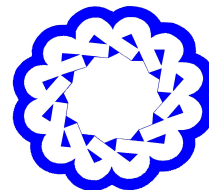


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

### موجک‌های چبیشف برای حل عددی معادلات انتگرال تصادفی ولترا با روش کمترین مربعات

مهدی احمدی‌نیا\*، حمیده افشاری‌ارجمند، مختار عباسی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

#### چکیده

این مقاله با استفاده از موجک چبیشف و روش کمترین مربعات، یک روش تقریبی برای حل معادله انتگرال ایتو-ولترا ارائه می‌دهد. معادله انتگرال ایتو-ولترا با روش کمترین مربعات به وسیله موجک چبیشف به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود که آنالیز خطای روش پیشنهادی، ارائه شده و سرعت همگرایی نیز اثبات شده است. همچنین مثال‌های عددی میزان دقت و کارآمدی این روش را نسبت به روش ماتریس عملیاتی تصادفی نشان می‌دهند.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

#### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۴ بهمن ۱۳۹۷

پذیرفته شده: ۱۳ تیر ۱۳۹۸

دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور

۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی توکلی

#### کلمات کلیدی:

معادله انتگرال، موجک

چبیشف، انتگرال ایتو.

\*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: m-ahmadinia@qom.ac.ir (مهدی احمدی‌نیا)، afshariarjmand7@gmail.com (حمیده

افشاری‌ارجمند)، m.abbasi@qom.ac.ir (مختار عباسی)

<http://doi.org/10.22072/wala.2019.102484.1216>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

انتگرال تصادفی در مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌ها از جمله: مدل‌سازی دینامیک راکتور [۲۳]، [۳] مسائل مالی و سرمایه‌گذاری [۳۴، ۷، ۶] به کار می‌رود. آن‌جایی که بررسی و مطالعه سیستم‌های دینامیکی در مسائل فیزیک، مهندسی، پزشکی و همچنین مالی بسیار حائز اهمیت است و اغلب این سیستم‌ها وابسته به یک منبع نویز می‌باشند، لذا مدل ریاضی این پدیده‌ها معمولاً به شکل‌های گوناگونی از معادلات دیفرانسیل تصادفی یا معادلات انتگرال تصادفی، ظاهر می‌شوند. حل این گونه معادلات معمولاً کار بسیار مشکلی است، بنابراین روش‌های عددی برای حل تقریبی این معادلات، بسیار مورد توجه می‌باشد [۳۱، ۲۸، ۲۵، ۲۱، ۲۰، ۱۶، ۱۱، ۵، ۴]. این مقاله به حل معادله انتگرال تصادفی خطی ولترا<sup>۱</sup> زیر می‌پردازد:

$$X(t) = f(t) + \int_0^t K_1(s, t)X(s)ds + \int_0^t K_2(s, t)X(s)dB(s), \quad (1.1)$$

که  $X(t)$ ،  $f(t)$ ،  $K_1(s, t)$ ،  $K_2(s, t)$  فرآیندهای تصادفی تعریف شده بر فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  هستند که  $X(t)$  مجهول می‌باشد و بقیه فرآیندهای تصادفی، یعنی  $f(t)$ ،  $K_1(s, t)$ ،  $K_2(s, t)$  معلوم هستند. در معادله (۱.۱) دو جمله انتگرالی وجود دارد که اولین جمله انتگرالی، انتگرال ریمان است و انتگرال دوم انتگرال ایتو<sup>۲</sup> نام دارد و  $B(s)$  یک فرآیند براونی<sup>۳</sup> است که در بخش بعدی تعریف می‌شود. اخیراً مقالات متعددی در زمینه حل عددی معادلات انتگرال ایتو ارائه شده است؛ در زمینه معادلات انتگرال خطی، مالک نژاد و همکاران [۲۱، ۲۰]، خدابین و همکاران [۱۵، ۱۴]، حیدری و همکاران [۹، ۸]، محمدی [۲۸، ۲۷، ۲۶]، صفارزاده و همکاران [۳۵]، پاچپات و مورگ<sup>۴</sup> [۳۲]، کورتز<sup>۵</sup> و همکاران [۵، ۴]، ایلک و یان‌کویچ<sup>۶</sup> [۱۳] و همچنین در حالت معادلات انتگرال غیرخطی میرزایی و همکاران [۲۴] و با استفاده از موجک ویلسون، موسوی و همکاران [۳۱] به تحلیل و حل این مسائل پرداخته‌اند.

<sup>1</sup>Volterra

<sup>2</sup>Itô integral

<sup>3</sup>Brownian

<sup>4</sup>Murge and Pachpatte

<sup>5</sup>Cortes

<sup>6</sup>Junkovic and Ilic

در زمینه معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری با استفاده از موجک‌ها راه حل عددی ارائه داده‌اند. در بخش بعد برخی از نکات و مقدمات برای حل عددی معادلات انتگرال ایتو-ولترا معرفی خواهد شد. برای توضیحات بیشتر در مورد معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات انتگرال تصادفی به کلودن و پلاتن<sup>۸</sup> [۱۸] و اکسندال<sup>۹</sup> [۳۳] می‌توان مراجعه کرد و همچنین برای حل عددی این معادلات یکی از مراجع مهم مقاله دسموند‌های‌ام<sup>۱۰</sup> [۱۲] است. ما در این مقاله یک روش عددی بر اساس روش کمترین مربعات و موجک چبیشف<sup>۱۱</sup> برای حل معادله انتگرال ایتو-ولترا ارائه می‌دهیم. به علاوه آنالیز همگرایی روش پیشنهادی همراه با اثبات سرعت همگرایی ارائه شده است. همچنین روش پیشنهادی با روش ماتریس عملیاتی تصادفی برای موجک چبیشف توسط مثال‌های عددی مقایسه شده است و نتایج عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دقیق‌تر از روش ماتریس عملیاتی تصادفی برای موجک چبیشف است. بخش ۲، به معرفی معادله انتگرال ایتو-ولترا و موجک‌های چبیشف می‌پردازد. بخش ۳، روش پیشنهادی را توصیف می‌کند و در بخش ۴ تحلیل همگرایی به همراه اثبات ارائه شده است. در بخش ۵، نتایج روش پیشنهادی با روش ماتریس عملیاتی موجک چبیشف مقایسه شده‌اند و نهایتاً یک نتیجه‌گیری ارائه شده است.

## ۲. پیشنهادها

این بخش به معرفی پایه‌های موجک چبیشف، فرآیند براونی و انتگرال ایتو براساس کتاب‌های [۱، ۲، ۱۸، ۲۲، ۳۳] و مقاله [۱۲] می‌پردازد.

تعریف ۱.۰.۲. (فرآیند براونی) فرآیند تصادفی  $\{B(t), t \geq 0\}$  را یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر<sup>۱۲</sup>) می‌گویند اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

$$\text{الف) } B(0) = 0,$$

<sup>7</sup>Ciancio

<sup>8</sup>Kloeden and Platen

<sup>9</sup>Oksendal

<sup>10</sup>Higham

<sup>11</sup>Chebyshev wavelet

<sup>12</sup>Wiener process

ب)  $B(t) - B(s)$  برای  $0 \leq s \leq t \leq T$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $t - s$  باشد یعنی  $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t - s}N(0, 1)$  که  $N(0, 1)$  نماد توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است.

ج) متغیرهای تصادفی  $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$  برای  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$  مستقل باشند.

که  $\Delta t = \frac{T}{N}$  و  $t_j = j\Delta t$  برای  $j = 0, 1, \dots, N$  و بنابر شرایط (ب) و (ج) می‌توان گفت:

$$B(t_j) - B(t_{j-1}) = z \sqrt{\Delta t}, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

برای  $z \sim N(0, 1)$ .

تعریف ۲.۲. (انتگرال ایتو) [۲] اگر فرآیند تصادفی  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  اندازه پذیر باشد، آنگاه انتگرال ایتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b X(t)dB(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p-1} X(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)), \quad (1.2)$$

که  $t_j = a + \frac{b-a}{p}j$  و  $j = 0, 1, \dots, p$  یک حرکت براونی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  است. حاصل انتگرال در (۱.۲) یک متغیر تصادفی می‌باشد و در فضای  $L^2(\Omega, P)$  تعریف شده است؛ به عبارتی دیگر

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_a^b X(t)dB(t) - \sum_{i=0}^{p-1} X(t_i) (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \right|^2 \right] \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

وقتی که  $p \rightarrow \infty$ .

برای تعریف موجک چیشف نیاز داریم از چندجمله‌ای‌های چیشف استفاده کنیم، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_j(x) = \cos(j\theta), \quad j = 0, 1, \dots;$$

به طوری که  $\theta = \arccos(x)$ . چندجمله‌ای‌های چیشف  $T_j$  نسبت به تابع وزن  $\omega(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  روی بازه  $[-1, 1]$  متعامد هستند. این چندجمله‌ای‌ها را به طریق زیر می‌توان به چندجمله‌ای‌های متعامد یکه تبدیل کرد:

$$\tilde{T}_j(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & j = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_j(x), & j > 0. \end{cases}$$

تعریف ۳.۲. (موجک چیشف) موجک چیشف  $\Psi_{ij}(x)$  به صورت

$$\Psi_{ij}(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^i} \tilde{T}_j(2^k x - 2i + 1), & \frac{i-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{i}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

است که برای  $k \in \mathbb{N}$  و  $M \in \mathbb{N}$  داریم  $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ،  $j = 0, 1, \dots, M-1$ . موجک‌های چیشف با تابع وزن

$$\omega_{ik}(x) = \omega(2^k x - 2i + 1)$$

روی هر زیر بازه  $\left[\frac{i-1}{2^{k-1}}, \frac{i}{2^{k-1}}\right)$  که  $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ، متعامد هستند. تابع  $f(x) \in L^2[-1, 1]$  را می‌توان با استفاده از موجک‌های چیشف با ثابت دلخواه  $k$  به صورت زیر بسط داد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \Psi_{ij}(x), \quad (3.2)$$

به طوری که

$$c_{ij} = \int_{\frac{i-1}{2^{k-1}}}^{\frac{i}{2^{k-1}}} f(x) \frac{k}{2^i} \tilde{T}_j(2^k x - 2i + 1) \omega(2^k x - 2i + 1) dx.$$

بسط موجکی تابع  $f(x)$  در رابطه (۳.۲) را می‌توان با مجموع متناهی زیر تقریب زد:

$$f(x) \approx T_{k,M}(f(x)) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij} \Psi_{ij}(x) = C^T \Psi(x),$$

که  $C$  و  $\Psi(x)$  بردارهایی  $\hat{m} = M \cdot 2^{k-1}$  تایی‌اند و برابرند با:

$$C = [c_{10}, \dots, c_{1M-1}, \dots, c_{2^{k-1}0}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T,$$

$$\Psi(x) = [\Psi_{10}(x), \dots, \Psi_{1M-1}(x), \dots, \Psi_{2^{k-1}0}(x), \dots, \Psi_{2^{k-1}M-1}(x)]^T,$$

به‌طور خلاصه:

$$f(x) \approx \sum_{l=1}^{\hat{m}} c_l \Psi_l(x) = C^T \Psi(x), \quad (4.2)$$

که  $\Psi_l = \Psi_{ij}$  و  $c_l = c_{ij}$  به طوری که  $l = M(i-1) + j + 1$  است و  $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ ،  $0 \leq j \leq M-1$ ، لذا داریم:

$$C = [c_1, \dots, c_M, \dots, c_{M(2^{k-1}-1)+1}, \dots, c_{\hat{m}}]^T.$$

تعریف ۴.۲. (نیم‌نرم وزن‌دار چبیشف) [۳۶] تابع  $\| \cdot \|_{T,i}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{T,i} := \int_{\frac{i-1}{2^{k-1}}}^{\frac{i}{2^{k-1}}} \frac{|u'(t)|}{\sqrt{1 - (2^k t - 2i + 1)^2}} dt$$

یک نیم‌نرم است که روی بازه  $i$ -ام تعریف شده است، برای اطلاعات بیشتر به [۳۶] مراجعه کنید.

قضیه زیر براساس ایده‌ای از دو قضیه در [۳۶] ارائه شده است.

قضیه ۵.۲. فرض کنید  $f \in C^2[-1, 1]$  و  $V$  کران بالای مجموعه  $\{ \|f'\|_{T,i} \mid i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \}$  به

ازای هر  $k$  طبیعی باشد، آنگاه

$$\|f - T_{k,M}(f)\|_{\infty} \leq \frac{V\sqrt{\pi}}{(M-1)\sqrt{2^{3k-1}}},$$

که  $V$  ثابت و مستقل از  $M$  و  $k$  می‌باشد.

اثبات. برای هر  $x$  در فاصله  $[-1, 1]$  وجود دارد  $i_0$  به طوری که  $x \in I_{i_0} = \left[\frac{i_0-1}{2^{k-1}}, \frac{i_0}{2^{k-1}}\right]$  و در نتیجه

$$T_{k,M}(f(x)) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij} \Psi_{ij}(x) = \sum_{j=0}^{M-1} c_{i_0,j} \Psi_{i_0,j}(x),$$

می‌دانیم:

$$c_{i_0,j} = \int_{\frac{i_0-1}{2^{k-1}}}^{\frac{i_0}{2^{k-1}}} \Psi_{i_0,j}(x) f(x) \omega_{i_0,k}(x) dx \quad (5.2)$$

و همچنین بنا بر تعریف ۳.۲ که  $\Psi_{i_0,j}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \tilde{T}_j(2^k x - 2i_0 + 1)$ ،  $\omega_{i_0,k}(x) = \omega(2^k x - 2i_0 + 1)$  و با تغییر متغیر  $s = 2^k x - 2i_0 + 1$  رابطه (۵.۲) به صورت تبدیل خواهد شد:

$$c_{i_0,j} = \frac{e_j}{2^{k/2} \sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 T_j(s) f\left(\frac{s+2i_0-1}{2^k}\right) \omega(s) ds$$

که

$$e_j := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \sqrt{2}, & j \neq 0 \end{cases}$$

و سرانجام با تغییر متغیر مثلثاتی  $s = \cos(\theta)$  داریم:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \frac{e_j}{\sqrt{2^k \pi}} \int_0^\pi f\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right) \cos(j\theta) d\theta \\ &= \frac{e_j}{2^k j \sqrt{2^k \pi}} \int_0^\pi f'\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right) \sin(j\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{e_j}{j \sqrt{2^k \pi}} \int_0^\pi f'\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\cos((j-1)\theta)}{2} - \frac{\cos((j+1)\theta)}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{e_j}{j \sqrt{2^k \pi}} \left[ \frac{1}{(j-1)2^{k+1}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\cos((j-2)\theta)}{2} - \frac{\cos((j)\theta)}{2}\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(j+1)2^{k+1}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\cos(j\theta)}{2} - \frac{\cos((j+2)\theta)}{2}\right) d\theta \right] \end{aligned}$$

در رابطه فوق تساوی دوم و چهارم با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء بدست آمده است و تساوی سوم از روابط مثلثاتی حاصل شده است، بنابراین:

$$\begin{aligned} |c_{i,j}| &\leq \frac{e_j}{j \sqrt{2^k \pi}} \int_0^\pi |f''\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right)| \left( \frac{1}{(j-1)2^{k+1}} \left\| \frac{\cos((j-2)\theta)}{2} - \frac{\cos((j)\theta)}{2} \right\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(j+1)2^{k+1}} \left\| \frac{\cos(j\theta)}{2} - \frac{\cos((j+2)\theta)}{2} \right\|_\infty \right) d\theta \\ &\leq \frac{e_j}{j \sqrt{2^k \pi}} \left( \frac{1}{2^{k+1}(j-1)} + \frac{1}{2^{k+1}(j+1)} \right) \int_0^\pi |f''\left(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k}\right)| d\theta \\ &= \frac{e_j}{(j-1)(j+1) \sqrt{2^{\delta k} \pi}} \int_{-1}^1 \left| \frac{f''\left(\frac{t + 2i_0 - 1}{2^k}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \right| dt \\ &\leq \frac{2^k V e_j}{(j-1)(j+1) \sqrt{2^{\delta k} \pi}} \tag{۶.۲} \end{aligned}$$

نامساوی (۶.۲) با توجه به تساوی زیر حاصل شده است،



$$\int_0^\pi |f''(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k})| d\theta = 2^k \int_{\frac{(i-1)}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \frac{|f''(s)|}{\sqrt{1 - (2^k s - 2i_0 + 1)^2}} ds = 2^k \|f'\|_{T,i} \quad (7.2)$$

و از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\|f - T_{k,M}(f)\|_\infty = \left| \sum_{j=M+1}^{\infty} c_{i_0,j} \Psi_{ij}(x) \right| \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |c_{i_0,j}|$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|f - T_{k,M}(f)\|_\infty &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |c_{i_0,j}| \leq \frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{2^{3k}\pi}} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)(j+1)} \\ &\leq \frac{V}{\sqrt{2^{3k-1}\pi}} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)^2} \\ &\leq \frac{V}{\sqrt{2^{3k-1}\pi}} \int_M^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{V\sqrt{\pi}}{(M-1)\sqrt{2^{3k-1}}} \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که تقریب  $T_{k,M}(f)$  با افزایش  $k$  و  $M$  هم‌سرعت با  $\frac{V\sqrt{\pi}}{(M-1)\sqrt{2^{3k-1}}}$  به صفر میل می‌کند. مستقل بودن  $V$  (به‌عنوان کران بالای نیم‌نرم‌های  $f'$ ) از پارامترهای  $k$  و  $M$  در تذکر بعدی توضیح داده شده است. □

تذکر ۱. توجه کنید که مشتقات  $f$  در انتگرال‌گیری‌های اثبات قضیه، می‌توانند از نوع مشتق ضعیف باشند که در روند اثبات تغییری حاصل نمی‌شود، کافی است  $f$  متعلق به فضای سوبولوف  $H^2[-1, 1]$  باشد؛ همچنین ثابت  $V$  که مستقل از  $k$  و  $M$  است، صرفاً کران بالایی برای نیم‌نرم‌های مشتق ضعیف  $f$  می‌باشد. مستقل بودن  $V$  از  $M$  بسیار واضح است و همچنین مستقل بودن  $V$  از  $k$  را بنابر رابطه (۷.۲)

۹۸ احمدی نیا، افشاری ارجمند، عباسی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۸۹-۱۱۵  
 به طریق زیر می‌توان بدست آورد:

$$\|f'\|_{T,i} = 2^{-k} \int_0^\pi |f''(\frac{\cos(\theta) + 2i_0 - 1}{2^k})| d\theta \leq \pi \|f''\|_\infty.$$

در حالتی که  $f \in H^2$  باشد، می‌دانیم  $f'' \in L^2$  و مشتقات به مفهوم مشتق ضعیف هستند و ثابت  $V$  برابر  $\|f\|_{H^2}$  خواهد شد.

### ۳. توصیف روش

عملگر خطی  $L$  را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(X(t)) := X(t) - \int_0^t K_1(s,t)X(s)ds - \int_0^t K_2(s,t)X(s)dB(s).$$

اگر  $X(t)$  جواب دقیق معادله انتگرال ایتو-ولترا (۱.۱) باشد، آنگاه:

$$\|L(X) - f\|_{L^2} = 0.$$

برای  $\epsilon > 0$  دلخواه،  $X_\epsilon(t)$  را به عنوان تقریبی از جواب  $X(t)$  در نظر می‌گیریم هرگاه

$$\|L(X_\epsilon) - f\|_{L^2} < \epsilon, \tag{۱.۳}$$

اکنون روشی برای بدست آوردن تقریبی از جواب به ازای هر  $\epsilon > 0$  دلخواه ارائه می‌دهیم. فرض کنید  $X_{\hat{m}}(t)$  یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های چیشف به صورت

$$X(t) \simeq X_{\hat{m}}(t) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j} \Psi_{i,j}(t) = \sum_{l=1}^{\hat{m}} c_l \Psi_l(t)$$

۹۹ احمدی‌نیا، افشاری‌ارجمند، عباسی / موجک‌ها و جبرخطی ۶ (۱) (۱۳۹۸) ۸۹-۱۱۵  
 باشد که  $c_l$  ضرایب مجهول هستند. مساله مینیم‌سازی

$$\min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|L(X_{\hat{m}}) - f\|_{L^2} \quad (۲.۳)$$

را در نظر بگیرید، فرض کنید مساله مینیم‌سازی (۲.۳) در  $c_1^*, \dots, c_{\hat{m}}^*$  مینیم خود را اتخاذ کند آنگاه  $\sum_{l=1}^{\hat{m}} c_l^* \Psi_l(t)$  تقریبی از جواب (۱.۱) خواهد بود. در بخش بعدی اثبات می‌شود که

$$\mathbb{E} \left[ \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|L(X_{\hat{m}}) - f\|_{L^2} \right] = \mathbb{E} \left[ \left\| L \left( \sum_{l=1}^{\hat{m}} c_l^* \Psi_l \right) - f \right\|_{L^2} \right] \rightarrow 0 \quad (۳.۳)$$

وقتی  $\hat{m} \rightarrow \infty$ . اکنون برای بدست آوردن مینیم باید دستگاه خطی

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^T \left( \sum_{j=1}^{\hat{m}} c_j L(\Psi_j(t)) - f(t) \right)^2 dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m}, \quad (۴.۳)$$

حل شود، بنابراین

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{\hat{m}} c_j L(\Psi_j(t)) L(\Psi_i(t)) dt = \int_0^T f(t) L(\Psi_i(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m};$$

با استفاده از ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t)g(t)dt$  می‌توان دستگاه خطی (۴.۳) را به شکل

$$\sum_{j=1}^{\hat{m}} c_j \langle L(\Psi_i(t)), L(\Psi_j(t)) \rangle = \langle L(\Psi_i(t)), f(t) \rangle \quad (۵.۳)$$

نوشت؛ به عبارتی دستگاه خطی (۴.۳) برابر

$$Ac = b \quad (۶.۳)$$

است که  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{\hat{m}})^t \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{\hat{m}})^t \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$  به گونه‌ای که

$$b_i = \langle L(\Psi_i(t)), f(t) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m}; \quad (7.3)$$

$$a_{ij} = \langle L(\Psi_i(t)), L(\Psi_j(t)) \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}. \quad (8.3)$$

حل مساله مینیمم‌سازی (۲.۳) به حل دستگاه معادلات (۶.۳) تبدیل می‌شود. جواب تقریبی  $X_{\hat{m}}(t)$  از حل دستگاه معادلات (۶.۳) بدست می‌آید. در بخش بعدی تحت شرایطی اثبات می‌شود که با افزایش  $\hat{m}$  جواب تقریبی  $X_{\hat{m}}(t)$  به جواب واقعی مساله همگرا می‌شود. تعداد انتگرال‌ها در (۷.۳) و (۸.۳) برابر  $\hat{m}^2 + \hat{m}$  می‌باشد که به لحاظ محاسباتی بسیار زمان‌بر است و بدلیل این‌که محاسبات این انتگرال‌ها همگی از هم مستقل هستند، لذا می‌توان از محاسبات موازی برای محاسبه این تعداد انتگرال مستقل از هم، بهره برد. درمورد محاسبات موازی در انتهای بخش مثال‌های عددی توضیحات کاملی داده شده است.

#### ۴. آنالیز همگرایی

این بخش به اثبات سرعت همگرایی روش پیشنهادی می‌پردازد، قبل از آن به طور مختصر نامساوی دوب <sup>۱۳</sup> و خاصیت ایزومتري ایتو <sup>۱۴</sup> را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴ [۱۷] (نامساوی دوب) اگر  $X(t)$  یک فرآیند تصادفی باشد و  $p > 1$  آنگاه:

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} |X(s)|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X(t)|^p],$$

در این مقاله حالت  $p = 2$  مورد استفاده است، یعنی

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} |X(s)|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [|X(t)|^2].$$

<sup>13</sup>Doob's inequality

<sup>14</sup>Itô isometry property

۱۰۱ احمدی نیا، افشاری ارجمند، عباسی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۸۹-۱۱۵  
و به‌طور متداول به آن نامساوی دوب  $L^2$  گفته می‌شود.

قضیه ۲.۴. [۱۷] (خاصیت ایزومتري ایتو) اگر  $f(t, \omega)$  تابعی روی  $[a, b] \times \Omega$  باشد، تساوی زیر برقرار است و خاصیت ایزومتري ایتونامیده می‌شود:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b f(t, \omega) dB(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_a^b f^2(t, \omega) dt \right].$$

قضیه بعدی همگرایی روش پیشنهادی را بیان می‌کند، قبل از بیان قضیه لازم است نرم زیر را تعریف کنیم. قابل ذکر است که نماد  $E$ ، نماد امید ریاضی می‌باشد.

$$\|X\|_{\infty, E} := \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \right].$$

قضیه ۳.۴. فرض کنید  $X(t)$  یک فرآیند تصادفی روی بازه  $[0, T)$  باشد و  $\tilde{X}_{\hat{m}}(t) = \sum_{l=1}^{\hat{m}} u_l \Psi_l(t)$  تقریب موجک چیشف  $X(t)$  باشد که در بخش قبل توصیف شد، همچنین  $K_1$  و  $K_2$  توابعی معلوم هستند که  $\|K_1\|_{\infty} \leq M$  و  $\|K_2\|_{\infty} \leq M$ ؛ آنگاه هر دو گزاره زیر، وقتی  $\hat{m} \rightarrow \infty$  برقرارند.

$$\begin{aligned} & \text{آ. } \|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)\|_{\infty, E} \rightarrow 0, \\ & \text{ب. } \mathbb{E} \left[ \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|X_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t X_{\hat{m}}(s) K_1(s, t) ds - \int_0^t X_{\hat{m}}(s) K_2(s, t) dB(s)\|_{L^2}^2 \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

اثبات. آ. قضیه ۵.۲ نشان می‌دهد که

$$\|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)\|_{\infty, E} = \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T)} |\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)| \right] \rightarrow 0.$$

ب. اکنون به اثبات قسمت دوم قضیه می‌پردازیم، اکنون به اثبات قسمت دوم قضیه می‌پردازیم،

$$\begin{aligned}
 & \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|X_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_1(s, t)ds - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{L^2}^2 \\
 & \leq \|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t \tilde{X}_{\hat{m}}(s)K_1(s, t)ds - \int_0^t \tilde{X}_{\hat{m}}(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{L^2}^2 \\
 & \leq T^2 \|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t \tilde{X}_{\hat{m}}(s)K_1(s, t)ds - \int_0^t \tilde{X}_{\hat{m}}(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{\infty}^2 \\
 & = T^2 \|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t) + \int_0^t (X - \tilde{X}_{\hat{m}})(s)K_1(s, t)ds + \int_0^t (X - \tilde{X}_{\hat{m}})(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{\infty}^2 \\
 & \leq 3T^2 (\|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)\|_{\infty}^2 + \|\int_0^t (X - \tilde{X}_{\hat{m}})(s)K_1(s, t)ds\|_{\infty}^2 + \|\int_0^t (X - \tilde{X}_{\hat{m}})(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{\infty}^2)
 \end{aligned}$$

آخرین نامساوی بنا به این نامساوی همیشه درست  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  برقرار است، بنابراین

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|X_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_1(s, t)ds - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{L^2}^2 \right] \\
 & \leq 3T^2 \|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)\|_{\infty, E}^2 + 3T^2 M^2 \|X(t) - \tilde{X}_{\hat{m}}(t)\|_{\infty, E}^2 \\
 & + 3T^2 \|\int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s))K_2(s, t)dB(s)\|_{\infty, E}^2 \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

همچنین رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
 \|\int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s))K_2(s, t)dB(s)\|_{\infty, E}^2 & = \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s))K_2(s, t)dB(s) \right|^2 \right] \\
 & \leq \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^T (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s))K_2(s, T)dB(s) \right|^2 \right] \\
 & = \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)|^2 |K_2(s, T)|^2 ds \right] \\
 & \leq 4TM^2 \|X(t) - \tilde{X}_{\hat{m}}(t)\|_{\infty, E}^2 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

نامساوی اول و تساوی دوم به ترتیب بنابر نامساوی دوب (۱.۴) و خاصیت ایزومتري ایتو (۲.۴) برقرار هستند، اکنون با توجه به (۱.۴)، (۲.۴) و قسمت (آ) داریم:

$$\mathbb{E} \left[ \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \|X_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_1(s, t)ds - \int_0^t X_{\hat{m}}(s)K_2(s, t)dB(s)\|_{L^2}^2 \right] \leq 3T^2(1 + T^2M^2 + 4TM^2)\|\tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t)\|_{\infty, E}^2 \rightarrow 0,$$

وقتی  $\hat{m} \rightarrow \infty$  با توجه به این‌که ثابت  $3T^2(1 + T^2M^2 + 4TM^2)$  مستقل از  $\hat{m}$  می‌باشد، قسمت اول قضیه، درستی رابطه فوق را ایجاب می‌کند.

□

تذکر ۲. معادله انتگرال ایتو-ولترا زیر (با فرآیند وینر چند بعدی) را، در نظر بگیرید:

$$X(t) = f(t) + \int_0^t K_0(s, t)X(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t K_j(s, t)X(s)dB_j(s), \quad t \in [0, T),$$

که در اینجا  $B_j$ ها حرکت‌های بروانی مستقلی هستند و

$$B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t)), \quad t \in [0, T),$$

حرکت بروانی چند بعدی نامیده می‌شود. روش ارائه شده همچنین برای معادله انتگرال ایتو-ولترا (با حرکت بروانی چند بعدی) قابل اجرا است و آنالیز همگرایی روش نیز قابل تعمیم است. همگرایی روش که با قضیه ۳.۴ اثبات می‌شد، در این حالت نیز برقرار است. با تغییر جزئی در اثبات، قضیه برای

حالت چند بعدی صادق است. مشابه رابطه (۲.۴) رابطه زیر را داریم:

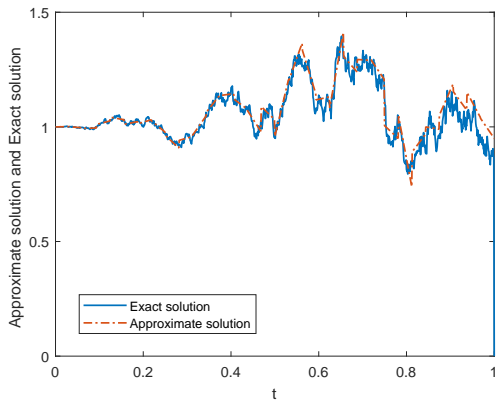
$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j=0}^d \int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)) K_j(s, t) dB(s) \right\|_{\infty, E}^2 &= \left\| \left( \sum_{j=0}^d \int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)) K_j(s, t) dB(s) \right)^2 \right\|_{\infty, E} \\
 &\leq \left\| d \cdot \sum_{j=0}^d \left( \int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)) K_j(s, t) dB(s) \right)^2 \right\|_{\infty, E} \\
 &= d \cdot \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=0}^d \left| \int_0^t (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)) K_j(s, t) dB(s) \right|^2 \right] \\
 &\leq 4d \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^d \left| \int_0^T (X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)) K_j(s, T) dB(s) \right|^2 \right] \\
 &= 4d \cdot \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X(s) - \tilde{X}_{\hat{m}}(s)|^2 |K_j(s, T)|^2 ds \right] \\
 &\leq 4dT M^2 \|X(t) - \tilde{X}_{\hat{m}}(t)\|_{\infty, E}^2, \tag{۳.۴}
 \end{aligned}$$

نامساوی اول از نامساوی کشی شوارتز (برای دو بردار در  $\mathbb{R}^d$ ) نتیجه شده است، نامساوی دوم و تساوی سوم به ترتیب بنابر نامساوی دوب (۱.۴) و خاصیت ایزومتری ایتو (۲.۴) برقرار هستند و نامساوی آخر با در نظر گرفتن  $M$  بعنوان کران بالای همه  $\|K_j\|_{\infty}$  که  $1 \leq j \leq d$  حاصل می شود. حال با در نظر گرفتن رابطه (۱.۴) در حالت حرکت بروانی چند بعدی و رابطه (۳.۴) خواهیم داشت:

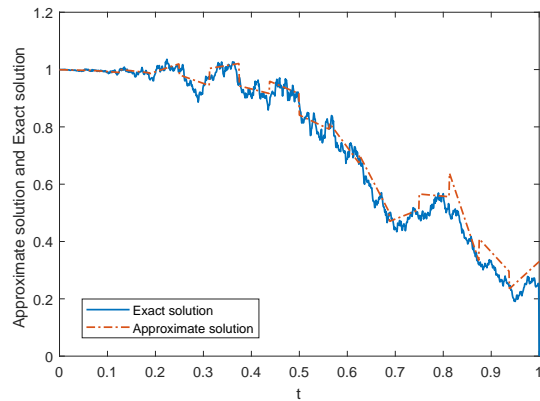
$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[ \min_{c_1, \dots, c_{\hat{m}}} \left\| X_{\hat{m}}(t) - f(t) - \int_0^t X_{\hat{m}}(s) K_1(s, t) ds - \sum_{j=0}^d \int_0^t X_{\hat{m}}(s) K_j(s, t) dB(s) \right\|_{L^2}^2 \right] \\
 &\leq 3T^2 (1 + T^2 M^2 + 4dT M^2) \| \tilde{X}_{\hat{m}}(t) - X(t) \|_{\infty, E}^2 \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

وقتی  $\hat{m} \rightarrow \infty$ . با توجه به این که ثابت  $3T^2 (1 + T^2 M^2 + 4dT M^2)$  مستقل از  $\hat{m}$  می باشد، قسمت اول قضیه ۳.۴، درستی رابطه فوق را ایجاب می کند. پس روش ارائه شده روی معادلات ایتو-ولترا با حرکت بروانی چند بعدی نیز همگرا است.

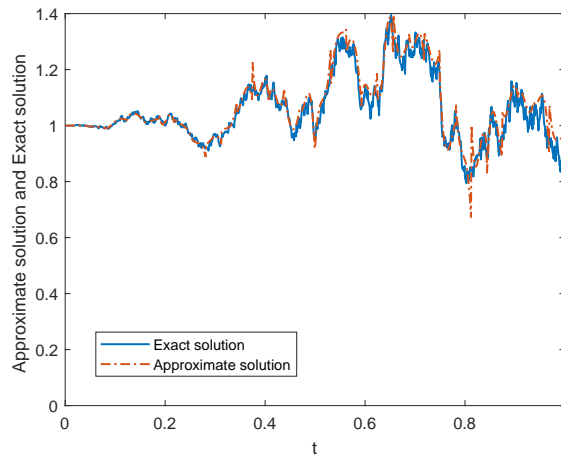




$$\hat{m} = 2^5 \times 2 = 64 \text{ (ب)}$$



$$\hat{m} = 2^4 \times 2 = 32 \text{ (آ)}$$



$$\hat{m} = 2^5 \times 4 = 128 \text{ (ج)}$$

شکل ۱: جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۵

## ۵. مثال‌های عددی

با ارائه چند مثال عددی، دقت و کارآمدی روش پیشنهادی در این بخش نشان داده می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش دقیق‌تر از روش ماتریس عملیاتی تصادفی برای موجک چبیشف می‌باشد؛ الگوریتم‌ها با نرم‌افزار *MATLAB* ۲۰۱۷a اجرا شده‌اند.

مثال ۱.۵. ([۲۸]) معادله انتگرال ایتو-ولترای خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = 1 + \int_0^t s^2 X(s) ds + \int_0^t s X(s) dB(s), \quad s, t \in [0, 1)$$

۱۰۶ احمدی‌نیا، افشاری‌ارجمند، عباسی/ موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۸۹-۱۱۵

که جواب دقیق آن به فرم

$$X(t) = \exp\left(\frac{t^3}{\epsilon} + \int_0^t s dB(s)\right)$$

است.

$\hat{m} = ۱۲۸[۲۸]$	$\hat{m} = ۱۲۸$	$\hat{m} = ۶۴[۲۸]$	$\hat{m} = ۶۴$	$\hat{m} = ۳۲[۲۸]$	$\hat{m} = ۳۲$	$t$
۰/۰۰۲۲۲۵۹۰	۰/۰۰۱۵۵۸۰۲	۰/۰۰۰۵۷۲۱۰	۰/۰۰۱۶۶۳۲۷	۰/۰۰۳۱۹۱۴۰	۰/۰۰۱۸۹۳۲۵	۰/۱
۰/۰۰۴۰۶۸۷۶	۰/۰۰۸۵۲۱۱۴	۰/۰۰۹۱۴۱۲۴	۰/۰۰۲۰۲۸۱۴۳	۰/۰۰۳۷۱۰۲۴	۰/۰۰۱۷۰۳۶۹۳	۰/۳
۰/۰۹۵۳۳۴۲۷۰	۰/۰۰۳۲۱۰۷۱۶	۰/۰۰۸۶۷۱۹۴۵۰	۰/۰۰۵۱۴۴۷۳	۰/۰۰۴۴۹۳۲۰۷۰	۰/۰۰۳۱۰۳۵۴۸	۰/۵
۰/۰۰۶۱۶۸۵۸۰	۰/۰۰۳۲۹۱۸۴۰	۰/۰۰۶۲۰۸۵۸۰	۰/۰۰۲۲۶۳۵۲۳	۰/۰۰۵۴۰۰۵۸۰	۰/۰۰۲۸۲۵۴۲۶	۰/۷
۰/۱۳۰۳۵۸۸۰	۰/۰۰۳۹۱۳۶۲۴	۰/۱۲۱۷۵۸۸۰	۰/۰۰۳۰۹۹۷۱۱	۰/۱۲۰۱۵۸۸۰	۰/۰۰۳۱۵۹۷۷۵	۰/۹
۰/۲۳۰۳۳۶۳۹	۰/۰۰۲۲۸۴۸۱۹	۰/۲۱۲۱۵۰۴۸	۰/۰۰۱۶۱۴۴۳۵	۰/۱۲۶۰۷۷۳۸	۰/۰۰۲۱۹۶۳۵۳	mean

جدول ۱: خطا روش پیشنهادی و روش ماتریس عملیاتی تصادفی [۲۸] برای مثال ۱.۵

مثال ۲.۵. ([۲۸]) معادله انتگرال ایتو-ولترای خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = \frac{1}{12} + \int_0^t \cos(s)X(s)ds + \int_0^t \sin(s)X(s)dB(s), \quad s, t \in [0, 1)$$

که جواب دقیق به صورت زیر است:

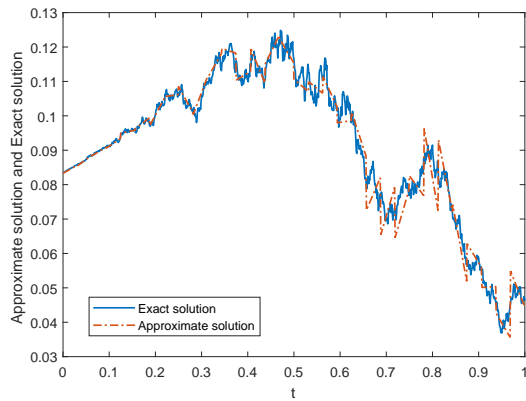
$$X(t) = \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{t}{4}\right) + \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{8} + \int_0^t \sin(s)dB(s).$$

$\hat{m} = ۱۲۸[۲۸]$	$\hat{m} = ۱۲۸$	$\hat{m} = ۶۴[۲۸]$	$\hat{m} = ۶۴$	$\hat{m} = ۳۲[۲۸]$	$\hat{m} = ۳۲$	$t$
۰/۰۰۰۲۰۵۲۵	۰/۰۰۰۲۸۳۶۳	۰/۰۰۰۰۴۵۶۳	۰/۰۰۰۰۶۳۶۲	۰/۰۰۰۰۲۷۷۱۰	۰/۰۰۰۰۸۴۱۹۲	۰/۱
۰/۰۰۰۰۴۵۰۲۳	۰/۰۰۰۱۳۵۵۴۹	۰/۰۰۰۰۹۷۶۷۷	۰/۰۰۰۲۱۲۲۶۳	۰/۰۰۰۰۳۰۴۱۷	۰/۰۰۰۰۰۴۶۸۲	۰/۳
۰/۱۲۳۰۲۱۳۶	۰/۰۰۰۶۶۲۱۵۷	۰/۱۱۲۱۵۳۲۳	۰/۰۰۰۱۵۴۴۱۵	۰/۰۰۰۰۳۴۹۲۳	۰/۰۰۰۰۲۳۷۸۷۵	۰/۵
۰/۰۰۰۸۰۰۲۱۱	۰/۰۰۰۲۱۳۵۱۶	۰/۰۰۰۷۹۰۲۱۱	۰/۰۰۰۰۲۱۷۱۹	۰/۰۰۰۰۶۷۶۴۱۱	۰/۰۰۰۰۱۷۵۲۳۵	۰/۷
۰/۰۰۱۵۷۸۸۲۲	۰/۰۰۰۰۲۲۹۲۳	۰/۰۰۱۴۳۷۸۲۲	۰/۰۰۰۱۶۱۹۵۶	۰/۰۰۰۰۴۸۲۲	۰/۰۰۰۰۷۷۸۹۷	۰/۹
۰/۰۰۲۹۴۹۳۴۳	۰/۰۰۰۲۱۲۵۰۱	۰/۰۰۰۲۷۰۹۱۱۹	۰/۰۰۰۱۱۱۳۴۳	۰/۰۰۰۱۶۳۴۸۵۶	۰/۰۰۰۱۱۵۹۷۶	mean

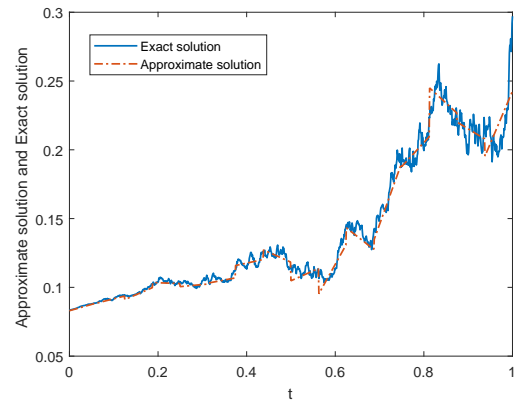
جدول ۲: خطا روش پیشنهادی و روش ماتریس عملیاتی تصادفی [۲۸] برای مثال ۲.۵

مثال ۳.۵. ([۲۸]) معادله انتگرال ایتو-ولترای خطی زیر را در نظر بگیرید:

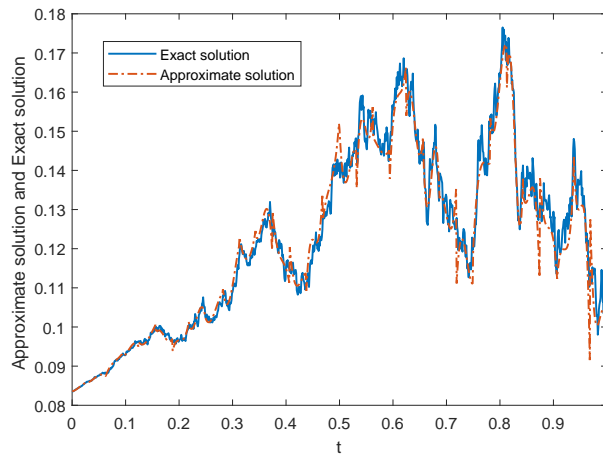
$$X(t) = \frac{1}{3} + \int_0^t \ln(s+1)X(s)ds + \int_0^t \sqrt{\ln(s+1)}dB(s), \quad s, t \in [0, 1)$$



$$\hat{m} = 2^5 \times 2 = 64 \text{ (ب)}$$



$$\hat{m} = 2^4 \times 2 = 32 \text{ (آ)}$$



$$\hat{m} = 2^5 \times 4 = 128 \text{ (ج)}$$

شکل ۲: جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۵

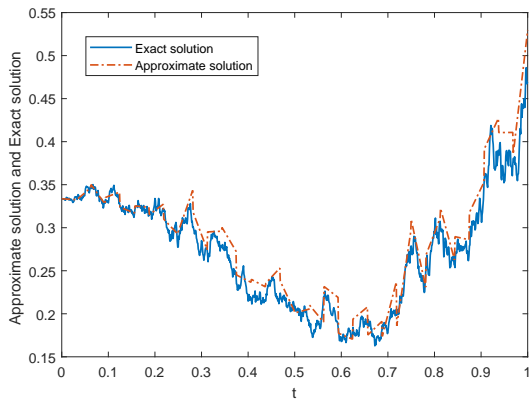
به طوری که

$$X(t) = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{-t}{3} + \frac{t}{3} \ln(t+1)\right) + \frac{1}{3} \ln(t+1) + \int_0^t \sqrt{\ln(s+1)} X(s) dB(s)$$

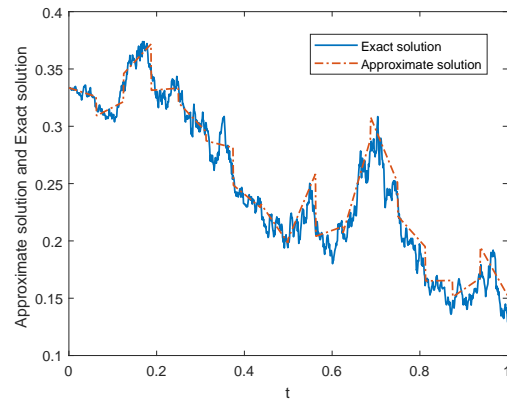
جواب دقیق معادله انتگرال ایتو-ولترا می باشد.

$\hat{m} = 128[28]$	$\hat{m} = 128$	$\hat{m} = 64[28]$	$\hat{m} = 64$	$\hat{m} = 32[28]$	$\hat{m} = 32$	$t$
۰٫۰۰۱۴۲۹۱۶	۰٫۰۰۱۶۹۶۸۹	۰٫۰۰۱۰۶۸۳۱	۰٫۰۰۰۹۸۷۹۱	۰٫۰۰۱۰۲۹۱۴	۰٫۰۰۴۴۵۷۹۲	۰٫۱
۰٫۰۰۰۶۲۵۱۸۸	۰٫۰۰۱۱۱۶۸۸	۰٫۰۰۰۰۳۷۸۸	۰٫۰۰۰۸۸۵۵۹	۰٫۰۰۳۴۴۳۶۸	۰٫۰۰۴۳۷۴۳۵	۰٫۳
۰٫۳۱۲۴۲۸۴۱	۰٫۰۱۴۰۳۱۱۴	۰٫۲۸۱۴۵۸۱۴	۰٫۲۵۵۴۴۷۱	۰٫۱۱۳۸۹۵۳۴	۰٫۰۵۲۶۸۵۵	۰٫۵
۰٫۰۳۴۷۷۱۶۶	۰٫۰۰۲۸۲۹۹۰	۰٫۰۳۵۸۹۱۶۶	۰٫۰۰۴۵۷۳۲۶	۰٫۰۳۲۲۶۴۶۶	۰٫۰۲۲۶۷۶۵۲	۰٫۷
۰٫۰۵۵۸۹۰۱۷۰	۰٫۰۰۲۸۷۷۸۳	۰٫۰۵۶۸۰۱۷۰	۰٫۰۰۶۵۰۱۰۴	۰٫۰۵۵۱۱۱۷۰	۰٫۰۵۵۱۶۷۸۸	۰٫۹
۰٫۰۸۲۷۵۶۵۶	۰٫۰۰۴۵۱۰۵۲	۰٫۰۷۵۰۵۱۵۳	۰٫۰۰۷۶۹۸۵۰	۰٫۰۴۱۱۴۸۹۰	۰٫۰۸۳۸۹۰۴	mean

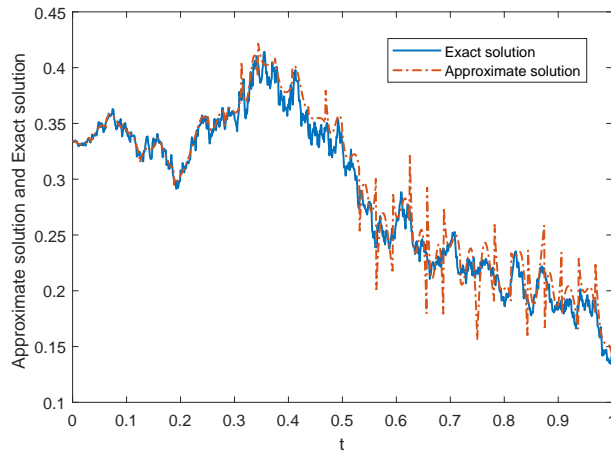
جدول ۳: خطا روش پیشنهادی و روش ماتریس عملیاتی تصادفی [۲۸] برای مثال ۳.۵



$\hat{m} = 2^5 \times 2 = 64$  (ب)



$\hat{m} = 2^4 \times 2 = 32$  (ا)



$\hat{m} = 2^5 \times 4 = 128$  (ج)

شکل ۳: جواب دقیق و تقریبی مثال ۳.۵

مثال ۴.۵. ([۲۹]) معادله انتگرال ایتو-ولترای با حرکت بروانی چهاربعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = \frac{1}{2_0} + \frac{1}{2_0} \int_0^t X(s)ds + \sum_{i=1}^4 \int_0^t \alpha_i X(s)dB_i(s), \quad s, t \in [0, 1)$$

$25 \times 2 = 64$	$24 \times 2 = 32$	$23 \times 2 = 16$	$\hat{m}$
مثال ۱.۵ ۰٫۰۴۳۶۲۷۸۲	۰٫۰۴۸۰۵۳۵۲	۰٫۰۸۰۹۵۵۱۴	
مثال ۲.۵ ۰٫۰۰۵۱۱۵۲۴	۰٫۰۰۹۰۹۲۶۵	۰٫۰۰۷۶۹۶۲۰	
مثال ۳.۵ ۰٫۰۱۹۵۶۱۴۵	۰٫۰۳۴۴۳۴۲۲	۰٫۰۳۷۷۹۱۹۲	

جدول ۴: مقدار نرم  $L^2$  برای موجک چیشف درجه یک با تعداد زیربازه‌های مختلف

$25 \times 4 = 128$	$24 \times 4 = 64$	$23 \times 4 = 32$	$\hat{m}$
مثال ۱.۵ ۰٫۰۴۷۳۵۸۳۲۱	۰٫۰۴۷۱۹۱۴۴	۰٫۰۴۵۷۹۵۱۲	
مثال ۲.۵ ۰٫۰۰۶۶۳۳۵۵	۰٫۰۰۹۶۸۶۹۴	۰٫۰۱۱۸۲۴۰۶	
مثال ۳.۵ ۰٫۰۲۲۱۶۲۲۳	۰٫۰۳۴۶۶۰۰۸	۰٫۰۴۱۳۵۴۵۶	

جدول ۵: مقدار نرم  $L^2$  برای موجک چیشف درجه سه با تعداد زیربازه‌های مختلف

که  $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ ،  $\alpha_2 = \frac{2}{5}$ ،  $\alpha_3 = \frac{4}{5}$  و  $\alpha_4 = \frac{9}{5}$  و همچنین جواب دقیق آن به فرم

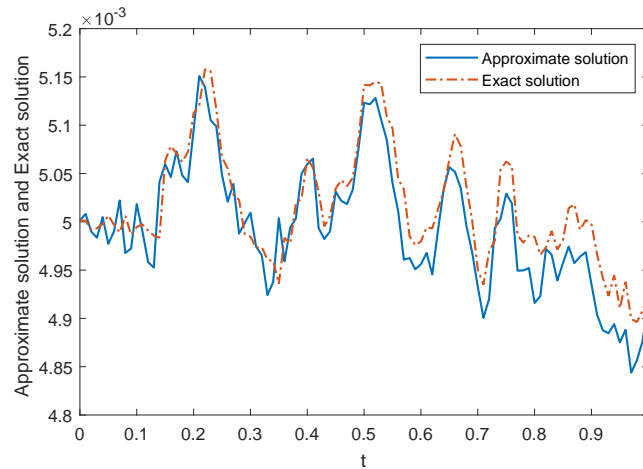
$$X(t) = \frac{1}{20} \exp\left(\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha_i\right)t + \sum_{i=1}^4 \alpha_i B_i(t)\right)$$

می‌باشد؛ که  $B(t) = (B(t_1), B(t_2), B(t_3), B(t_4))$  فرآیند بروانی چهاربندی و  $X(t)$  حرکت تصادفی چهاربندی تعریف شده بر فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  می‌باشند.

$\hat{m} = 27[29]$	$\hat{m} = 27$	$\hat{m} = 26[29]$	$\hat{m} = 26$	$\hat{m} = 25[29]$	$\hat{m} = 25$	$\hat{m} = 24[29]$	$\hat{m} = 24$	$t$
۰٫۰۰۰۰۱۰۷۳	۰٫۰۰۰۰۰۸۸۲	۰٫۰۰۰۰۰۱۰۵۷	۰٫۰۰۰۰۰۱۳۳۹	۰٫۰۰۰۰۰۵۱۴۶	۰٫۰۰۰۰۰۲۵۷۵	۰٫۰۰۰۰۱۶۱۶۰	۰٫۰۰۰۰۰۲۶۲۴	۰٫۱
۰٫۰۰۰۰۰۹۰۸۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۱۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۹۴۲۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۹۲۸	۰٫۰۰۰۰۰۱۳۹۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۵۶	۰٫۰۰۰۰۱۴۹۶۳	۰٫۰۰۰۰۰۱۹۰۴	۰٫۳
۰٫۰۰۰۰۰۰۶۰۱۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۸۵۵	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۵۲۵	۰٫۰۰۰۰۰۰۶۳۱	۰٫۰۰۰۰۰۱۶۲۵	۰٫۰۰۰۰۰۱۱۲۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۷۱۹	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۸۲۰	۰٫۵
۰٫۰۰۰۰۰۳۵۳۲۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۷۱۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۶۷۱۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۴۵۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۵۵۵۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۰۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۹۱۰۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۲۱۵	۰٫۷
۰٫۰۰۰۰۰۳۴۲۷۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۹۹۷	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۴۶۲۷	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۹۶۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۵۳۳۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۲۴۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۵۶۱۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۳۳۹	۰٫۹
۰٫۰۰۰۰۰۱۷۱۵۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۰۳۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۷۰۶۹	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۶۶۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۸۳۱۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۵۶۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۳۹۱۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۹۸۱	mean

جدول ۶: خطای روش پیشنهادی و روش ماتریس عملیاتی تصادفی [۲۹] برای مثال ۴.۵

خطای روش پیشنهادی در نقاط  $t = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  با میزان خطای گزارش شده در همین نقاط برای مثال‌های ۱.۵-۳.۵ با مرجع [۲۸] مقایسه می‌شود. همچنین این مقایسه برای مثال ۴.۵ با مرجع [۲۹] انجام شده است. از آنجا که در این مراجع فقط میزان خطا در این نقاط گزارش شده است ما نیز میزان خطا را برای این که قابلیت مقایسه وجود داشته باشد، فقط در این نقاط گزارش می‌کنیم. با این وجود میزان خطا در نرم  $L^2$  روی کل بازه  $[0, 1]$  را برای موجک‌های چیشف در جداول ۴ و ۵ گزارش شده است.



شکل ۴: جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۵ برای  $\hat{m} = 2^8$

برای مقایسه بهتر، تابع متوسط خطای  $E$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

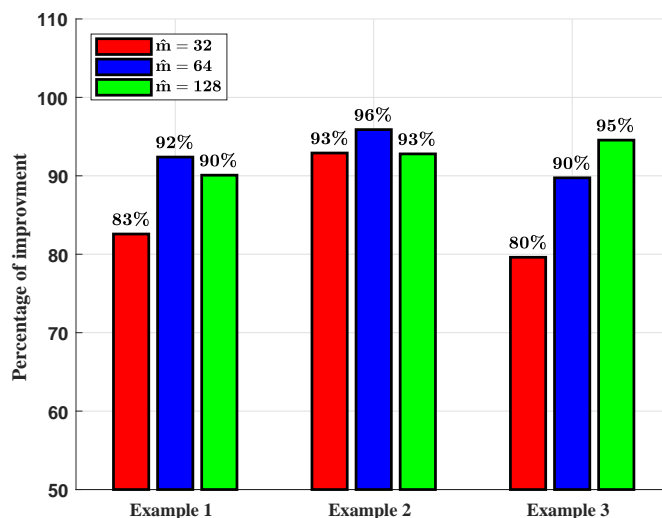
$$E(\hat{m}) = \frac{\sum_{t=1}^5 e\left(\frac{2t-1}{10}\right)}{5}$$

که منظور از  $e(x)$  خطای روش پیشنهادی و یا روش ماتریس عملیاتی تصادفی در نقطه  $x$  است. در جداول ۱ تا ۳ و جدول ۶ میزان  $E(\hat{m})$  برای روش پیشنهادی این مقاله و روش ماتریس عملیاتی تصادفی ارائه شده است و نمودار میله‌ای در شکل ۵ و ۶ میزان درصد بهبود  $E(\hat{m})$  را برای این روش پیشنهادی نسبت به روش ماتریس عملیاتی تصادفی با موجک چبیشف را نشان می‌دهد. منظور از درصد بهبود خطا، مقدار

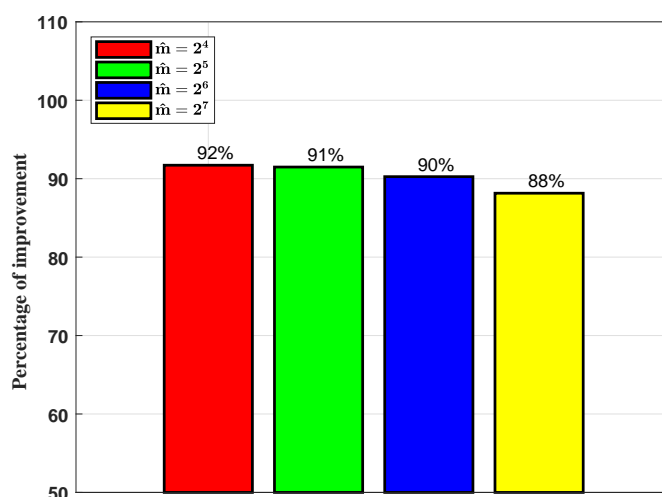
$$\frac{E_1(\hat{m}) - E_2(\hat{m})}{E_1(\hat{m})} \times 100$$

می‌باشد؛  $E_1(\hat{m})$  و  $E_2(\hat{m})$  به ترتیب میانگین خطا برای دو روش ماتریس عملیاتی تصادفی و روش کمترین مربعات در پایه موجک چبیشف می‌باشد.

همان‌طور که این نمودارها نشان می‌دهند، میانگین خطا در پنج نقطه در نظر گرفته شده در روش پیشنهادی نسبت به روش ماتریس عملیاتی تصادفی به طرز چشم‌گیری (حداقل ۸۰٪) کاهش یافته است. قابل ذکر است که این بهبود خطا ناشی از در نظر گرفتن تمام توابع معلوم به طور دقیق و تقریب حداقل مربعات به کمک موجک چبیشف می‌باشد. اما به لحاظ محاسباتی این روش زمان زیادی برای



شکل ۵: درصد بهبود خطای روش پیشنهادی نسبت به روش ماتریس عملیاتی تصادفی



شکل ۶: درصد بهبود خطای روش پیشنهادی نسبت به روش ماتریس عملیاتی تصادفی برای مثال ۴.۵

محاسبه انتگرال‌ها لازم دارد و به دلیل مستقل بودن انتگرال‌ها، این مشکل را با کمک گرفتن از دستور پردازش موازی در نرم‌افزار متلب رفع کرده‌ایم. از آنجا که درایه‌های هر سطر دستگاه (۶.۳) مستقل از سطرهای دیگر است و هر سطر از تعداد زیادی انتگرال تشکیل شده است، برای ساخت دستگاه (۶.۳)، محاسبات را به صورت موازی و با استفاده از کامپیوتر چهار هسته‌ای انجام داده‌ایم. در این قسمت درمورد استفاده از پردازش موازی توضیحاتی ارائه می‌کنیم. ابتدا یک زیربرنامه از متلب می‌نویسیم که به کمک

آن قادر هستیم، سطرهای دستگاه (۶.۳) را به طور مستقل در متلب تولید کنیم. این زیربرنامه به صورت زیر است:

$$[A_i, b_i] = \text{Parallel}(i)$$

که با دریافت سطر  $i$ -ام به‌عنوان ورودی، سطر  $i$ -ام از ماتریس  $A$  و درایه  $i$ -ام از بردار  $b$  را تولید می‌کند. سپس روی یک کامپیوتر چهار هسته‌ای  $\text{Corei7}$ ، به کمک دستور  $\text{Parpool}(4)$ ، هر چهار هسته کامپیوتر را فعال کردیم؛ سپس با استفاده از دستور موازی‌سازی حلقه‌ها، در نرم‌افزار متلب:

*parfor*  $i = 1 : \hat{m}$

$$[A_i, b_i] = \text{Parallel}(i)$$

*end*

ماتریس  $A$  و بردار  $b$  را که قسمت زمان‌بر کد ما بود، به صورت موازی و استفاده هم‌زمان از چهار هسته فعال، تولید کردیم. در این برنامه سطرهای ماتریس به صورت چهار سطر، چهار سطر و به‌طور هم‌زمان تولید می‌شوند. نتایج عددی در حالت پردازش موازی و غیرموازی تغییری ندارند، به این علت که پردازش موازی تغییری در روش حل مساله ایجاد نمی‌کند. اما به کمک پردازش موازی توانستیم زمان حل قسمت زمان‌بر روش را که همان دستگاه (۶.۳) بود، تا چهار برابر کاهش دهیم. در کل استفاده از پردازش موازی باعث شد زمان حل هر یک از مثال‌ها حدود ۷۰٪ کاهش یابد.

## ۶. نتیجه‌گیری

این مقاله یک روش عددی برای حل معادله انتگرال ایتو-ولترای خطی بر پایه روش کمترین مربعات و موجک چبیشف ارائه می‌کند و معادله انتگرال ایتو-ولترای خطی به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود. سرعت همگرایی روش پیشنهادی مورد بررسی و اثبات قرار گرفت و با مثال‌های عددی دقت و کارآمدی آن مشخص شد؛ همچنین در این روش از مقادیر دقیق توابع  $f(t)$ ،  $K_j(s, t)$ ، استفاده شد در حالی که در روش ماتریس عملیاتی تصادفی موجک چبیشف، از مقدار تقریبی آن‌ها استفاده شده است. بنابراین واضح است که روش پیشنهاد شده دقیق‌تر از روش ماتریس عملیاتی تصادفی موجک چبیشف



می‌باشد. نتایج عددی صحت روش پیشنهادی را در مقایسه با روش ماتریس عملیاتی تصادفی بیان می‌کند.

## مراجع

- [1] S.A. Broughton and K. Bryan, *Discrete Fourier Analysis and Wavelets: Applications to Signal and Image Processing*, John Wiley & Sons, 2008.
- [2] G.H. Choe, *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Springer, 2016.
- [3] P.A. Cioica and S. Dahlke, Spatial besov regularity for semilinear stochastic partial differential equations on bounded Lipschitz domains, *Int. J. Comput. Math.*, **89**(18) (2012), 2443–2459.
- [4] J.C. Cortes, L. Jodar and L. Villafuerte, Mean square numerical solution of random differential equations: facts and possibilities, *Comput. Math. Appl.*, **53**(7) (2007), 1098–1106.
- [5] J.C. Cortes, L. Jodar and L. Villafuerte, Numerical solution of random differential equations: a mean square approach, *Math. Comput. Modelling*, **45**(7-8) (2007), 757–765.
- [6] M. Ehler, Shrinkage rules for variational minimization problems and applications to analytical ultracentrifugation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **19**(4–5) (2011), 593–614.
- [7] K.D. Elworthy, A. Truman, H.Z. Zhao and J.G. Gaines, Approximate traveling waves for generalized KPP equations and classical mechanics, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **446**(1928) (1994), 529–554.
- [8] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, F.M. Maalek and C. Cattani, A computational method for solving stochastic Itô–Volterra integral equations based on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions, *J. Comput. Phys.*, **270** (2014), 402–415.
- [9] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, C. Cattani and F.M. Maalek Ghaini, An efficient computational method for solving nonlinear stochastic Itô integral equations: Application for stochastic problems in physics, *J. Comput. Phys.*, **283** (2015), 148–168.
- [10] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl and F.M. Mohammadi, Two-dimensional Legendre wavelets for solving time-fractional telegraph equation, *Adv. Appl. Math. Mech.*, **6**(2) (2014), 247–260.
- [11] M.H. Heydari, F.M. Maalek Ghaini and M.R. Hooshmandasl, Legendre wavelets method for numerical solution of time-fractional heat equation, *Wavelets and Linear Algebra*, **1**(1) (2014) 19–31.

- [12] D.J. Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, *SIAM Rev.*, **43** (3) (2001), 525–546.
- [13] S. Jankovic and D. Ilic, One linear analytic approximation for stochastic integro-differential equations, *Acta Math. Sci.*, **30**(4) (2010), 1073–1085.
- [14] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami and N. Nouri, Interpolation solution in generalized stochastic exponential population growth model, *Appl. Math. Modelling*, **36**(3) (2012), 1023–1033.
- [15] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami and N. Nouri, Numerical approach for solving stochastic Volterra-Fredholm integral equations by stochastic operational matrix, *Comput. Math. Appl.*, **64**(6) (2012), 1903–1913.
- [16] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami and N. Nouri, Numerical solution of stochastic differential equations by second order Runge-Kutta methods, *Math. Comput. Modelling*, **53**(9-10) (2011), 1910–1920.
- [17] F.C. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, World Scientific, 2012.
- [18] P.E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1999.
- [19] J.J. Levin and J.A. Nobel, On a system of integro-differential equations occurring in reactor dynamics, *J. Math. Mech.*, **9**(3) (1960), 347–368.
- [20] K. Maleknejad, M. Khodabin and M. Rostami, Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions, *Math. Comput. Modelling*, **55**(3-4) (2012), 791–800.
- [21] K. Maleknejad, M. Khodabin and M. Rostami, A numerical method for solving m-dimensional stochastic Itô-Volterra integral equations by stochastic operational matrix, *Comput. Math. Appl.*, **63**(1) (2012), 133–143.
- [22] J.C. Mason and D.C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, CRC press, 2002.
- [23] R. K. Miller, On a system of integro-differential equations occurring in reactor dynamic, *SIAM J. Appl. Math.*, **14** (1966)446-452.
- [24] F. Mirzaee, N. Samadyar and S.F. Hoseini, Euler polynomial solutions of nonlinear stochastic Itô-Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **330** (2018), 574–585.
- [25] F. Mirzaee and N. Samadyar, On the numerical solution of stochastic quadratic integral equations via operational matrix method, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**(2) (2018), 4465–4479.

- [26] F. Mohammadi, A computational wavelet method for numerical solution of stochastic Volterra-Fredholm integral equations, *Wavelets and Linear Algebra*, **3**(1) (2016), 13–25.
- [27] F. Mohammadi, A efficient computational method for solving stochastic Itô-Volterra integral equations, *TWMS J. App. Eng. Math.*, **5**(2) (2015), 286–297.
- [28] F. Mohammadi , A wavelet-based computational method for solving stochastic Itô-Volterra integral equations, *J. Comput. Phys.*, **298** (2015), 254–265.
- [29] F. Mohammadi , Haar wavelets approach for solving multidimensional stochastic Itô-Volterra integral equations, *Appl. Math. E-Notes*, **15** (2015), 80–96.
- [30] F. Mohammadi and A. Ciancio, Wavelet-based numerical method for solving fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel, *Wavelets and Linear Algebra*, **4**(1) (2017), 53–73.
- [31] B.Kh. Mousavi, A. Askari Hemmat and M.H. Heydari, Wilson wavelets for solving nonlinear stochastic integral equations, *Wavelets and Linear Algebra*, **4**(2) (2017), 33–48.
- [32] M.G. Murge and B.G. Pachpatte, Successive approximations for solutions of second order stochastic integro-differential equations of Ito type, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **21**(3) (1990), 260–274.
- [33] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, fifth ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [34] E. Platen and N. Bruti-Liberati, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*, Springer-Verlag, 2010.
- [35] M. Saffarzadeh, G.B. Loghmani and M. Heydari, An iterative technique for the numerical solution of nonlinear stochastic Itô-Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **333** (2018), 74–86.
- [36] L.N. Trefethen , Is Gauss quadrature better than Clenshaw–Curtis, *SIAM Rev.*, **50**(1) (2008), 67–87.