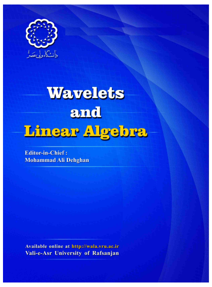
موجک‌ها و جبرخطی ۵(۳) (۱۳۹۸) ۳۹-۶۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

جواب‌های رونسکین معادلات سولیتونی: کاربردی از ماتریس‌های واندرموند

سیدمحمد حسینی*[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۴ فروردین ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۹ مهر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸

ادیتور رابط: علی توکلی

کلمات کلیدی:

سولیتون، مشتق هیروتا، رونسکین، رابطه‌ی پلاکر.

چکیده

در مقاله‌ی حاضر ثابت خواهیم کرد که جواب‌های N−سولیتونی حاصل از روش پراکندگی معکوس معادله‌ی سولیتونی کی-پی معادل یک رونسکین از توابع است. این معادله یکی از معادلات اساسی نظریه سولیتون و حالت کلی‌تری از معادله‌ی کاربردی کی-دی-وی می‌باشد. فرایند اثبات با استفاده از مشتق هیروتا و ماتریس‌های واندرموند و رابطه‌ی پلاکر انجام می‌پذیرد.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: smhoseini@vru.ac.edu (سیدمحمد حسینی).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.84203.1169

۱. مقدمه

پدیده‌های بسیاری در طبیعت وجود دارند که می‌توان آن‌ها را با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل‌سازی کرد. معادلات موج یک دسته‌ی بسیار مهم از این گونه معادلات هستند. در بین این معادلات می‌توان به معادلات سولیتونی[۱] که نقش بسیار مهمی در علوم محض و شاخه‌های کاربردی نظیر هندسه دیفرانسیل، فیزیک، ارتباطات و هیدرودینامیک و ... دارند اشاره کرد. از دیدگاه تخصصی، معادله‌ی سولیتونی، یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که دارای جواب سولیتونی باشد. یک سولیتون به‌صورت یک موج موضعی ظاهر می‌شود که در بعد مکان بسیار سریع (سریع تر از تابع $e^{-c|x|}$ هنگامی که $x \to \infty$) به سمت صفر (یا یک مقدار ثابت) میل میکند. یک سولیتون در نتیجهٔ خنثی‌سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شود. تاریخچه‌ی نظریه‌ی سولیتون به دهه‌ی ۱۸۳۰ برمی‌گردد، زمانی که یک مهندس اسکاتلندی به اسم ”جان اسکات راسل[۲]“ به‌طور تصادفی در یک کانال، به هنگام بررسی آزمایشگاهی بر روی امواج آب، یک موج غیرپاشنده (نامیرا) را مشاهده کرد. پیشرفت در توصیف نظری این پدیده بسیار دیرهنگام در دهه‌ی ۱۸۸۰ توسط دو دانشمند بنام‌های کورتووگ و دی-وریس در چارچوب معادله‌ی کی-دی-وی[۳]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{۱.۱}$$

که هم‌اکنون بنام خودشان معروف است انجام شد. آنها این معادله را برای توصیف موج‌های آب‌های کم‌عمق بدست آوردند. در آن‌زمان جواب‌های تک-سولیتونی این معادله که بصورت

$$u(x,t) = W\operatorname{sech}^2(r(x - vt + x_0)), \tag{۲.۱}$$

[1] Soliton equations
[2] John Scott Russell
[3] Korteweg-de Vries (KdV) equation

بیان می‌شوند شناخته شده بودند. لازم به ذکر است که

$$v = ۴r^۲, \quad W = ۲r^۲,$$

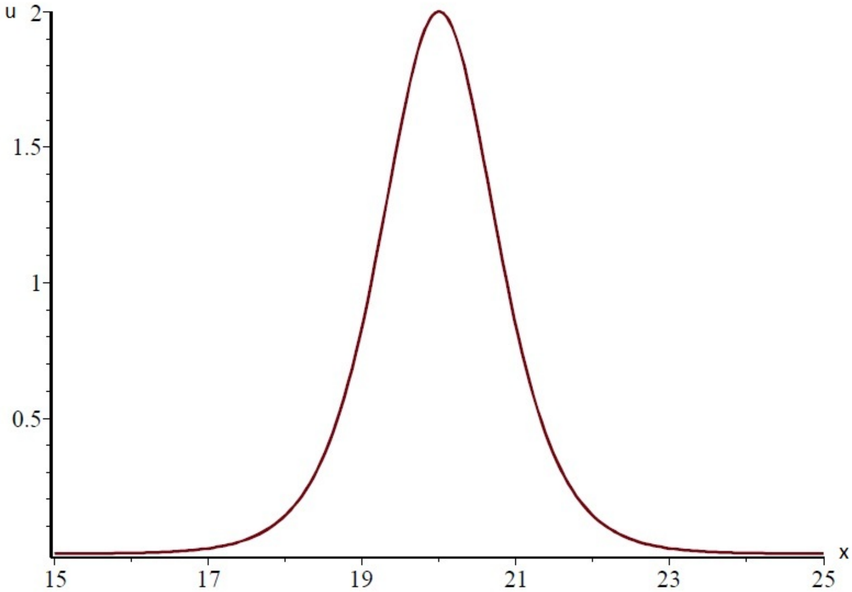
و v و W به ترتیب سرعت و ارتفاع سولیتون را مشخص می‌کنند. همچنین پارامتر آزاد r نمایانگر پهنای سولیتون می‌باشد. در شکل ۱ تابع تک-سولیتونی (۲.۱) برای معادله‌ی (۱.۱) با پارامترهای $x_۰ = ۰$ و $r = ۱$ در $t = ۵$ نمایش داده شده است.کرایتون در [۴] تنها به گوشه‌ای از این کاربردها می‌پردازد. از کاربردهای دیگر این معادله می‌توان به هیدرودینامیک، امواج غیرخطی نور، فیزیک پلاسما و زیست‌شناسی اشاره کرد.

یکی دیگر از معادلات پرکاربرد و اساسی سولیتونی معادله‌ی کی-پی[۴] می‌باشد. این معادله را می‌توان حالت کلی‌تری از معادله‌ی کی-دی-وی (۱.۱) در نظر گرفت. برای جزئیات بیشتر به بخش ۷ مراجعه شود. این معادله‌ی $(۱ + ۲)$ -بعدی (شامل ۲ متغیر مکانی x و y و یک متغیر زمان t) ارتباطی عمیق‌تر بین نظریه‌ی سولیتون و سایر شاخه‌های علوم برقرار می‌کند. به عنوان مثال می‌توان دید که جواب‌های این معادله را می‌توان با یک مدار $GL(\infty)$ بر روی منیفلد بی‌نهایت بعدی گراسمان[۵] نمایش داد. این معادله همچنین می‌تواند از رابطه‌ی پلاکر[۶] (برای توضیح بیشتر در مورد رابطه‌ی پلاکر به [۷] مراجعه شود) بر روی یک گراسمان حاصل شود [۳].

شناخت سایر جواب‌های سولیتونی این معادله و همچنین شناخت سایر معادلات سولیتونی از پیشرفت‌های دیگر در نظریه سولیتون بود که در نیمه‌ی دوم قرن بیستم اتفاق افتاد. ابداع روش بسیار پیچیده‌ی انتقال پراکندگی معکوس[۷] برای مشخص کردن جواب‌های $N-$ سولیتونی معادله‌ی کی-دی-وی (۱.۱) یکی از این پیشرفت‌ها بود [۶]. این روش را می‌توان از بعضی جوانب، توسعه‌ای از روش تبدیل فوریه[۸] که برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل خطی کاربرد دارد در نظر گرفت. این روش تاکنون برای بسیاری از معادلات سولیتونی بکارگرفته شده است. بعنوان مثال جزئیات این روش برای معادله‌ی (انتگرال‌پذیر یا

[4] Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation
[5] Grassmann
[6] Plucker relation
[7] Inverse Scattering Transform (IST)
[8] Fourier transformation

سولیتونی) غیرخطی شرودینگر [۹] را می‌توان در [۲] یا [۹] دید. لازم به ذکر است که در این روش ناگزیر به حل مسئله ریمان-هیلبرت[۱۰] ویا معادله‌ی انتگرالی ژلفاند-لویتان-مرچنکو[۱۱] خواهیم بود.



شکل ۱: جواب تک-سولیتونی معادله (۲.۱).

روش‌های بدیع دیگری نیز برای حل معادلات انتگرال‌پذیر تاکنون ابداع شده‌اند. در این میان می‌توان به روش مستقیم یا روش هیروتا[۱۲] اشاره کرد [۷]. در این روش نیز جواب‌های کلی $N-$ سولیتونی قابل ساختن هستند. در حالی که این روش از پیچیدگی‌های روش انتقال پراکندگی معکوس مبرا می‌باشد ولی دوخطی‌سازی[۱۳] حاصل از بکارگیری مشتق هیروتا[۱۴] در این روش ایده ساخت جواب رونسکینی[۱۵] از مرتبه N را به طور مستقیم القاء می‌کند. جواب‌های رونسکینی برای معادله‌ی کی-پی و بعضی دیگر از معادلات پیوسته و یا گسسته سولیتونی در [۷] معرفی و با استفاده از فافیان[۱۶] ثابت می‌شوند که در

[9] Nonlinear Schrödinger (NLS) equation
[10] Riemann–Hilbert factorization problem
[11] Gelfand–Levitan–Marchenko integral equation
[12] Direct (Hirota) method
[13] bilinearization
[14] Hirota derivative
[15] Wronskian solution
[16] Pfaffian

معادلات صدق می‌کنند.

در این مقاله به استخراج جواب رونسکینی معادله‌ی کی-پی با استفاده از جواب سولیتونی آن حاصل از روش پراکندگی معکوس پرداخته و با استفاده از خواص دترمینان‌ها ثابت خواهیم کرد که در معادله صدق می‌کند. این مهم با بکارگیری ماتریس‌های واندرموند[۱۷] انجام خواهد شد. بنابراین شناخت اینگونه ماتریس‌ها و معکوس آنها یکی از اولویت‌های این مقاله می‌باشد. سعی نویسنده در این مقاله، بیان قضایا و مفاهیم به زبان ساده می‌باشد.

این مقاله شامل ۷ بخش می‌باشد. بخش۲ به معرفی اجمالی از خانواده معادلات سولیتونی می‌پردازد. در بخش۳ تنها به معرفی مشتق هیروتا که ابزاری شناخته‌شده در نظریه معادلات دیفراسیل می‌باشد می‌پردازیم. در بخش۴ تعاریف و قضایای مورد نیاز برای بخش‌های بعدی از نظریه درونیابی را بیان می‌کنیم. ماتریس‌های واندرموند و معکوس آنها و همچنین بعضی روابط کلیدی که ابزار اساسی در این مقاله می‌باشند در بخش ۵ عنوان خواهند شد. اثبات این روابط با استفاده از مطالب بخش۴ نیز انجام خواهد شد. در بخش۶ به رابطه‌ای اساسی از دترمینان اشاره خواهیم کرد و بالاخره در بخش ۷ با استفاده از پیش‌نیازهای مطرح شده در بخش‌های قبلی به استخراج جواب‌های رونسکینی از جواب‌های سولیتونی برای معادله‌ی سولیتونی کی-پی می‌پردازیم.

۲. معادلات سولیتونی

در ابتدای پیدایش نظریه‌ی سولیتون، تعداد معادلات سولیتونی انگشت‌شمار بود تا اینکه در دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی یک خانواده‌ی فراگیر از این معادلات بر پایه یک رابطه بازگشتی بیان شد. این کشف بزرگ توسط چهار دانشمند در [۱] که به روند ای-کی-ان-اس[۱۸] معروف می‌باشد انجام شد. پایه و اساس روش انتقال پراکندگی معکوس بر این نکته مهم استوار می‌باشد که هر معادله‌ی سولیتونی را می‌توان به عنوان شرط همخوانی (در ذیل به آن اشاره خواهد شد) دو معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی در نظر گرفت. برای ساختن یک خانواده‌ی کلی از معادلات سولیتونی کافی است که جفت معادلات دیفرانسیل مربوطه که به جفت لکس[۱۹] معروف می‌باشد را بصورت

[17] Vondermonde matrices
[18] AKNS
[19] Lax pair

$$Y_x = MY, \qquad M = \begin{pmatrix} -i\xi I_k & q \\ r^T & i\xi I_m \end{pmatrix}, \tag{۱.۲}$$

و

$$Y_t = NY, \qquad N = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \tag{۲.۲}$$

در نظر گرفت که I_k ماتریس همانی $k \times k$ و ξ پارامتر پراکندگی و توابع $C, \mathcal{B}, \mathcal{A}, q, r$ و $\mathcal{D}$ توابعی ماتریسی از متغیرهای (x, t) می‌باشند. شرط همخوانی بین (۱.۲) و (۲.۲) یعنی

$$M_t - N_x + [M, N] = \circ, \tag{۳.۲}$$

معادله‌ی سولیتونی را مشخص می‌کند که $[M, N] = MN - NM$ براکت لی[۲۰] می‌باشد. با اعمال (۳.۲) بافرض اینکه ξ وابسته به زمان t نمی‌باشد می‌توان دید که معادله‌ی سولیتونی با رابطه بازگشتی

$$i\begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix}_t = L_R^n \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \quad n = ۱, ۲, \cdots, \tag{۴.۲}$$

مشخص می‌شود که عملگر L_R را می‌توان به طور صریح مشخص کرد. برای جزئیات بیشتر از استخراج (۴.۲) به [۹] مراجعه شود. بعنوان مثال با انتخاب $n = ۳$ و $m = k = ۱$ و $r = -۱$ و $q = u$ می‌توان دید که معادله‌ی کی-دی-وی (۱.۱) یکی از اعضای این خانواده می‌باشد.

۳. مشتق هیروتا

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد یکی از روش‌های بدیع و نوین برای حل معادلات سولیتونی روش موسوم به روش مستقیم یا هیروتا می‌باشد. در این بخش سعی شده است که بصورت خلاصه به معرفی

[20] Lie bracket

مشتق هیروتا و بعضی از خواص آن پرداخته شود [۷].

تعریف ۱.۳. فرض کنیم توابع مختلط یا حقیقی-مقدار تک-متغیره $a(x)$ و $b(x)$ از هر مرتبه دلخواه مشتق‌پذیر باشند. عملگر D برای $a(x)$ و $b(x)$ به‌صورت

$$D_x^n(a,b) \equiv (\frac{\partial}{\partial_x} - \frac{\partial}{\partial_y})^n a(x)b(y) \mid_{y=x} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} a(x+y)b(x-y) \mid_{y=0}, \qquad (۱.۳)$$

که در آن $n = 0, 1, 2, \ldots$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم توابع مختلط یا حقیقی-مقدار دو-متغیره $a(t,x)$ و $b(t,x)$ از هر مرتبه دلخواه برای هر دو متغیر مشتق‌پذیر باشند. عملگر D برای $a(t,x)$ و $b(t,x)$ به‌صورت

$$D_t^m D_x^n(a,b) \equiv \frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} a(t+s, x+y)b(t-s, x-y) \mid_{s=0, y=0}, \qquad (۲.۳)$$

که در آن $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ تعریف می‌شود.

در اینجا برای سادگی از نماد

$$D_x^n(a,b) \equiv D_x^n a.b,$$

استفاده می‌کنیم. عملگر D مشتق هیروتا نیز نامیده می‌شود.

۴. چندجمله‌ای‌های درونیاب

چندجمله‌ای درونیاب[۲۱] و موارد کاربرد آن یکی از مباحث روز آنالیز عددی می‌باشد. در این بخش تنها به تعریف یک چندجمله‌ای درونیاب و قضایا و نتایج مورد نیاز آن می‌پردازیم. خواننده را برای جزئیات بیشتر به [۸] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید نقاط اتکای[۲۲] متمایز دلخواه (t_i, f_i) با $i = 0, 1, \ldots, n$ داده شده باشند.

[21] Interpolation polynomial
[22] support points

چندجمله‌ای $P(t)$ را یک چندجمله‌ای درونیاب برای نقاط اتکای داده شده گوییم هرگاه

$$P(t_i) = f_i. \tag{۱.۴}$$

تعریف ۲.۴. مجموعه همه‌ی چندجمله‌ای‌های حقیقی-مقدار از درجه نابیشتر از n را با Π_n نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۴. *برای* $n+1$ *نقطه اتکای متمایز دلخواه* (t_i, f_i) *یک چندجمله‌ای یگانه‌ی درونیاب* $P \in \Pi_n$ *وجود دارد.*

تعریف ۴.۴. چندجمله‌ای از درجه n

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{۲.۴}$$

را چندجمله‌ای لاگرانژ[۲۳] گوییم.

لازم به یادآوری است که با قرار دادن

$$\omega(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - t_i), \tag{۳.۴}$$

چندجمله‌ای لاگرانژ (۲.۴) را می‌توان با

$$L_i(t) = \frac{\omega(t)}{(t - t_i)\omega'(t_i)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{۴.۴}$$

---

[23] Lagrange polynomial

نمایش داد. ازخواص مهم چندجمله‌ای لاگرانژ می‌توان به خاصیت زیر اشاره کرد:

$$L_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{۵.۴}$$

همچنین اگر قرار دهیم

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} L_i(t) f_i, \tag{۶.۴}$$

آن‌گاه $P \in \Pi_n$ و به ویژه داریم

$$P(t_k) = \sum_{i=1}^{n} L_i(t_k) f_i = f_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n), \tag{۷.۴}$$

که به فرمول درون‌یابی لاگرانژ معروف است.

قضیه ۵.۴. *فرض کنیم تابع f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد، در این صورت برای هر $\bar{t}$ یک نقطه ξ متعلق به $I[t_0, t_1, \dots, t_n, \bar{t}]$ (کوچک‌ترین بازه‌ی دربردارنده همه نقاط t_i و $\bar{t}$ است) وجود دارد به طوری‌که*

$$f(\bar{t}) - P(\bar{t}) = \frac{\omega(\bar{t}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{۸.۴}$$

که ω در (۳.۴) آمده است [۸].

۵. ماتریس‌های واندرموند و معکوس آنها

در این بخش به معرفی ماتریس‌های واندرموند خواهیم پرداخت. همچنین با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ معکوس یک ماتریس واندرموند را مشخص خواهیم کرد. مطالب این فصل کاربردی مستقیم در فصول بعدی خواهد داشت.

تعریف ۱.۵. ماتریس

$$V=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ -l_۱ & -l_۲ & \dots & -l_n \\ l_۱^۲ & l_۲^۲ & \dots & l_n^۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-l_۱)^{n-۱} & (-l_۲)^{n-۱} & \dots & (-l_n)^{n-۱} \end{bmatrix}, \quad ۰ \neq l_j \in \mathbb{R}, \quad j=۱,\dots,n, \qquad (۱.۵)$$

را یک ماتریس واندرموند می‌گویند. برای سادگی ماتریس واندرموند را با نماد

$$V=(-l_j)^{i-۱}, \quad i,j=۱,\dots,n,$$

نمایش می‌دهیم.

از آنجا که در فصل بعدی به معکوس ماتریس واندرموند نیاز خواهیم داشت در اینجا به محاسبه ان می‌پردازیم. فرض کنیم که درایه‌های ماتریس معکوس V را با

$$V^{-۱}=\alpha_{ij}, \quad i,j=۱,\dots,n,$$

نمایش دهیم، از آن‌جایی که $V^{-۱}V=I$، داریم

$$\sum_{k=۱}^{n}\alpha_{ik}(-l_j)^{k-۱}=\delta_{ij}. \qquad (۲.۵)$$

اکنون اگر چندجمله‌ای $P_i(t)$ از مرتبه $n-۱$ را به‌صورت

$$P_i(t)=\alpha_{i۱}+\alpha_{i۲}t+\alpha_{i۳}t^۲+\dots+\alpha_{in}t^{n-۱}, \qquad (۳.۵)$$

تعریف کنیم آن‌گاه رابطه (۲.۵) به‌صورت

$$P_i(-l_j) = \delta_{ij}, \tag{۴.۵}$$

نمایش داده می‌شود. مسئله (۳.۵) که در آن ضرایب α_{ik} مجهول می‌باشند خود یک مسئله درون‌یابی می‌باشد که در بخش ۴ به معرفی آن پرداختیم. اکنون با انتخاب

$$f_{ij} = \delta_{ij}, \tag{۵.۵}$$

می‌توان چندجمله‌ای $P_i(t)$ را با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مشخص کرد. بنابراین

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} L_{ij}(t), \tag{۶.۵}$$

که در آن

$$L_{ij}(t) = \prod_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n} \frac{t+l_p}{-l_j+l_p}. \tag{۷.۵}$$

به عبارت دیگر با استفاده از (۵.۵) خواهیم دید که

$$P_i(t) = L_{ii}(t) = \prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} \frac{t+l_p}{l_p-l_i} = \frac{1}{S_i} \prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} (t+l_p), \tag{۸.۵}$$

که

$$S_i = \prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} (l_p - l_i). \tag{۹.۵}$$

با مقایسه روابط (۳.۵) و (۸.۵) دیده می‌شود که درایه α_{ik} از ماتریس V^{-1} همان ضریب t^{k-1} در

$$\frac{1}{S_i}\prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} (t + l_p),$$

می‌باشد. درایه‌های ماتریس V^{-1} را به گونه‌ای دیگر نیز می‌توان نمایش داد به‌طوری‌که با تغییر متغیر

$$t \longrightarrow \frac{1}{t},$$

در روابط (۳.۵) و (۸.۵) می‌توان دید که

$$\alpha_{i1}t^{n-1} + \alpha_{i2}t^{n-2} + \alpha_{i3}t^{n-3} + \ldots + \alpha_{in} = \frac{1}{S_i}\prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} (1 + l_p t). \tag{۱۰.۵}$$

و یا

$$(V^{-1})_{ik} = S^{i}_{n-k},$$

که S^{i}_{n-k} ضریب t^{n-k} در چندجمله‌ای

$$\frac{1}{S_i}\prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n} (1 + l_p t).$$

می‌باشد.

اکنون با استفاده از نتایج بالا به دنبال محاسبه ماتریس حاصل‌ضرب $V^{-1}W$ برای

$$W=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ \omega_1 & -\omega_2 & \omega_3 & \dots & (-1)^{n-1}\omega_n \\ \omega_1^2 & -\omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & (-1)^{n-1}\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & -\omega_2^{n-1} & \omega_3^{n-1} & \dots & (-1)^{n-1}\omega_n^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{۱۱.۵}$$

با نماد مختصر

$$W=(-1)^{j-1}\omega_j^{i-1},\ 0\neq\omega_j\in\mathbb{R}\quad i,j=1,\dots,n,$$

خواهیم بود.

با توجه به حاصل‌ضرب دو ماتریس داریم

$$\begin{aligned}(V^{-1}W)_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}(V^{-1})_{ik}W_{kj}=(-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n}S^{\,i}_{n-k}\omega_j^{k-1}\\ &=(-1)^{j-1}(S^{\,i}_{n-1}+S^{\,i}_{n-2}\omega_j+\dots+S^{\,i}_{0}\omega_j^{n-1}=(-1)^{j-1}\frac{1}{S_i}\frac{1}{\omega_j+l_i}\prod_{p=1}^{n}(\omega_j+l_p).\end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

به عبارت دیگر

$$V^{-1}W=P^{-1}MQ,$$

که در آن ماتریس‌های M، P و Q به‌صورت

$$M=\frac{1}{l_i+\omega_j},\quad P=\delta_{ij}\prod_{\substack{p=1,\\ p\neq i}}^{n}(l_p-l_i),\quad Q=\delta_{ij}(-1)^{i-1}\prod_{p=1}^{n}(l_p+\omega_i), \tag{۱۳.۵}$$

تعریف می‌شوند. هم‌چنین می‌توان دید که

$$(VP^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(P^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-l_k)^{i-1}\frac{\delta_{kj}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{n}(l_p - l_i)} = \frac{(-l_j)^{i-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n}(l_p - l_j)}. \qquad (۱۴.۵)$$

حال با فرض $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ، داریم

$$(VP^{-1}e)_i = (VP^{-1}\ \text{سطر } i \text{ ام}).e = \sum_{j=1}^{n}(VP^{-1})_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-l_j)^{i-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n}(l_p - l_j)}. \qquad (۱۵.۵)$$

طبق قضیه (۵.۴) اگر $P_i(t)$ چندجمله‌ای درونیاب رابطه‌ی (۶.۵) برای تابع $y = f(t)$ در نقاط $t_j = -l_j$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ باشد آن‌گاه

$$P_i(t) - f(t) = \frac{\omega(t)f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad (۱۶.۵)$$

که در آن

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^{n}(t + l_j), \quad \xi \in I(t, -l_1, \dots, -l_n).$$

بنابراین

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(t)f(-l_j) - f(t) = \frac{\omega(t)f^{(n)}(\xi)}{n!}. \qquad (۱۷.۵)$$

اکنون با انتخاب $f(t) = t^i$ که $i = 1, 2, \dots, n-1$ خواهیم دید که

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(t)(-l_j)^i - t^i = 0.$$

در $t=\circ$ داریم

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(\circ)(-l_j)^i = \circ,$$

و یا

$$H\sum_{j=1}^{n}\frac{(-l_j)^{i-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n}(l_p-l_j)}=\circ,\quad H=-l_1l_2\dots l_n.$$

از آنجا که $H\neq\circ$ می‌باشد به سادگی دیده می‌شود که

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-l_j)^{i-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n}(l_p-l_j)}=\circ,\quad i=1,2,\dots,n-1.$$

اما برای $i=n$ داریم

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(\circ)(-l_j)^n = \frac{n!H}{n!},$$

و یا

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-l_j)^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1,\\ p\neq j}}^{n}(l_p-l_j)}=1. \tag{۱۸.۵}$$

به‌طور خلاصه روابط (۱۵.۵) و (۱۸.۵) به‌صورت

$$(VP^{-1}e)_i=\begin{cases}1, & i=n,\\ \circ, & i\neq n,\end{cases} \tag{۱۹.۵}$$

نوشته می‌شوند. رابطه (۱۹.۵) در ساده‌سازی روابط فصل بعدی کاربردی مستقیم دارد.

۶. اتحادی برای دترمینان‌ها

در این بخش به معرفی اتحادی برای دترمینان‌ها می‌پردازیم که برای اثبات جواب بودن یک رونسکین برای یک معادله‌ی دیفرانسیل نقشی اساسی دارد ((۲۲.۷) را ببینید). در حقیقت همان‌طور که در بخش ۷ برای معادله مورد نظر در این مقاله یعنی معادله‌ی کی-پی خواهیم دید سایر معادلات سولیتونی نیز با اعمال تغییر متغیر مناسب به دترمینان یک ماتریس (یا مجموعی از آن) که در ادامه معرفی می‌شود تبدیل می‌شوند. دترمینان

$$\begin{vmatrix} A & \circ & a & b & c & d \\ \circ & A & a & b & c & d \end{vmatrix}, \tag{۱.۶}$$

را که در آن A یک ماتریس $n \times (n-۲)$ و بردارهای c, b, a و d از مرتبه‌ی $n \times ۱$ می‌باشند را در نظر بگیرید. به راحتی با استفاده از عملیات‌های سطری و ستونی مقدماتی می‌توان ثابت کرد که دترمینان (۱.۶) صفر می‌باشد. اما از طرف دیگر با استفاده از بسط لاپلاسی[24] و رابطه‌ی پلاکر [۷] می‌توان دترمینان (۱.۶) را به صورت

$$\begin{aligned} &|Aab||Acd| - |Aac||Abd| + |Aad||Abc| + |Abc||Aad| - |Abd||Aac| \\ &+|Acd||Aab| = ۲(|Aab||Acd| - |Aac||Abd| + |Aad||Abc|), \end{aligned} \tag{۲.۶}$$

را بسط داد که منظور از $|Aab|$ دترمینان ماتریس $n\times n$ حاصل از ماتریس A و بردارهای a و b می‌باشد.

[24]Laplace expansion

۷. جواب‌های رونسکینی معادله‌ی کی-پی

همان‌طوریکه در مقدمه بیان شد یکی دیگر از معادلات سولیتونی پرکاربرد معادله‌ی کی-پی می‌باشد که با

$$(u_t + ۶uu_x + u_{xxx})_x + ۳u_{yy} = ۰, \qquad (۱.۷)$$

بیان می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که معادله‌ی کی-پی (۱.۷) معادله‌ی (۱.۱) را دربرمی‌گیرد. چراکه با انتخاب تابع u تنها وابسته به متغیرهای x, t می‌توان دید که حل (۱.۷) حل (۱.۱) را نیز شامل خواهد شد. لازم به ذکر است که روش بیان شده در این مقاله با تغییراتی، قابل بکار بردن برای سایر معادلات سولیتونی از جمله معادله‌ی غیرخطی شرودینگر می‌باشد. کلیات روش برای معادله‌ی کی-پی (۱.۷) و معادله‌ی غیرخطی شرودینگر در [۵] آمده است.

در این بخش با استفاده از نتایج بخش قبل نشان خواهیم داد که جواب Nـسولیتونی حاصل از روش پراکندگی معکوس برای (۱.۷) را می‌توان بصورت یک رونسکین نمایش داد و همچنین با استفاده از مشتق (دوخطی) هیروتا نشان خواهیم داد که این جواب در (۱.۷) صدق می‌کند.

در ابتدا با جایگزینی

$$u = ۲\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\log f, \qquad (۲.۷)$$

در (۱.۷) و دو بار انتگرال‌گیری به فرم دوخطی هیروتا

$$[D_x(D_t + D_x^۳) + ۳D_y^۲]f.f = ۰,$$

خواهیم رسید که D همان نمایانگر مشتق هیروتا (۲.۳) می‌باشد.

جواب Nـسولیتونی از معادله‌ی (۱.۷) با استفاده از روش انتقال پراکندگی معکوس به‌صورت

$$f =| I + G |, \qquad (۳.۷)$$

که در آن

$$G_{ij} = \frac{a_i}{l_i + \omega_j} \exp(\Theta_i + \psi_j),$$

و

$$\Theta_i = l_i x - l_i^{۲} y - ۴ l_i^{۳} t,$$

$$\psi_j = \omega_j x + \omega_j^{۲} y - ۴\omega_j^{۳} t,$$

و l_i و ω_i و a_i که $i = ۱, ۲, \ldots, N$ ثابت‌های حقیقی غیرصفر می‌باشند مشخص می‌شود. به راحتی می‌توان دید که

$$G = AD_۱MD_۲, \tag{۴.۷}$$

که ماتریس‌های

$$A = \delta_{ij} a_i, \quad D_۱ = \delta_{ij} \exp \Theta_i, \quad D_۲ = \delta_{ij} \exp \psi_i,$$

قطری می‌باشند و

$$M = \frac{۱}{l_i + \omega_j}.$$

لازم بذکر است $D_۱$ و $D_۲$ ماتریس می‌باشند و با مشتق هیروتا معرفی شده در بخش ۳ متفاوت می‌باشند. اکنون با استفاده از نتایج بخش قبل ماتریس $V^{-۱}W$ را می‌توان به

$$V^{-۱}W = P^{-۱}MQ, \tag{۵.۷}$$

تجزیه کرد که ماتریس‌های حاضر در (۵.۷) در (۱.۵)، (۱۱.۵) و (۱۳.۵) مشخص شده‌اند. یا

$$M = PV^{-۱}WQ^{-۱}.$$

با جایگزینی M در (۳.۷) داریم

$$f = | I + AD_1 PV^{-1} WQ^{-1} D_2 | . \qquad (۶.۷)$$

با فاکتورگیری AD_1PV^{-1} از رابطه (۶.۷) می‌توان دید که

$$f = | AD_1 PV^{-1} || VP^{-1} A^{-1} D_1^{-1} + WQ^{-1} D_2 | .$$

اکنون می‌توان دید که جملات دترمینان اول یعنی $| AD_1PV^{-1} |$ همگی شامل توابعی نمایی با ضرایب ثابت می‌باشند. عبارت نمایی این توابع نمایی نیز هم‌چنین نسبت به متغیر x خطی می‌باشند. از آن‌جا که

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log[f \exp S] = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log f}{\partial x^2}, \qquad (۷.۷)$$

در صورتی که $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$ باشد می‌توان از عبارت $\exp S$ در (۷.۷) چشم‌پوشی کرد. بنابراین دیده می‌شود که عامل $| AD_1PV^{-1} |$ تاثیری در u نداشته و بنابراین می‌توان آنرا حذف کرد. یا به عبارت دیگر

$$f = | VP^{-1} A^{-1} D_1^{-1} + WQ^{-1} D_2 |, \qquad (۸.۷)$$

که با انتخاب

$$\mathcal{D}_1 = D_1 AP, \quad \mathcal{D}_2 = Q^{-1} D_2,$$

به‌صورت خلاصه‌تر

$$f = | V\mathcal{D}_1^{-1} + W\mathcal{D}_2 |,$$

نمایش داده می‌شود. در اینجا ماتریس‌های $\mathcal{D}_1$، و $\mathcal{D}_2$ ماتریس‌های قطری

$$\mathcal{D}_1 = \mathrm{diag}(a_i e^{\Theta} i \mathcal{S}_i), \quad \mathcal{D}_2 = \mathrm{diag}(\frac{e^{\psi} i}{\mathcal{G}_i}), \qquad (۹.۷)$$

می‌باشند که توابع $\mathcal{G}_i$ و S_i توابعی از پارامترهای l_i، a_i و ω_i می‌باشند. به‌عبارت دیگر f به صورت رونسکین توابع

$$\phi_i = e^{-\Theta'_i} + e^{\psi'_i}(-۱)^{i-۱}, \qquad (۱۰.۷)$$

می‌باشد که در آن

$$\Theta'_i = \Theta_i + \delta_i, \quad \psi'_i = \psi_i + \epsilon_i,$$

و

$$\delta_i = \ln[a_i \prod_{\substack{p=۱,\\ p\neq i}}^{n} (l_p - l_i)],$$

$$\epsilon_i = \ln[\prod_{p=۱}^{n} (l_p + \omega_i)].$$

اکنون رونسکین از توابع (۱۰.۷) را با نماد

$$f = (\widehat{n-۱}), \qquad (۱۱.۷)$$

که به معنای استفاده از مشتق‌های مرتبه $۰, ۱, \ldots, N-۱$ از توابع ϕ_i برای ستون‌های ماتریس می‌باشد نمایش می‌دهیم. یا به‌عبارت دیگر

$$f = \begin{bmatrix} \phi_۱ & \ldots & \phi_n \\ \phi_۱^{(۱)} & \ldots & \phi_n^{(۱)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_۱^{(n-۱)} & \ldots & \phi_n^{(n-۱)} \end{bmatrix}. \qquad (۱۲.۷)$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\frac{df}{dx}=\begin{bmatrix}\phi_۱ & \dots & \phi_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_۱^{(n-۲)} & \dots & \phi_n^{(n-۲)}\\ \phi_۱^{(n)} & \dots & \phi_n^{(n)}\end{bmatrix}=(۰,۱,۲,\dots,n-۲,n):=(\widehat{n-۲},n), \qquad (۱۳.۷)$$

و

$$\frac{d^۲f}{dx^۲}=(\widehat{n-۳},n-۱,n)+(\widehat{n-۲},n+۱), \qquad (۱۴.۷)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^۳f}{dx^۳}&=(\widehat{n-۴},n-۲,n-۱,n)+۲(\widehat{n-۳},n-۱,n+۱)\\ &\quad+(\widehat{n-۲},n+۲).\end{aligned} \qquad (۱۵.۷)$$

مثال ۱.۷. اگر

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^۲\phi_i}{\partial x^۲}, \quad \alpha=\text{عدد ثابت}, \qquad (۱۶.۷)$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\alpha[(\widehat{n-۳},n,n-۱)+(\widehat{n-۲},n+۱)]\\ &=\alpha[(\widehat{n-۲},n+۱)-(\widehat{n-۳},n-۱,n)].\end{aligned} \qquad (۱۷.۷)$$

مثال ۲.۷. اگر

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial_t}=\beta\frac{\partial^۳\phi_i}{\partial x^۳},\ \beta=\text{عدد ثابت}, \qquad (۱۸.۷)$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \beta(\widehat{n-4}, n, n-2, n-1) + (\widehat{n-3}, n+1, n-1) + (\widehat{n-2}, n+2)]\\ &= \beta(\widehat{n-4}, n-2, n-1, n) - (\widehat{n-3}, n-1, n+1) + (\widehat{n-2}, n+2)].\end{aligned} \tag{19.7}$$

در f توابع ϕ_i در روابط خطی

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + 4\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} = 0, \tag{20.7}$$

صدق می‌کنند.

اکنون قادر به نمایش

$$D_x(D_t + D_x^3) + 3D_y^2 f.f = 0, \tag{21.7}$$

بر اساس رونسکین و مشتقات آن خواهیم بود. چرا که رابطه (۲۱.۷) بر اساس مشتقات f به‌صورت

$$\begin{aligned}&2[ff_{xx} - f_xf_x + ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2 + 3(ff_{yy} - f_y^2)]\\ &= 24[(\widehat{N-1})(\widehat{N-3}, N, N+1) - (\widehat{N-2}, N)(\widehat{N-3}, N-1, N+1)\\ &+(\widehat{N-3}, N-1, N)(\widehat{N-2}, N+1)]\\ &= 12\begin{vmatrix} \widehat{N-3} & 0 & N-2 & N-1 & N & N+1 \\ 0 & \widehat{N-3} & N-2 & N-1 & N & N+1 \end{vmatrix} = 0,\end{aligned} \tag{22.7}$$

مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که در تساوی اخر از (۲.۶) و برابر با صفر بودن آن از (۱.۶) استفاده شده است. بنابراین رونسکین f در روابط دوخطی (۲۱.۷) صدق می‌کند.

۸. نتیجه گیری

در مقاله حاضر با معرفی ماتریس‌های واندرموند به کاربردی از آنها برای نمایش جواب‌های $N-$ سولیتونی یک معادله‌ی دیفرانسیل کلیدی در نظریه‌ی سولیتون بر اساس رونسکین توابعی پرداختیم. کاربرد این گونه ماتریس‌ها در نظریه‌ی سولیتون بسیار فراتر بوده و روند ارایه شده در این مقاله را با تغییراتی می‌توان برای سایر معادلات دیفرانسیل سولیتونی بکار برد.

مراجع

[1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 249–315.

[2] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1981.

[3] S. Chakravarty and Y. Kodama, Soliton solutions of the KP equation and application to Shallow water waves, ArXiv: 0902.4433 [nlin.SI].

[4] D.G. Crighton, Applications of KdV equation, *Acta Applicantae Mathematicae*, **39** (1995), 39–67.

[5] N.C. Freeman, Soliton solutions of non-linear evolution equations, *IMA J. Appl. Math.*, **32** (1984), 125–145.

[6] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.

[7] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, CAMBRIDGE University Press, 1992.

[8] J. Stoer and R.Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, 2002.

[9] J. Yang, *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2010.