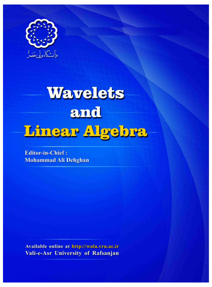
موجک‌ها و جبرخطی ۵(۳) (۱۳۹۸) ۸۱-۹۴



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

نامساوی پوپویچی برای توابع ماتریسی با توان منفی

محسن کیان[*،آ]، حامد نجفی[ب]، محسن رستمیان دلاور[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد، ایران
[ب]گروه ریاضی محض، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۳ تیر ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱۱ آبان ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸

ادیتور رابط: علی تقوی

کلمات کلیدی:

میانگین هندسی

ماتریسی، نامساوی

پوپویچی، ماتریس مثبت.

چکیده

در این مقاله، با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس‌ها و نامساوی عددی پوپویچی، این نامساوی برای اثر ماتریس‌های مثبت بیان شده است. به علاوه، با در نظر گرفتن توابع ماتریسی با توان منفی، نامساوی‌های ماتریسی از نوع پوپویچی به دست آمده است. نتایج به دست آمده در این مقاله، معکوس نامساوی‌های ماتریسی شناخته شده هستند.

[*]نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: kian@ub.ac.ir (محسن کیان)، hamednajafi20@gmail.com (حامد نجفی)، m.rostamian@ub.ac.ir (محسن رستمیان دلاور).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.89222.1181

۱. مقدمه

فرض می‌کنیم $\mathbb{M}_n$ جبر همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط و I ماتریس همانی باشد. ماتریس هرمیتی $A \in \mathbb{M}_n$ را مثبت (نیمه معین) نامیم هرگاه مقادیر ویژه A نامنفی باشند. اگر علاوه بر این ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، A را مثبت معین می‌نامیم. مجموعه همه ماتریس‌های مثبت را با نماد $\mathbb{M}_n^+$ و مجموعه همه ماتریس‌های مثبت معین را با نماد $\mathbb{M}_n^{++}$ نمایش می‌دهیم. ترتیب جزئی لونر روی ماتریس‌های هرمیتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \leq B \iff B - A \in \mathbb{M}_n^+.$$

اگر f یک تابع پیوسته روی بازه $(\circ, \infty)$ باشد، آنگاه می‌توان برای هر $A \in \mathbb{M}_n^+$ با استفاده از حسابان تابعی، ماتریس $f(A)$ را تعریف کرد. فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس $A \in \mathbb{M}_n^+$ باشند که به ترتیب نزولی و با در نظر گرفتن تکرار مرتب شده‌اند. اگر تابع $f : (\circ, \infty) \to (\circ, \infty)$ صعودی باشد، آنگاه برای هر $j = 1, \ldots, n$ تساوی $f(\lambda_j(A)) = \lambda_j(f(A))$ برقرار است، رجوع کنید به [۵].

نگاشت $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_k$ را مثبت نامیم هرگاه برای هر ماتریس مثبت $A \in \mathbb{M}_n$، ماتریس $\Phi(A)$ در $\mathbb{M}_k$ مثبت باشد. تابع پیوسته $f : (\circ, \infty) \to (\circ, \infty)$ را یکنوای ماتریسی نامیم هرگاه

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B) \qquad (A, B \in \mathbb{M}_n^+).$$

میانگین‌های ماتریسی به عنوان توسیع ناجابجایی میانگین‌های عددی در آنالیز ماتریسی توسط نظریه کوبو و آندو [۷] در سال ۱۹۸۰ معرفی شده و به واسطه کاربرد فراوارنی که در مکانیک و آمار کوانتومی دارند، به سرعت مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفتند. در این نظریه، هر میانگین ماتریسی مانند σ با رابطه

$$A\sigma B = A^{1/2} f\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right) A^{1/2}$$

برای هر دو ماتریس مثبت معین A, B مشخص سازی شده است که در آن $f : (\circ, \infty) \to (\circ, \infty)$ یک تابع یکنوای ماتریسی است. فرض کنیم $A, B \in \mathbb{M}_n^{++}$ و $\alpha \in [\circ, 1]$، چند میانگین ماتریسی پرکاربرد

عبارتند از

$$A\nabla_\alpha B = (1-\alpha)A + \alpha B \qquad \text{میانگین حسابی}$$
$$A\sharp_\alpha B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^\alpha A^{1/2} \qquad \text{میانگین هندسی}$$
$$A!_\alpha B = ((1-\alpha)A^{-1} + \alpha B^{-1})^{-1} \qquad \text{میانگین هارمونیک}$$

هر میانگین ماتریسی، یک نگاشت یکنوا و به طور همزمان مقعر است. به علاوه، نامساوی مشهور میانگین‌های حسابی-هندسی-هارمونیک برای ماتریس‌ها نیز برقرار است[۶]:

$$A!_\alpha B \le A\sharp_\alpha B \le A\nabla_\alpha B, \qquad (\alpha\in[0,1],\quad A,B\in\mathbb{M}_n^{++}). \tag{۱.۱}$$

فرض کنید $a_i, b_i\ (i=1,\dots,k)$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $p\ge 1$. اگر $a_1^p-\sum_{i=2}^k a_i^p>0$ و $b_1^p-\sum_{i=2}^k b_i^p>0$، آنگاه

$$\left(a_1b_1-\sum_{i=2}^k a_ib_i\right)^p \ge \left(a_1^p-\sum_{i=2}^k a_i^p\right)\left(b_1^p-\sum_{i=2}^k b_i^p\right). \tag{۲.۱}$$

نامساوی (۲.۱) را نامساوی پوپویچی می‌نامند. در واقع، پوپویچی [۱۱] نامساوی معروف اژل[۱] که در نظریه معادلات تابعی مطرح شده بود را گسترش داد. با قرار دادن $p=2$ در (۲.۱)، نامساوی اژل حاصل می شود. مصلحیان [۱۰] چند توسیع ماتریسی از (۲.۱) بیان کرده است. به علاوه، فرم جمعی (۲.۱) به نامساوی بلمن مشهور است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left((a_1+b_1)^p-\sum_{i=2}^k(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(a_1^p-\sum_{i=2}^k a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(b_1^p-\sum_{i=2}^k b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{۳.۱}$$

نامساوی بلمن نیز برای ماتریس‌ها مورد بررسی قرار گرفته است، رجوع کنید به [۴، ۹، ۸]. در این مقاله به بررسی عکس نامساوی پوپویچی برای ماتریس‌های مثبت معین می‌پردازیم. به ویژه، با در نظر گرفتن میانگین ماتریسی هندسی با توان‌های منفی، چند نامساوی ماتریسی مکمل برای (۲.۱) به دست

می‌آوریم. برخی از نتایج این مقاله در مورد اثر ماتریس‌ها، معکوس نامساوی‌های شناخته شده می‌باشند.

۲. نتایج اصلی

می‌دانیم تابع $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ مقعر است هرگاه برای برای هر $a,b\geq 0$ و هر $t\in[-1,0]$

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b). \tag{۱.۲}$$

با بکار بردن (۱.۲) برای تابع مقعر $f(x)=\log x$ روی بازه $(0,\infty)$ داریم

$$ta+(1-t)b\leq a^t b^{1-t} \qquad (a,b\geq 0,\quad t\in[-1,0]). \tag{۲.۲}$$

اکنون فرض کنید $\alpha\in[-1,0]$. با استفاده از تعریف میانگین هندسی ماتریسی قرار دهید

$$A\natural_\alpha B=A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^\alpha A^{1/2},$$

با فرمولی مشابه $A\sharp_\alpha B$ که در آن A و B ماتریس‌های مثبت معین هستند. براحتی می‌توان دید که $A\natural_\alpha B$ به طور همزمان محدب و دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) اگر $AB=BA$، آنگاه $A\natural_\alpha B=A^{1-\alpha}B^\alpha$.

(۲) اگر $B\leq C$، آنگاه $A\natural_\alpha B\geq A\natural_\alpha C$.

(۳) برای هر ماتریس معکوس پذیر $X\in\mathbb{M}_n$، داریم $(X^*AX)\natural_\alpha(X^*BX)=X^*(A\natural_\alpha B)X$.

(۴) اگر $A\leq B$، آنگاه

$$A\natural_\alpha B\leq A\leq B\leq B\natural_\alpha A.$$

بعلاوه، توسیع ماتریسی (۲.۲) نیز برقرار است، زیرا اگر $\alpha\in[-1,0]$، آنگاه با استفاده از (۲.۲) و قرار دادن $b=I$ و $a=A^{-1/2}BA^{-1/2}$ داریم

$$\alpha A^{-1/2}BA^{-1/2}+(1-\alpha)I\leq\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\alpha}$$

با ضرب دو سمت رابطه اخیر در $A^{1/2}$ داریم:

$$\alpha B+(1-\alpha)A\leq A\natural_{\alpha}B, \tag{۳.۲}$$

با (۱.۱) مقایسه کنید. اکنون عکس نامساوی پوپویچی را برای ماتریس‌ها ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $A,B\in\mathbb{M}_n^{++}$ و $\alpha\in[-1,0]$. اگر f تابعی مقعر و نزولی روی $(0,\infty)$ باشد، آنگاه برای هر بردار یکه $\zeta\in\mathbb{C}^n$، نامساوی*

$$\langle f\left(A\natural_{\alpha}B\right)\zeta,\zeta\rangle\leq f(\langle A\zeta,\zeta\rangle)^{1-\alpha}f(\langle B\zeta,\zeta\rangle)^{\alpha}$$

برقرار است.

اثبات. فرض کنید که f تابعی مقعر و نزولی روی $(0,\infty)$ باشد. با استفاده از رابطه (۲.۲) و در نظر گرفتن $a:=\langle B\zeta,\zeta\rangle$ و $b:=\langle A\zeta,\zeta\rangle$ می‌توان نوشت:

$$f(\langle A\zeta,\zeta\rangle)^{1-\alpha}f(\langle B\zeta,\zeta\rangle)^{\alpha}\geq(1-\alpha)f(\langle A\zeta,\zeta\rangle)+\alpha f(\langle B\zeta,\zeta\rangle). \tag{۴.۲}$$

چون تابع f مقعر است، از (۱.۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)f(\langle A\zeta,\zeta\rangle)+\alpha f(\langle B\zeta,\zeta\rangle)&\geq f((1-\alpha)\langle A\zeta,\zeta\rangle+\alpha\langle B\zeta,\zeta\rangle)\\&=f(\langle((1-\alpha)A+\alpha B)\zeta,\zeta\rangle).\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

به علاوه، باتوجه به اینکه تابع f نزولی است، با بکاربردن (۳.۲) داریم

$$f(\langle((1-\alpha)A+\alpha B)\zeta,\zeta\rangle)\geq f(\langle(A\natural_{\alpha}B)\,\zeta,\zeta\rangle). \tag{۶.۲}$$

از آنجایی‌که تابع f مقعر است، نامساوی مشهور

$$f(\langle X\zeta,\zeta\rangle)\geq\langle f(X)\zeta,\zeta\rangle \tag{۷.۲}$$

که تعمیم نامساوی ینسن می‌باشد، برای هر ماتریس مثبت معین X و هر بردار یکه $\zeta\in\mathbb{C}^n$ برقرار است [۶](اگر f محدب باشد، عکس نامساوی فوق برقرار است). به ویژه داریم

$$f(\langle(A\natural_{\alpha}B)\,\zeta,\zeta\rangle)\geq\langle f(A\natural_{\alpha}B)\zeta,\zeta\rangle. \tag{۸.۲}$$

اکنون نتیجه مطلوب از (۴.۲)-(۸.۲) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۲.۲. *اگر X,Y دو ماتریس مثبت معین جابجایی در $\mathbb{M}_n^{++}$ باشند و $\alpha\in[-1,0]$، آنگاه*

$$1-\left\|(XY)^{\frac{1}{2}}\zeta\right\|^{2}\leq\left(1-\left\|X^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\zeta\right\|^{2}\right)^{1-\alpha}\left(1-\left\|Y^{\frac{1}{2\alpha}}\zeta\right\|^{2}\right)^{\alpha}.$$

اثبات. اگر A و B دو ماتریس مثبت معین جابجایی باشند، آنگاه $A\natural_{\alpha}B=A^{1-\alpha}B^{\alpha}$ و قضیه ۱.۲ نتیجه می‌دهد

$$\left\langle f\left(A^{1-\alpha}B^{\alpha}\right)\zeta,\zeta\right\rangle\leq f(\langle A\zeta,\zeta\rangle)^{1-\alpha}f(\langle B\zeta,\zeta\rangle)^{\alpha}. \tag{۹.۲}$$

قرار می‌دهیم $A = X^{\frac{1}{1-\alpha}}$ و $B = Y^{\frac{1}{\alpha}}$. در اینصورت A و B جابجایی هستند و از (۹.۲) داریم

$$\langle f(XY)\zeta, \zeta\rangle \leq f(\langle X^{\frac{1}{1-\alpha}}\zeta, \zeta\rangle)^{1-\alpha} f(\langle Y^{\frac{1}{\alpha}}\zeta, \zeta\rangle)^{\alpha}. \qquad (۱۰.۲)$$

اکنون تابع مقعر و نزولی $f(t) = 1 - t$ را روی $(0, 1)$ را در نظر بگیرید. از (۱۰.۲) نتیجه می‌شود

$$1 - \left\|(XY)^{\frac{1}{2}}\zeta\right\|^2 \leq \left(1 - \left\|X^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\zeta\right\|^2\right)^{1-\alpha} \left(1 - \left\|Y^{\frac{1}{2\alpha}}\zeta\right\|^2\right)^{\alpha}.$$

$\square$

اگر a_i و b_i اعداد حقیقی مثبت باشند، با قرار دادن $X = diag(a_1, \ldots, a_n)$ و $Y = diag(b_1, \ldots, b_n)$ و $\zeta = (1, \ldots, 1)$ در (۱۰.۲)، نتیجه زیر به عنوان یک نوع معکوس نامساوی پوپویچی حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۲. *فرض کنیم f تابعی مقعر و نزولی روی $(0, \infty)$ باشد و $\alpha \in [-1, 0]$. اگر a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}.$$

به علاوه، اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1$، آنگاه با فرض $f(t) = 1 - t$ داریم

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}.$$

شاید با دیدن نتیجه ۳.۲، نامساوی شناخته شده هولدر

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}, \qquad (\beta \in [0,1])$$

در ذهن تداعی شود. برای هر نگاشت خطی مثبت و یکانی Φ روی $\mathbb{M}_n$، توسیع ماتریسی

$$\Phi(A\sharp_\beta B) \leq \Phi(A)\sharp_\beta \Phi(B), \qquad (A, B \in \mathbb{M}_n^{++},\ \beta \in [0,1])$$

از نامساوی هولدر برقرار است، رجوع کنید به [۶]. این نامساوی برای اولین بار توسط آندو [۲] برای میانگین هندسی ماتریسی بدون وزن $A\sharp B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} = A\sharp_{1/2}B$ به اثبات رسیده است. برای اثبات نتایجی که در ادامه می‌آید، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۴.۲. *فرض کنید $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1, \ldots, b_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر $\alpha \in [-1, 0]$، آنگاه*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \qquad (۱۱.۲)$$

اثبات. اگر x, y دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از (۲.۲) داریم

$$\alpha x + (1-\alpha)y \leq x^\alpha y^{1-\alpha}.$$

قرار می‌دهیم $a := x^\alpha$ و $b := y^{1-\alpha}$ تا به دست آوریم

$$\alpha a^{1/\alpha} + (1-\alpha) b^{1/1-\alpha} \leq ab. \qquad (۱۲.۲)$$

برای هر $i=1,\dots,n$، با استفاده از (۱۲.۲) و قرار دادن

$$a := a_i/\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha}, \qquad b := b_i/\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

نتیجه می‌گیریم که نامساوی

$$\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha}}\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/1-\alpha}\right)^{1-\alpha}} \geq \alpha\frac{a_i^{1/\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/\alpha}\right)} + (1-\alpha)\frac{b_i^{1/1-\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/1-\alpha}\right)}.$$

برای هر $i=1,\dots,n$ برقرار است. با جمع نامساوی‌های فوق روی i، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. □

می‌توان نشان داد که برای هر نگاشت خطی مثبت و یکانی Φ روی $\mathbb{M}_n$، نمایش ماتریسی

$$\Phi(A\natural_\alpha B) \geq \Phi(A)\natural_\alpha \Phi(B) \qquad (A,B\in\mathbb{M}_n^{++},\ \alpha\in[-1,0]) \tag{۱۳.۲}$$

از (۴.۲) برقرار است.

نسخه دوم از نامساوی پوپویچی را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید φ یک حالت روی $\mathbb{M}_n$ باشد، $\alpha\in[-1,0]$ و M یک عدد حقیقی مثبت باشد. اگر $A,B\in\mathbb{M}_n^{++}$ و $A,B\leq M$، آنگاه*

$$(M-\varphi(A\natural_\alpha B)) \leq (M-\varphi(A))^{1-\alpha}(M-\varphi(B))^{\alpha}. \tag{۱۴.۲}$$

به علاوه، اگر $|||\cdot|||$ یک نرم یکانی پایا روی $\mathbb{M}_n$ باشد و $X\in\mathbb{M}_n$، آنگاه

$$M-\|A\|^{1-\alpha}\ |||X|||\ \|B\|^{\alpha} \leq (M-|||AX|||)^{1-\alpha}(M-|||XB|||)^{\alpha}. \tag{۱۵.۲}$$

اثبات. از آنجایی‌که $\varphi(A)$ و $\varphi(B)$ دو عدد مثبت هستند، $\varphi(A)\natural_\alpha\varphi(B)=\varphi(A)^{1-\alpha}\varphi(B)^{\alpha}$ و با استفاده

از رابطه (۱۳.۲) می‌توان نوشت

$$M - \varphi\,(A\natural_\alpha B) \leq \; M - \varphi(A)^{1-\alpha}\varphi(B)^\alpha. \qquad (۱۶.۲)$$

با به‌کاربردن نامساوی (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} M - \varphi(A)^{1-\alpha}\varphi(B)^\alpha &\leq M - [(1-\alpha)\varphi(A) + \alpha\varphi(B)] \\ &= (1-\alpha)(M-\varphi(A)) + \alpha(M-\varphi(B)) \qquad (۱۷.۲) \\ &\leq (M-\varphi(A))^{1-\alpha}(M-\varphi(B))^\alpha. \end{aligned}$$

از ترکیب (۱۶.۲) و (۱۷.۲) نامساوی (۱۴.۲) حاصل می‌شود. برای اثبات (۱۵.۲)، یادآوری می‌کنیم که برای هر نرم یکانی پایا مانند $|||\cdot|||$ روی $\mathbb{M}_n$، نامساوی

$$|||AXB||| \leq \|A\|\; |||X|||\; \|B\|$$

برقرار است که در آن $\|\cdot\|$ نرم طیفی یا همان نرم عملگری است. بنابراین

$$\begin{aligned} M - \|A\|^{1-\alpha}\; |||X|||\; \|B\|^\alpha &= M - \|A^{1-\alpha}\|\; |||X|||\; \|B^\alpha\| \\ &\leq M - |||A^{1-\alpha}XB^\alpha|||. \end{aligned}$$

□

در ادامه، نامساوی پوپویچی را برای اثر ماتریس‌ها و با در نظر گرفتن توابع توان منفی ماتریسی بررسی می‌کنیم. برای دیدن برخی نتایج مربوط به [۳] مراجعه کنید. ابتدا دو لم بیان می‌کنیم که برای اثبات قضیه بعد به آنها نیاز داریم.

لم ۶.۲. *[۶] اگر Φ یک نگاشت خطی مثبت و یکانی روی $\mathbb{M}_n$ باشد، آنگاه*

$$\Phi(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) \geq \Phi(A)^{1/2}\Phi(B)^{-1}\Phi(A)^{1/2}, \qquad (A, B \in \mathbb{M}_n^{++}).$$

در حالت خاص اگر $\zeta \in \mathbb{C}^n$ یک بردار یکه باشد، آنگاه

$$\left\langle A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\zeta, \zeta\right\rangle \geq \langle A\zeta, \zeta\rangle\langle B\zeta, \zeta\rangle^{-1} \qquad (A, B \in \mathbb{M}_n^{++}).$$

لم ۷.۲. *[۵] اگر $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس هرمیتی باشد و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند که به ترتیب نزولی و با در نظرگرفتن تکرار مرتب شده‌اند، آنگاه*

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A) = \max \sum_{j=1}^{k}\langle Au_j, u_j\rangle, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

که در آن ماکزیمم روی خانواده همه مجموعه‌های $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ از بردارهای متعامد یکه در $\mathbb{C}^n$ گرفته می‌شود.

قضیه ۸.۲. *اگر A, B, X ماتریس‌های مثبت معین باشند و $\alpha \in [-1, 0]$، آنگاه*

$$\mathrm{Tr}(AB) \geq \mathrm{Tr}\left(A^{1/1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\ \mathrm{Tr}\left(B^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \tag{۱۸.۲}$$

و

$$\mathrm{Tr}(AXBX) \geq \mathrm{Tr}\left[(1-\alpha)\left(X^{1/2}AX^{1/2}\right)^{1/1-\alpha} + \alpha\left(X^{1/2}BX^{1/2}\right)^{1/\alpha}\right]. \tag{۱۹.۲}$$

اثبات. فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند که به ترتیب نزولی و با در نظرگرفتن تکرار مرتب شده‌اند. همچنین فرض کنیم $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه متناظر با

مقادیر ویژه A باشد. اگر $\alpha \in [-۱, ۰]$، آنگاه برای هر $k = ۱, \ldots, n$ داریم

$$\sum_{j=۱}^{k} \left\langle A^{۱/۲} B A^{۱/۲} v_j, v_j \right\rangle \geq \sum_{j=۱}^{k} \langle A v_j, v_j \rangle \langle B^{-۱} v_j, v_j \rangle^{-۱} \qquad \text{(با استفاده از لم ۶.۲)}$$

$$\geq \left(\sum_{j=۱}^{k} \langle A v_j, v_j \rangle^{۱/۱-\alpha} \right)^{۱-\alpha} \left(\sum_{j=۱}^{k} \langle B^{-۱} v_j, v_j \rangle^{۱/-\alpha} \right)^{\alpha}, \qquad (۲۰.۲)$$

که نامساوی آخر از لم ۴.۲ نتیجه می‌شود. از آنجایی‌که تابع $f(x) = \sqrt[۱-\alpha]{x}$ روی بازه $(۰, \infty)$ صعودی است،

$$\lambda_j \left(A^{۱/۱-\alpha} \right) = \lambda_j (A)^{۱/۱-\alpha}, \qquad (j = ۱, \ldots, n).$$

بنابراین، برای هر $k = ۱, \ldots, n$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j \left(A^{۱/۱-\alpha} \right) &= \sum_{j=۱}^{k} \langle A v_j, v_j \rangle^{۱/۱-\alpha} \\ &\leq \left(\sum_{j=۱}^{k} \left\langle A^{۱/۲} B A^{۱/۲} v_j, v_j \right\rangle \right)^{۱/۱-\alpha} \left(\sum_{j=۱}^{k} \langle B^{-۱} v_j, v_j \rangle^{۱/-\alpha} \right)^{\frac{-\alpha}{۱-\alpha}} && \text{(از رابطه(۲۰.۲))} \\ &\leq \left(\sum_{j=۱}^{k} \left\langle A^{۱/۲} B A^{۱/۲} v_j, v_j \right\rangle \right)^{۱/۱-\alpha} \left(\sum_{j=۱}^{k} \langle B^{\frac{۱}{\alpha}} v_j, v_j \rangle \right)^{\frac{-\alpha}{۱-\alpha}} && \text{(با استفاده از رابطه(۷.۲))} \\ &\leq \left[\sum_{j=۱}^{k} \lambda_j \left(A^{۱/۲} B A^{۱/۲} \right) \right]^{۱/۱-\alpha} \left[\sum_{j=۱}^{k} \lambda_j \left(B^{\frac{۱}{\alpha}} \right) \right]^{\frac{-\alpha}{۱-\alpha}} \end{aligned}$$

که در نامساوی آخر از لم ۷.۲ استفاده کرده‌ایم. چون تابع $f(x) = x^{۱-\alpha}$ صعودی است، می‌توان دو طرف

نامساوی اخیر را به توان $1-\alpha$ رسانید و به دست آورد:

$$\left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(A^{1/1-\alpha}\right)\right]^{1-\alpha} \leq \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(A^{1/2}BA^{1/2}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(B^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]^{-\alpha}. \tag{۲۱.۲}$$

اکنون نامساوی (۱۸.۲) با ضرب طرفین (۲۱.۲) در $\left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(B^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]^{\alpha}$ به دست می‌آید. برای اثبات (۱۹.۲) می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(AXBX) &= \mathrm{Tr}\left(X^{1/2}AX^{1/2}X^{1/2}BX^{1/2}\right)\\
&\geq \left[\mathrm{Tr}\left(X^{1/2}AX^{1/2}\right)^{1/1-\alpha}\right]^{1-\alpha}\left[\mathrm{Tr}\left(X^{1/2}BX^{1/2}\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha} && (\text{با استفاده از (۱۸.۲)})\\
&\geq (1-\alpha)\mathrm{Tr}\left(X^{1/2}AX^{1/2}\right)^{1/1-\alpha} + \alpha\mathrm{Tr}\left(X^{1/2}BX^{1/2}\right)^{1/\alpha} && (\text{از با استفاده (۲.۲)})\\
&= \mathrm{Tr}\left[(1-\alpha)\left(X^{1/2}AX^{1/2}\right)^{1/1-\alpha} + \alpha\left(X^{1/2}BX^{1/2}\right)^{1/\alpha}\right].
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۹.۲. *اگر A, B ماتریسهای مثبت معین باشند و $\alpha \in [-1, 0]$، آنگاه*

$$\mathrm{Tr}\left(A^{1-\alpha}B^{\alpha}\right) \geq (1-\alpha)\mathrm{Tr}A + \alpha\mathrm{Tr}B$$

و

$$\left\|A^{\frac{1-\alpha}{2}}B^{\frac{\alpha}{2}}\right\|_1^2 \geq (1-\alpha)\|A\|_1 + \alpha\|B\|_1.$$

مراجع

[1] J. Aczél, Some general methods in the theory of functional equations in one variable, New applications of functional equations, *Usp. Mat. Nauk*, **11** (1956), 3–68.

[2] T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, *Linear Algebra Appl.*, **26** (1979), 203–241.

[3] M. Bakherad, M. Krnić and M.S. Moslehian, Reverse Young-type inequalities for matrices and operators, *Rocky Mt. J. Math.*, **46** (2016), 1089–1104.

[4] M. Bakherad and A. Morassaei, Some operator Bellman type inequalities, *Indag. Math.*, **26** (2015), 659–646.

[5] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer Verlag, New York, 1997.

[6] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton, 2007.

[7] F. Kudo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246** (1980), 205–224.

[8] F. Mirzapor, A. Morassaei and M.S. Moslehian, More on operator Bellman inequality, *Quaest. Math.*, **37** (2014), 9–17.

[9] A. Morassaei, F. Mirzapor and M.S. Moslehian, Bellman inequality for Hilbert space operators, *Linear Algebra Appl.*, **438** (2013), 3776–3780.

[10] M.S. Moslehian, Operator Aczél inequality, *Linear Algebra Appl.*, **434** (2011), 1981–1987.

[11] T. Popoviciu, On an inequality, *Gaz. Mat. Fiz., Bucur., Ser. A*, **11** (1959), 451–461.