف پیوسته است [۳] و عملگرهای  $U, T$  کراندار می‌باشند، بنابراین

$S = T\phi_{\ell p}U$  بطور ضعیف پیوسته است.

(۲) بازای هر  $f_1, f_2 \in X$

$$\begin{aligned} \langle S(f_1) - S(f_2), f_1 - f_2 \rangle &= \langle T\phi_{\ell p}U(f_1) - T\phi_{\ell p}U(f_2), f_1 - f_2 \rangle \\ &= \langle \phi_{\ell p}U(f_1) - \phi_{\ell p}U(f_2), U(f_1) - U(f_2) \rangle. \end{aligned}$$

از آنجا که  $\ell^p$  یک فضای باناخ هموار است، با استفاده از لم ۲.۲

$$\langle \phi_{\ell^p}(U(f_1)) - \phi_{\ell^p}(U(f_2)), U(f_1) - U(f_2) \rangle \geq 0.$$

بنابراین  $S$  یک نگاشت یکنوا می‌باشد.  $\square$

تعریف ۴.۲. [۲۰] نگاشت  $A : X \rightarrow X^*$  یک نگاشت وادارنده است اگر نگاشت  $\tau : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  موجود باشد بطوریکه  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = +\infty$  و

$$\langle A(u), u \rangle \geq \tau(\|u\|)\|u\|.$$

وادارنده بودن  $A$  نتیجه می‌دهد  $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty$ .

گزاره ۵.۲. [۲۰] اگر نگاشت بطور ضعیف پیوسته  $A : X \rightarrow X^*$  وادارنده باشد، در اینصورت معادله  $A(u) = g$ ، بازای  $g \in X^*$  دارای جواب است.

گزاره ۶.۲. فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  با کرانه‌های  $A, B$  باشد. در اینصورت نگاشت  $p$ -قاب  $S$  وادارنده است.

اثبات. از آنجا که  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  با کرانه‌های  $A, B$  است، لذا

$$A^p \|f\|^p \leq \langle Sf, f \rangle \leq B^p \|f\|^p, \quad f \in X.$$

بنابراین برای  $f \neq 0$  داریم

$$A^p \|f\| \leq \frac{\langle Sf, f \rangle}{\|f\|} \leq B^p \|f\|.$$

$\square$

در نتیجه  $\lim_{\|f\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle Sf, f \rangle}{\|f\|} = +\infty$ .

نتیجه ۷.۲. فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. در اینصورت معادله  $Sf = g$  بازای هر  $g \in X^*$  دارای جواب است.

### ۳. خاصیت فزاینده‌نگاشت $U(T^\perp)^*$ القا شده توسط $p$ -قابها

در این بخش شرایط مناسب روی  $p$ -قابها در نظر گرفته می‌شود که تحت آن عملگر  $U(T^\perp)^*$  بتواند خواصی مانند فزاینده‌نگی و طولپایی<sup>۲۰</sup> داشته باشد.

**تعریف ۱.۳.** [۲۲] فرض کنید  $X_d$  یک فضای باناخ دنباله‌ای با دوگان  $X_d^*$  باشد. فضای  $X_d$  یک  $BK$ -فضا می‌باشد هرگاه تابعهای مولفه‌ای روی  $X_d$  پیوسته باشند.  $X_d$  یک  $CB$ -فضا نامیده می‌شود هرگاه بردارهای متعارف آن یک پایه شودر برای فضا تشکیل دهند و یک  $RCB$ -فضا نامیده می‌شود هرگاه انعکاسی بوده و  $CB$ -فضا باشد.

از آنجا که  $X_d = \ell^p$  و  $X_d^* = \ell^q$ ،  $RCB$ -فضا بوده و محدب یکنواخت هستند [۲۲]، نتایج زیر برقرار است:

**گزاره ۲.۳.** [۲۲] فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^\infty \subseteq X^*$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) عملگر  $T$  دارای معکوس راست کراندار است.

(۲)  $\text{Ker}(T)$  در فضای  $\ell^q$  کامل می‌شود.<sup>۲۱</sup>

اگر فضای  $M$  متمم توپولوژیکی<sup>۲۲</sup>  $\text{Ker}(T)$  در  $\ell^q$  باشد. در اینصورت  $(T|_M)^{-1}$  معکوس راست کراندار  $T$  می‌باشد.

**تعریف ۳.۳.** [۲۲] فرض کنید  $X_d$  یک  $RCB$ -فضای محدب اکید باشد بطوریکه  $X_d^*$  نیز محدب اکید بوده و  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. همچنین فرض کنید  $\text{Ker}T$  و  $(\text{Ker}T)^\perp$  متمم توپولوژیکی یکدیگر در  $\ell^q$  باشد. در اینصورت  $T^\perp = (T|_{(\text{Ker}T)^\perp})^{-1}$  معکوس راست کراندار  $T$  می‌باشد که وجود آن از گزاره ۲.۳ نتیجه می‌شود.

**گزاره ۴.۳.** [۲۲] فرض کنید  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$  یک پایه متعارف کانونی فضای  $\ell^q$  بوده و  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  باشد. همچنین فرض کنید  $\text{Ker}T$  و  $(\text{Ker}T)^\perp$  متمم توپولوژیکی یکدیگر در  $\ell^q$  بوده و  $T^\perp$

<sup>20</sup>isometric

<sup>21</sup>complemented

<sup>22</sup>topological complement



معکوس راست کراندار  $T$  باشد. در این صورت دنباله  $\{(T^\perp)^* e_i\}_{i=1}^\infty$  یک  $q$ -قاب متعارف  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  بوده و بازای هر  $g \in X^*$

$$T^\perp g = \{T^\perp g(e_i)\}_{i=1}^\infty = \{g(T^\perp)^*(e_i)\}_{i=1}^\infty \quad (۱.۳)$$

تعریف ۵.۳. [۴] فرض کنید  $X$  یک فضای باناخ و  $K$  زیرمجموعه‌ای از  $X$  باشد. نگاشت  $A : X \rightarrow X$  یک نگاشت فزاینده نامیده می‌شود هرگاه بازای هر  $u, v \in K$

$$\langle \phi_X(u - v), A(u) - A(v) \rangle \geq 0.$$

تعریف ۶.۳. [۲۱] عملگر کراندار  $A : X \rightarrow X$  عملگر آبلی الحاقی<sup>۲۳</sup> نامیده می‌شود هرگاه نگاشت دوگانی  $\phi_X : X \rightarrow X^*$  موجود باشد بطوریکه

$$A^* \phi = \phi A.$$

قضیه ۷.۳. فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  بوده و فرضیات گزاره ۴.۳ برقرار باشد. همچنین فرض کنید  $T^\perp T$  یک عملگر آبلی الحاقی بوده و  $\langle g_i, S^{-1} g_k \rangle = \delta_{i,k}$ . در این صورت نگاشت  $U(T^\perp)^* : \ell^p \rightarrow \ell^p$  فزاینده است.

اثبات. بازای هر  $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty, y = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^p$

$$\langle \phi_{\ell^p}(x - y), U(T^\perp)^*(x) - U(T^\perp)^*(y) \rangle = \langle T \phi_{\ell^p}(x - y), (T^\perp)^*(x - y) \rangle$$

---

<sup>23</sup>adjoint abelian

## با استفاده از گزاره ۵.۱

$$\begin{aligned}
\langle T\phi_{\ell^p}(x-y), (T^\perp)^*(x-y) \rangle &= \langle T(\|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \{|x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i)\}_{i=1}^\infty), (T^\perp)^*(x-y) \rangle \\
&= \langle \|x-y\|_{\ell^p}^{-p} T(\{|x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i)\}_{i=1}^\infty), (T^\perp)^*(x-y) \rangle \\
&= \langle \|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) g_i, (T^\perp)^*(x-y) \rangle \\
&= \|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \langle T^\perp(\sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) g_i), x-y \rangle \\
&= \|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \langle \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) T^\perp(g_i), x-y \rangle \quad (۲.۳)
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۵.۱ [۲۲]،  $\{S^{-1}g_i\}_{i=1}^\infty = \{(T^\perp)^*e_i\}_{i=1}^\infty$ ، بنابراین از (۱.۳) و (۲.۳)

$$\begin{aligned}
\langle T\phi_{\ell^p}(x-y), (T^\perp)^*(x-y) \rangle &= \\
\|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \langle \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) \{g_i(T^\perp)^*e_k\}_{k=1}^\infty, \{x_k\} - \{y_k\} \rangle &= \\
\|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) \langle \{g_i(S^{-1}g_k)\}_{k=1}^\infty, \{x_k\} - \{y_k\} \rangle &= \\
\|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i-y_i) \langle \{g_i, S^{-1}g_k\}_{k=1}^\infty, \{x_k\} - \{y_k\} \rangle &= \\
\|x-y\|_{\ell^p}^{-p} \sum_{i=1}^\infty |x_i-y_i|^p &= \|x-y\|_{\ell^p}^p \geq 0.
\end{aligned}$$

□

بنابراین  $U(T^\perp)^*$  یک نگاشت فزاینده است.

گزاره ۸.۳. فرض کنید  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  یک  $p$ -قاب برای  $X$  بوده و فرضیات قضیه ۷.۳ برقرار باشد. در اینصورت  $U(T^\perp)^*$  یک عملگر طولپای است.

اثبات. بازای هر  $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$

$$\begin{aligned}
 \|U(T^{\perp})^*(x)\|_{\ell^p} &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle z, U(T^{\perp})^*(x) \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle Tz, (T^{\perp})^*(x) \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle T^{\perp}Tz, x \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle \{(Tz)(T^{\perp})^*(e_k)\}_{k=1}^{\infty}, x \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle \{(Tz)(T^{\perp})^*(e_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} |\langle \{(Tz)(S^{-1}g_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle| \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(x_k)} (Tz)(S^{-1}g_k) \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \langle \sum_{i=1}^{\infty} z_i g_i, S^{-1}g_k \rangle \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \sum_{i=1}^{\infty} z_i \langle g_i, S^{-1}g_k \rangle \right) \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} \langle \{z_k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle \\
 &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^q, \|z\| \leq 1} \langle z, x \rangle = \|x\|_{\ell^p}.
 \end{aligned}$$

□

## تشکر و قدردانی

بدینوسیله از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران گرامی و همچنین اعضای محترم هیأت تحریریه‌ی مجله که در بهبود نتایج مقاله مؤثر بودند کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم.

## مراجع

- [1] A. Aldroubi, Q. Sung and W. Tang, P-frames and shift invariant subspaces of  $L^p$ , *J. Fourier Anal. Appl.*, **7** (2001), 1–22.
- [2] A.A. Arefijamaal and L. Mohammadkhani, On duals of p-frames, *Involve*, **6**(3) (2013), 301–309.
- [3] T.D. Benavide, G.L. Acedo and H.K. Xu, Qualitative and quantitative properties for the space  $\ell_{p,q}$ , *Houston J. Math.*, **22**(1) (1996), 89–100.
- [4] F.E. Browder, Nonlinear mappings of non-expansive and accretive type in Banach spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **73** (1967), 875–882.
- [5] F.E. Browder and P. Hess, Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **11** (1972), 251–294.
- [6] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Basis*, Birkhäuser, Boston, 2016.
- [7] O. Christensen and D.T. Stoeva, P-frames in separable Banach spaces, *Adv. Comput. Math.*, **18** (2003), 117–126.
- [8] C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press Inc., USA, 1992.
- [9] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 1271–1283.
- [10] S.S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Australia, 2004.
- [11] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.
- [12] M.H. Faroughi and E. Osgooei, Continuous p-Bessel mappings and continuous p-frames in Banach spaces, *Involve*, **4**(2) (2011), 167–186.
- [13] D. Gabor, Theory of communications, *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, **93** (1946), 429–457.
- [14] I.K. Grochenig, Describing functions: Atomic decompositions versus frames, *Monatsh. Math.*, **112** (1991), 1–41.
- [15] I.K. Grochenig, *Foundation of Time Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [16] M.H. Hsu, W. Takahashi and J.Ch. Yao, Genrralized hybrid mappings in Hilbert spaces and Banach spaces, *Taiwanese J. Math.*, **16**(1) (2012), 129–149.
- [17] R. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Interscience

Publication, USA, 1976.

- [18] E. Osgooei, G-vector-valued sequence space frames, *Kyungpook Math. J.*, **56** (2016), 793–806.
- [19] P. Oswald, *Multilevel Finite Element Approximation: Theory and Application*, Teubner Skr. Numerik, Teubner, Stuttgart, 1994.
- [20] T. Roubířek, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhauser, London, 2005.
- [21] J.G. Stampfli, Adjoint abelian operators on Banach space, *Can. J. Math.*, **21** (1969), 505–512.
- [22] D.T. Stoeva, Generalization of the frame operator and the canonical dual frame to Banach spaces, *Asian-Eur. J. Math.*, **1**(4) (2008), 631–643.