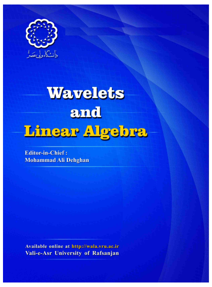
موجک‌ها و جبرخطی ۵(۳) (۱۳۹۸) ۶۳-۷۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

بهینه‌سازی خطا و الگوریتم بازسازی در قاب‌های ترکیب تعمیم‌یافته

وحید صدری*[آ]، رضا احمدی[آ]، رمضان ضرغامی فارفار[ب]

[آ]مرکز تحقیقات علوم پایه دانشگاه تبریز
[ب]گروه ریاضی و نقشه‌برداری دانشکده فنی و مهندسی مرند- دانشگاه تبریز

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱ تیر ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۲۱ مهر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:
قاب ترکیب تعمیم یافته،
عملگر ترکیب، قاب
g-ترکیب پارسوال، قاب
تنگ.

چکیده

با توجه به کاربردهای قاب‌های ترکیب و ترکیب تعمیم یافته در انتقال داده‌ها، بازسازی دوباره قاب در حالتی‌که یک عضو قاب حذف شده باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله، یک روش بازسازی قاب، برای قاب ترکیب تعمیم یافته، ارائه شده و عملگر خطا را معرفی و کران بالایی برای آن بدست آورده‌ایم. همچنین، عملگر تقریب برای قاب مورد بحث را معرفی کرده و نتایجی در ارتباط با آن مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

بعد از معرفی قاب‌ها توسط *دوفین* [1] و *شیفر* [2]([۱۳])، که در زمینه سری‌های فوریه غیرهارمونیک کار می‌کردند، این نظریه تعمیم‌هایی فراوان به‌خود دیده و گسترش چشم‌گیری داشته است؛ به‌عنوان نمونه می‌توان به g-قاب‌ها ([۲۲] یا [۱۹])، قاب‌های پیوسته ([۱۴]) ، قابهای ترکیب [3] ([۸]) و k-قاب‌ها ([۱۶]) اشاره کرد. تا قبل از دهه ۸۰ میلادی، قاب‌ها نقش چندانی در آنالیز ایفا نمی‌کردند؛ تا این‌که در سال ۱۹۸۰ *گراسمان* [4] توانست با بکاربستن قاب‌ها در نظریه موجک‌ها، توجه آنالیزدانان را به‌خود جلب نماید و رشد این نظریه در چندسال اخیر، کاملاً محسوس می‌باشد. امروزه می‌توان کاربردهای قاب‌ها را در نظریه فیلتر بانک، پردازش سیگنال و تصویر، شبکه‌های بی‌سیم، دستگاه‌های اتمی، رمز نگاری و مسأله کادیسن-سینگر مشاهده نمود (مثلاً به منابع [۵]، [۳]، [۶]، [۱۰]، [۱۵]و [۱۷]رجوع کنید).

در سال‌های اخیر، استفاده از قاب‌های ترکیب و توسیع‌های آنها در علوم مهندسی رشد چشم‌گیری داشته است. نتایج مورد بحث روی آنها می‌تواند در بدست آوردن زمینه‌های کاربردی جدید بسیار مؤثر باشد. قبل از این، کاسازا [5] و کوتینیوک [6] در مراجع [۸]، [۹]، [۱۰]و [۱۱] قاب‌های ترکیب را معرفی و مورد بحث قرار داده‌اند.

در هنگام انتقال داده‌ها، انواع خطاهایی که از فرستنده و گیرنده اتفاق می‌افتند و همچنین نوفه‌هایی [7] که در مسیر انتقال وجود دارند، می‌توانند اطلاعات دریافتی را دچار اختلال کنند. بنابراین، بخشی از آنها در هنگام انتقال از بین رفته یا با نوفه ترکیب می‌شوند. مقاله حاضر، مباحث فوق را در قاب ترکیب تعمیم یافته مطرح نموده و نتایجی را در ارتباط با آن معرفی می‌نماید.

در سرتاسر این مقاله، H و K فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر، π_V تصویر متعامد یکه از H به‌روی زیرفضای بسته $V \subset H$ بوده و $\mathcal{B}(H, K)$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از H به‌توی K

آدرس ایمیلها: vahidsadri57@gmail.com (وحید صدری)، rahmadi@tabrizu.ac.ir (رضا احمدی)، zarghamir@gmail.com (رمضان ضرغامی فرفر).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.88616.1177

[1]R. J. Duffin
[2]A. C. Schaeffer
[3]fusion frames
[4]Grossmann
[5]P. G. Casazza
[6]G. Kutyniok
[7]noise

می‌باشند. در حالت خاص، اگر $K = H$ آنگاه $\mathcal{B}(H,H)$ را با نماد $\mathcal{B}(H)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، $\{H_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله‌ای از فضاهای هیلبرت بوده و $\Lambda_j \in \mathcal{B}(H,H_j)$ برای هر $j \in \mathbb{J}$ می‌باشد که در آن، $\mathbb{J}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۱.۱. (قاب) یک دنباله $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ از اعضای H را یک *قاب* برای H گوییم هرگاه اعداد مثبت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های A و B را کران‌های قاب می‌نامیم. اگر $A = B$، آنگاه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ قاب تنگ [8] نامیده می‌شود و اگر آن ثابت‌ها برابر ۱ شوند، قاب را پارسوال می‌نامند. اگر فقط طرف راست نامساوی (۱.۱) برقرار باشد، $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را دنباله بسل می‌نامیم. دو عملگر ترکیب و تجزیه برای قاب‌ها، به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} T &: \ell^2(\mathbb{J}) \longrightarrow H \quad , \quad T^* : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{J}), \\ T(\{c_j\}_{j\in\mathbb{J}}) &= \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j f_j \quad , \quad T^* f = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{J}}. \end{aligned}$$

همچنین عملگر قاب به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Sf = TT^*f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle f_j \,, \quad (\forall f \in H).$$

تعریف ۲.۱. (قاب ترکیب) فرض کنیم $\{W_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته H بوده و $\{v_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله‌ای از وزن‌های مثبت باشند، یعنی $v_j > 0$. دنباله $(W_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ را یک قاب ترکیب برای H گوییم هرگاه ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\pi_{W_j} f\|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{۲.۱}$$

[8] tight frame

تعریف ۳.۱. (g-قاب) دنباله عملگرهای $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را یک g-قاب (یا قاب تعمیم‌یافته) برای H نسبت به H_j گوییم هرگاه ثابت‌های $0 < A \le B < \infty$ موجود باشند که برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{J}} \|\Lambda_j f\|^2 \le B\|f\|^2. \qquad (۳.۱)$$

۲. قاب‌های ترکیب تعمیم یافته

قاب‌های ترکیب تعمیم یافته [9] که به‌اختصار قاب g-ترکیب می‌نامیم، در همین اواخر توسط برخی از نویسندگان مقاله معرفی شده‌اند (نگاه کنید به [۲۱] و [۲۰]) که نتیجه ترکیب قاب‌های ترکیب و g-قاب‌ها هستند. در ادامه، ابتدا این قاب‌ها را معرفی کرده و برخی از خواص پایه‌ای را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $W = \{W_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته H بوده، $\Lambda_j \in \mathcal{B}(H, H_j)$ و $\{v_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله‌ای از وزن‌های مثبت باشند. دنباله $\Lambda := (W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ را یک قاب g-ترکیب برای H گوییم هرگاه ثابت‌های $0 < A \le B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \le B\|f\|^2. \qquad (۱.۲)$$

اعداد A و B را کران‌های قاب می‌نامند. اگر فقط سمت راست نابرابری (۱.۲) برقرار باشد، در آن‌صورت Λ *دنباله بسل g-ترکیب* [10] برای H با کران B نامیده می‌شود. هرگاه $A = B$ ، قاب را تُنگ نامیده و اگر $A = B = 1$ ، قاب را *g-ترکیب پارسوال* [11] می‌نامیم.

برای این قاب‌ها، فضای نمایش به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathscr{H}_2 := \{\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \ : \ f_j \in H_j, \ \sum_{j\in\mathbb{J}} \|f_j\|^2 < \infty\},$$

[9] generalized fusion frames
[10] g-fusion Bessel sequence
[11] Parseval g-fusion frame

که با تعریف ضرب داخلی به‌صورت

$$\langle\{f_j\},\{g_j\}\rangle=\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f_j,g_j\rangle,$$

این فضا، تبدیل به یک فضای هیلبرت می‌شود. اکنون اگر Λ یک دنباله بسل g-ترکیب باشد، عملگرهای ترکیب [۱۲] و آنالیز [۱۳] را می‌توان برای این قاب‌ها تعریف کرد (برای دیدن جزئیات بیشتر، به [۲۱] نگاه کنید).

$$T_\Lambda:\mathscr{H}_۲\longrightarrow H \qquad , \qquad T_\Lambda^*:H\longrightarrow\mathscr{H}_۲,$$
$$T_\Lambda(\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}})=\sum_{j\in\mathbb{J}}v_j\pi_{W_j}\Lambda_j^*f_j \quad , \quad T_\Lambda^*(f)=\{v_j\Lambda_j\pi_{W_j}f\}_{j\in\mathbb{J}}.$$

بنابراین، عملگر قاب [۱۴] S_Λ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$S_\Lambda f=T_\Lambda T_\Lambda^*f=\sum_{j\in\mathbb{J}}v_j^۲\pi_{W_j}\Lambda_j^*\Lambda_j\pi_{W_j}f.$$

در نتیجه برای هر $f\in H$ خواهیم داشت

$$\langle S_\Lambda f,f\rangle=\sum_{j\in\mathbb{J}}v_j^۲\|\Lambda_j\pi_{W_j}f\|^۲,$$

پس داریم

$$AI_H\le S_\Lambda\le BI_H.$$

این، بەدین معنی‌است که عملگر S_Λ کراندار، مثبت، خودالحاق و معکوس‌پذیر (با معکوس خودالحاق)

---
[12] synthesis operator
[13] analysis operator
[14] frame operator

می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت که

$$B^{-1} I_H \leq S_\Lambda^{-1} \leq A^{-1} I_H.$$

قضیه زیر، یک خاصیت ترکیب عملگرهای T_Λ و T_Θ^* را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم $\mathbb{J}$ مجموعه متناهی بوده و $\Lambda = (W_j, \Lambda_j, v_j)$ و $\Theta = (W_j, \Theta_j, w_j)$ دو دنباله بسل g-ترکیب برای H باشند که در آن‌ها داریم $\Lambda_j, \Theta_j \in \mathcal{B}(H, H_j)$. اگر قرار دهیم $\phi := T_\Lambda T_\Theta^*$ آنگاه ϕ اثرکلاس [15] می‌شود.*

اثبات. فرض کنیم $\phi = u|\phi|$ تجزیه قطبی عملگر ϕ باشد، که در آن، $u \in \mathcal{B}(H)$ ایزومتری نسبی است. بنابراین $|\phi| = u^* T_\Lambda T_\Theta^*$. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد. داریم

$$\begin{aligned}
tr(|\phi|) &= \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle |\phi| e_j, e_j \rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle T_\Theta^* e_j, T_\Lambda^* u e_j \rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle \{w_k \Theta_k \pi_{W_k} e_j\}_{k\in\mathbb{J}}, \{v_k \Lambda_k \pi_{W_k} u e_j\}_{k\in\mathbb{J}} \rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{J}} \sum_{k\in\mathbb{J}} \langle w_k \Theta_k \pi_{W_k} e_j, v_k \Lambda_k \pi_{W_k} u e_j \rangle \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{J}} \sum_{k\in\mathbb{J}} \|w_k \Theta_k \pi_{W_k} e_j\| . \|v_k \Lambda_k \pi_{W_k} u e_j\| \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{J}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{J}} \|w_k \Theta_k \pi_{W_k} e_j\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{J}} \|v_k \Lambda_k \pi_{W_k} u e_j\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{J}} \sqrt{B_\Lambda B_\Theta} \|u e_j\| \\
&= \sqrt{B_\Lambda B_\Theta}\, |\mathbb{J}| < \infty.
\end{aligned}$$

---
[15] *trace class operator*

که نشان می‌دهد ϕ اثرکلاس است. $\square$

قضیه زیر، یک ارتباط بین قاب‌های معمولی با قاب‌های g-ترکیب را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۲. *برای هر $j \in \mathbb{J}$ فرض کنیم $\Lambda_j \in \mathcal{B}(H, H_j)$ و $v_j > 0$ و نیز $\{f_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j}$ یک قاب برای H_j با کران‌های A_j و B_j باشند. دنباله زیرفضاهای W_j را به‌صورت $W_j = \overline{\text{span}}\{\Lambda_j^* f_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j}$ برای هر $j \in \mathbb{J}$ در نظر گرفته و فرض می‌کنیم*

$$0 < A := \inf_{j\in\mathbb{J}} A_j \leq B := \sup_{j\in\mathbb{J}} B_j < \infty.$$

احکام زیر باهم معادل‌اند.

۱. $\{v_j \Lambda_j^* f_{ij}\}_{j\in\mathbb{J}, i\in\mathbb{I}_j}$ *یک قاب برای H است.*
۲. $\Lambda_j(W_j)$ *زیرفضاهای بسته H_j برای هر $j \in \mathbb{J}$ بوده و $\{e_{ij}\}_{j\in\mathbb{J}, i\in\mathbb{I}_j}$ پایه متعامد یکه آنها باشد به‌طوری‌که $\{v_j \pi_{W_j} \Lambda_j^* e_{ij}\}_{j\in\mathbb{J}, i\in\mathbb{I}_j}$ یک قاب برای H است.*
۳. $\Lambda = (W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ *یک قاب g-ترکیب برای H است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که احکام ۱ و ۳ معادل یکدیگر می‌باشند. اگر حکم ۱ برقرار بوده و نیز C و D کران‌های قاب آن باشند، آنگاه با فرض $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned} A \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 &\leq \sum_{j\in\mathbb{J}} A_j v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{J}} \sum_{i\in\mathbb{I}_j} |\langle v_j \Lambda_j \pi_{W_j} f, f_{ij}\rangle|^2 \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}} \sum_{i\in\mathbb{I}_j} |\langle \pi_{W_j} f, v_j \Lambda_j^* f_{ij}\rangle|^2 \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}} \sum_{i\in\mathbb{I}_j} |\langle f, v_j \Lambda_j^* f_{ij}\rangle|^2 \\ &\leq D\|f\|^2. \end{aligned}$$

پس Λ یک دنباله بسل g-ترکیب برای H با کران $\frac{D}{A}$ می‌شود. به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که کران پایین نیز، برابر $\frac{C}{B}$ خواهد شد.

برای حالت عکس، فرض کنیم Λ یک قاب g-ترکیب با کران‌های C و D باشد. برای $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{J}}\sum_{i\in\mathbb{I}_j}|\langle f, v_j\Lambda_j^* f_{ij}\rangle|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{J}}\sum_{i\in\mathbb{I}_j}|\langle \pi_{W_j} f, v_j\Lambda_j^* f_{ij}\rangle|^2\\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}}\sum_{i\in\mathbb{I}_j} v_j^2|\langle \Lambda_j\pi_{W_j} f, f_{ij}\rangle|^2\\ &\le \sum_{j\in\mathbb{J}} B_j v_j^2\|\Lambda_j\pi_{W_j} f\|^2\\ &\le BD\|f\|^2.\end{aligned}$$

باز به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که کران پایین برابر AC می‌شود.

برای اثبات معادل‌بودن احکام ۲ و ۳، کافی‌است توجه کنیم که

$$v_j^2\|\Lambda_j\pi_{W_j} f\|^2 = v_j^2\Big\|\sum_{i\in\mathbb{I}_j}\langle \Lambda_j\pi_{W_j} f, e_{ij}\rangle e_{ij}\Big\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_j}|\langle f, v_j\pi_{W_j}\Lambda_j^* e_{ij}\rangle|^2.$$

□

۳. نتایج اصلی

فرض کنیم $\{W_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{Z_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دو دنباله از زیرفضاهای بسته از H بوده و $\{v_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ مجموعه‌ای از وزن‌ها باشند. همچنین، Λ_j و Θ_j عملگرهایی کراندار از $\mathcal{B}(H, H_j)$ اختیار می‌کنیم. عملگر زیر را، با نام عملگر تقریب، نسبت به سه‌تایی‌های $\Lambda := (W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ و $\Theta := (Z_j, \Theta_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ به‌صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi : H \longrightarrow H,$$
$$\Psi f = \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j \pi_{Z_j} \Theta_j^*(v_j \Lambda_j \pi_{W_j} f).$$

قبل از بیان قضیه، به یک لم از فضاهای باناخ که شرط وجود عملگر معکوس را مشخص می‌کند، نیاز داریم.

لم ۱.۳. *فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ و $U : X \to X$ عملگری کراندار باشد به‌طوری‌که $\|I - U\| < 1$، درآن‌صورت U معکوس‌پذیر بوده و*

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (I - U)^k.$$

علاوه‌براین

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|}.$$

قضیه ۲.۳. *فرض کنیم $C_1, C_2 > 0$ و $0 \leq \gamma < 1$ اعداد حقیقی باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in H$ و $\{f_j\}_{\in\mathbb{J}} \in \mathscr{H}_2$ شریط زیر برقرار باشند:*

۱. $\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq C_1 \|f\|^2$؛
۲. $\|\sum_{\in\mathbb{J}} v_j \pi_{Z_j} \Theta_j^* f_j\|^2 \leq C_2 \|\{f_j\}\|_2^2$؛
۳. $\|f - \Psi f\|^2 \leq \gamma \|f\|^2$.

آنگاه، Λ یک قاب g-ترکیب برای H با کران‌های $C_2^{-1}(1-\gamma)^2$ و C_1 می‌شود. به‌طور مشابه، با حفظ دوگان شرایط ۱ و ۲، Θ نیز یک قاب g-ترکیب برای H با کران‌های $C_1^{-1}(1-\gamma)^2$ و C_2 خواهد شد.

اثبات. فرض کنیم $f \in H$ دلخواه باشد. با استفاده از شرایط ۱ و ۲ داریم

$$\|\Psi f\|^2 \leq C_2 \|\{v_j \Lambda_j \pi_{W_j} f\}\|_2^2 = C_2 \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq C_2 C_1 \|f\|^2$$

بنابراین، Ψ عملگری کراندار می‌شود. پس طبق لم ۱.۳، معکوس‌پذیر شده و $\|\Psi^{-1}\| \leq (1-\gamma)^{-1}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|\Psi^{-1}\Psi f\|^2 \\ &\leq (1-\gamma)^{-2}\|\Psi f\| \\ &\leq C_2(1-\gamma)^{-2}\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Lambda_j\pi_{W_j}f\|^2 \\ &\leq C_2C_1(1-\gamma)^{-2}\|f\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$C_2^{-1}(1-\gamma)^2\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Lambda_j\pi_{W_j}f\|^2 \leq C_1\|f\|^2,$$

که قسمت اول حکم را کامل می‌کند. برای قسمت دوم حکم، ابتدا دوگان شرایط ۱ و ۲ را برای Θ بدست می‌آوریم. با انتخاب $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Theta_j\pi_{Z_j}f\|^2\Big)^2 &= \Big(\langle\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j\pi_{Z_j}\Theta_j^*\Theta_j\pi_{Z_j}f, f\rangle\Big)^2 \\ &\leq \|\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j\pi_{Z_j}\Theta_j^*\Theta_j\pi_{Z_j}f\|^2\|f\|^2 \\ &\leq C_2\|f\|^2\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Theta_j\pi_{Z_j}f\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Theta_j\pi_{Z_j}f\|^2 \leq C_2\|f\|^2.$$

برای شرط دوم، با فرض دلخواه بودن $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \in \mathscr{H}_۲$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j\pi_{W_j}\Lambda_j^* f_j\|^۲ &= \Big(\sup_{\|f\|=۱}\big|\langle \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j\pi_{W_j}\Lambda_j^* f_j, f\rangle\big|\Big)^۲\\ &\le \Big(\sup_{\|f\|=۱}\big|\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f_j, v_j\Lambda_j\pi_{W_j} f\rangle\big|\Big)^۲\\ &\le \|\{f_j\}\|_۲^۲\Big(\sup_{\|f\|=۱}\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲\|\Lambda_j\pi_{W_j} f\|^۲\Big)\\ &\le C_۱\|\{f_j\}\|_۲^۲.\end{aligned}$$

اکنون، با همان استدلال قسمت اول و بکارگیری عملگر تقریب به‌صورت

$$\Psi^* f = \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j\pi_{W_j}\Lambda_j^*(v_j\Theta_j\pi_{Z_j} f),$$

می‌توان قسمت دوم حکم را به‌سرانجام رساند. $\square$

قضیه زیر، تعمیمی از قضیه ۲.۳ از [۹] برای قاب‌های ترکیب تعمیم یافته می‌باشد.

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم Λ یک قاب g-ترکیب برای H با کران‌های A و B بوده و نیز $\mathbb{I} \subset \mathbb{J}$. در این‌صورت، احکام زیر برقرارند.*

۱. *اگر $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ یک g-قاب برای H با کران پایین B بوده و برای هر $j \in \mathbb{I}$ داشته باشیم $v_j > ۱$ ، آنگاه*

$$\bigcap_{j\in\mathbb{I}} W_j = \{۰\}.$$

۲. *اگر $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ یک g-قاب تنگ برای H با کران B بوده و برای هر $j \in \mathbb{I}$ داشته باشیم $v_j = ۱$، آنگاه*

$$\bigcap_{j\in\mathbb{I}} W_j \perp \operatorname{span}\{W_j\}_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}}.$$

۳. *اگر* $A > \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j\|^2 =: C$ *، آنگاه* $(W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}}$ *یک قاب* g*-ترکیب برای* H *با کران‌های* $A - C$ *و* B *می‌شود.*

اثبات. ۱. فرض کنیم $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{I}} W_j$ دلخواه باشد. پس، برای هر $j \in \mathbb{I}$ خواهیم داشت $\pi_{W_j} f = f$. بنابراین،

$$B\|f\|^2 < \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

که نتیجه می‌گیریم $f = 0$.

۲. دوباره، فرض می‌کنیم $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{I}} W_j$. داریم

$$B\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 + \sum_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

در نتیجه $\sum_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 = 0$ که نشان می‌دهد $f \perp \mathrm{span}\{W_j\}_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}}$ و حکم به‌اثبات می‌رسد.

۳. کران بالا که بدیهی است. برای کران پایین، با فرض $f \in H$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{J}\setminus\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 - \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^2 \\ &\geq A\|f\|^2 - \sum_{j\in\mathbb{I}} v_j^2\|\Lambda_j\|^2\|f\|^2 \\ &= (A - C)\|f\|^2.\end{aligned}$$

□

اگر مجموعه $\mathbb{I}$ معرفی شده در قضیه ۳.۳ تک عضوی باشد، درآن‌صورت نتیجه زیر را می‌توان بدست آورد.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنیم* Λ *یک قاب* g*-ترکیب برای* H *با کران‌های* A *و* B *باشد. اگر* $j_0 \in \mathbb{J}$ *موجود باشد به‌طوری‌که* $A > v_{j_0}^2\|\Lambda_{j_0}\|^2$*، آنگاه* $(W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\neq j_0}$ *یک قاب* g*-ترکیب برای* H *با کران‌های*

$A - v_{j_\circ}^{2}\|\Lambda_{j_\circ}\|^{2}$ و B می‌شود.

نتیجه زیر نیز، تعمیمی از نتیجه ۴.۳ از [۹] می‌باشد.

نتیجه ۵.۳. *فرض کنیم Λ یک قاب g-ترکیب تنگ برای H با کران A بوده و $j_\circ \in \mathbb{J}$. آنگاه احکام زیر باهم معادل‌اند.*

۱. $A > v_{j_\circ}^{2}\|\Lambda_{j_\circ}\pi_{W_{j_\circ}}\|^{2}$.
۲. $(W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\neq j_\circ}$ *قاب g-ترکیب برای H است.*

اثبات. اثبات ۲ $\Leftarrow$ ۱ طبق نتیجه ۴.۳ بدیهی است. برای اثبات عکس، فرض کنیم C کران پایین قاب g-ترکیب $(W_j, \Lambda_j, v_j)_{j\neq j_\circ}$ باشد. برای هر $0 \neq f \in H$ داریم

$$\begin{aligned} C\|f\|^{2} \leq \sum_{j\neq j_\circ} v_j^{2}\|\Lambda_j\pi_{W_j}f\|^{2} &= \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^{2}\|\Lambda_j\pi_{W_j}f\|^{2} - v_{j_\circ}^{2}\|\Lambda_{j_\circ}\pi_{W_{j_\circ}}f\|^{2} \\ &= (A\|f\|^{2} - v_{j_\circ}^{2}\|\Lambda_{j_\circ}\pi_{W_{j_\circ}}f\|^{2}). \end{aligned}$$

درنتیجه

$$0 < C \leq A - v_{j_\circ}^{2}\frac{\|\Lambda_{j_\circ}\pi_{W_{j_\circ}}f\|^{2}}{\|f\|^{2}}.$$

اکنون با سوپریمم‌گیری خواهیم داشت $A - v_{j_\circ}^{2}\|\Lambda_{j_\circ}\pi_{W_{j_\circ}}\|^{2} > 0$. □

در قضیه زیر، با حذف یک عده از اعضای قاب پارسوال برای فضای H_j و حفظ قاب باقی‌مانده، خواهیم توانست یک قاب g-ترکیب جدید برای فضای H بوجود آوریم.

قضیه ۶.۳. *فرض کنیم Λ یک قاب g-ترکیب برای H با کران‌های A و B باشد. نیز برای یک مجموعه اندیس‌گذار متفاوت $\mathbb{I}_j$ که $j \in \mathbb{J}$ فرض کنیم $\{f_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j} \in \Lambda_j(W_j)$ یک قاب پارسوال برای H_j باشد به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه متناهی $\mathbb{L}_j \subset \mathbb{I}_j$ و به‌ازای هر $j \in \mathbb{J}$، مجموعه $\{f_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j\setminus\mathbb{L}_j}$ یک قاب برای H_j با کران پایین C_j شود. اگر مجموعه زیرفضاهای $\{\widetilde{W}_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را به‌صورت $\widetilde{W}_j := \overline{\operatorname{span}}\{\Lambda_j^{*}f_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j\setminus\mathbb{L}_j}$ تعریف کنیم آنگاه $(\widetilde{W}_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ یک قاب g-ترکیب برای H با کران‌های $(\min_{j\in\mathbb{J}} C_j)A$ و B خواهد بود.*

اثبات. بدیهی‌است که $\widetilde{W}_j$ زیرفضاهای بسته H بوده و B همچنان یک کران بالا برای $(\widetilde{W}_j, \Lambda_j, v_j)_{j\in\mathbb{J}}$ می‌باشد. برای بدست آوردن کران پایین، با فرض دلخواه بودن $f \in H$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ \|\Lambda_j \pi_{\widetilde{W}_j} f\|^۲ &= \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ \sum_{i\in\mathbb{I}_j} |\langle \Lambda_j \pi_{\widetilde{W}_j} f, f_{ij}\rangle|^۲ \\ &\geq \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ \sum_{i\in\mathbb{I}_j\setminus\mathbb{L}_j} |\langle \pi_{\widetilde{W}_j} f, \Lambda_j^* f_{ij}\rangle|^۲ \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ \sum_{i\in\mathbb{I}_j\setminus\mathbb{L}_j} |\langle \Lambda_j \pi_{W_j} f, f_{ij}\rangle|^۲ \\ &\geq \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ C_j \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^۲ \\ &\geq (\min_{j\in\mathbb{J}} C_j) \sum_{j\in\mathbb{J}} v_j^۲ \|\Lambda_j \pi_{W_j} f\|^۲ \\ &\geq (\min_{j\in\mathbb{J}} C_j) A \|f\|^۲.\end{aligned}$$

□

اکنون، قصد داریم در حالت متناهی، عملگر تقریب Ψ را مشابه دیدگاه ارائه شده در [۹] بررسی نماییم. فرض کنیم $\mathbb{J} = \{۱, ۲, \cdots, m\}$ متناهی و Λ یک قاب g-ترکیب پارسوال باشد. برای یک $j_۰ \in \mathbb{J}$ دلخواه، عملگر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &D_{j_۰} : \mathscr{H}_۲ \longrightarrow \mathscr{H}_۲, \\ &D_{j_۰} \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} = \delta_{j,j_۰} f_{j_۰}. \end{aligned}$$

حال، خطای بازسازی یک حذفی مرتبط با Λ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{E}_۱(\Lambda) = \max_{j\in\mathbb{J}} \|T_\Lambda D_j T_\Lambda^*\|.$$

با توجه به‌این‌که

$$\|T_\Lambda D_j T_\Lambda^*\| = \sup_{\|f\|=1} \|T_\Lambda D_j T_\Lambda^* f\| = v_j^2 \sup_{\|f\|=1} \|\pi_{W_j} \Lambda_j^* \Lambda_j \pi_{W_j} f\| \leq v_j^2 \|\Lambda_j\|^2,$$

بنابراین

$$\mathcal{E}_1(\Lambda) = \max_{j\in\mathbb{J}} v_j^2 \|\Lambda_j\|^2.$$

قضیه ۷.۳. *فرض کنیم $\mathbb{J} = \{1, 2, \cdots, m\}$ متناهی و Λ یک قاب g-ترکیب پارسوال برای فضاهای متناهی بعد H, H_j برای هر $j \in \mathbb{J}$ بوده و نیز همه زیرفضاهای $\Lambda_j(W_j)$ بسته باشند. احکام زیر معادل‌اند.*

۱. *قاب g-ترکیب پارسوال در شرط $\mathcal{E}_1(\Lambda) = \min_{j\in\mathbb{J}} \mathcal{E}_1(\widetilde{W}_j, \Lambda_j, \widetilde{v}_j)_{j\in\mathbb{J}}$ صدق می‌کند که در آن، $(\widetilde{W}_j, \Lambda_j, \widetilde{v}_j)_{j\in\mathbb{J}}$ قاب g-ترکیب پارسوال با شرط $\dim \widetilde{W}_j = \dim W_j$ برای هر $j \in \mathbb{J}$ می‌باشد.*

۲. *برای هر $j \in \mathbb{J}$ داریم*

$$v_j^2 \|\Lambda_j\|^2 = \frac{\dim H}{m. \dim W_j}.$$

اثبات. فرض کنیم $\{e_{ij}\}_{i\in\mathbb{I}_j}$ یک پایه متعامد یکه برای $\Lambda_j(W_j)$ برای هر $j \in \mathbb{J}$ باشد. طبق قضیه ۳.۲، دنباله $\{v_j \pi_{W_j} \Lambda_j^* e_{ij}\}_{j=1, i=1}^{m, \dim \Lambda_j(W_j)}$ یک قاب پارسوال برای H است. اکنون، با استفاده از رابطه (۱۷) از [۷] داریم

$$\dim H = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\dim \Lambda_j(W_j)} v_j^2 \|\pi_{W_j} \Lambda_j^* e_{ij}\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \dim \Lambda_j(W_j) v_j^2 \|\Lambda_j\|^2.$$

درنتیجه، برای یک j مناسب، داریم

$$\dim H \leq m. \dim \Lambda_j(W_j) v_j^2 \|\Lambda_j\|^2.$$

از آنجایی‌که بعدها و همچنین تعداد زیرفضاها ثابت هستند، پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{E}_1(\Lambda)$ فقط و فقط

زمانی مینیمم است که

$$\dim H = m.\dim \Lambda_j(W_j)v_j^{۲}\|\Lambda_j\|^{۲}\ , \qquad (\forall j \in \mathbb{J}).$$

□

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله، قدردان نظرات و پیشنهادهای مفید و ارزشمند داوران محترم مجله می‌باشند.

مراجع

[1] R. Ahmadi, Iterative reconstruction algorithm in frame of subspaces, *International Journal of Academic Research*, **7**(4) (2015), 157–161.

[2] F. Arabyani Neyshaburi and A, Arefijamal, Characterization and Construction of K-Fusion Frames and Their Duals in Hilbert Spaces, *Result. Math.*, First online: 24 Feb., 2018.

[3] H. Blocsli, H.F. Hlawatsch and H.G. Fichtinger, Frame-Theoretic analysis of oversampled filter bank, *IEEE Trans. Signal Process.*, **46**(12) (1998), 3256–3268.

[4] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[5] E.J. Candes and D.L. Donoho, New tight frames of curvelets and optimal representation of objects with piecwise C^2 singularities, *Comm. Pure and App. Math.*, **57**(2) (2004), 219–266.

[6] P.G. Casazza and O. Christensen, Perturbation of operators and application to frame theory, *J. Fourier Anal. Appl.*, **3** (1997), 543–557.

[7] P.G. Casazza and J. kovačević, Equal-norm tight frames with erasures, *Adv. Comput. Math.*, **18** (2003), 387–430.

[8] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, *Contemp. Math.*, **345** (2004), 87–114.

[9] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Robustness of fusion frames under erasures os subspaces and local frame vectors, *Contemp. Math.*, **464** (2008), 149–160.

[10] P.G. Casazza, G. Kutyniok and S. Li, Fusion frames and distributed processing, *Appl. comput. Harmon. Anal.*, **25**(1) (2008), 114–132.

[11] P. G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li and C. J. Rozell, Modeling Sensor Network s with Fusion Frames *Wavelets XII(San Diego, CA, 2007), SPIE Proc.*, **6701**, SPIE Bellingham, WA, (2007).

[12] O. Christensen, *Frames and Bases: An Introductory Course (Applied and Numerical Harmonic Analysis)*, Birkhaüser, 2008.

[13] R.J. Duffin and A. C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72**(1) (1952), 341–366.

[14] M.H. Faroughi and R. Ahmadi, Some properties of C-frames of subspaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **1**(3) (2008), 155–168.

[15] H.G. Feichtinger and T. Werther, Atomic systems for subspaces, *Proceedings SampTA. Orlando, FL*, (2001), 163–165.

[16] L. Găvruta, Frames for operators, *Appl. Comp. Harm. Annal.*, **32** (2012), 139–144.

[17] R. Kadison and I. Singer, Extensions of pure states, *Am. J. Math.*, **81** (1959), 383–400.

[18] M. Khayyami and A. Nazari, Construction of continuous g-frames and continuous fusion frames, *Sahand Commun. Math. Anal.*, **4**(1) (2016), 43–55.

[19] A. Najati, M.H. Faroughi and A. Rahimi, G-frames and stability of g-frames in Hilbert spaces, *Methods Funct. Anal. Topol.*, **14**(3) (2008), 305–324.

[20] Gh. Rahimlou, V. Sadri and R. Ahmadi, Weighted Riesz basis in g-fusion frames and their perturbation, Submited 2018.

[21] V. Sadri, Gh. Rahimlou, R. Ahmadi and R. Zarghami Farfar, Construction of g-fusion frames in Hilbert spaces, Submited 2018.

[22] W. Sun, G-frames and G-riesz bases, *J. Math. Anal. Appl.*, **326** (2006), 437–452.