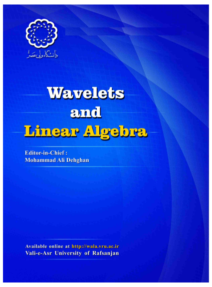
موجک‌ها و جبرخطی ۵(۳) (۱۳۹۸) ۲۷-۳۸



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی K- قاب‌های ترکیب

فهیمه عربیانی نیشابوری[آ]، علی‌اکبر عارفی‌جمال[*آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم‌کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۲ فروردین ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱۷ مرداد ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸

ادیتور رابط: فرشید عبدالهی

کلمات کلیدی:

K-قاب‌های ترکیب،
K-قاب‌های ترکیب
پارسوال، K-دوگان.

چکیده

K-قاب‌های ترکیب اخیرا به عنوان تعمیمی از K-قاب‌های گسسته معرفی شدند که می‌توانند ابزار مناسبی برای برخی مسائل در نظریه نمونه برداری باشند که با قاب‌های ترکیب پردازش می‌شوند. در این مقاله چندین تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی K-قاب‌های ترکیب و K-قاب‌های ترکیب پارسوال بدست می‌آوریم که این نتایج برخی تساوی‌ها و نامساوی‌های مهم روی قاب‌های گسسته و قاب‌های ترکیب را تعمیم و نیز بهبود می‌دهند.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: fahimeh.arabyani@gmail.com (فهیمه عربیانی نیشابوری)، arefijamaal@hsu.ac.ir (علی‌اکبر عارفی‌جمال).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.84106.1168

۱. مقدمه

نظریه قاب‌ها در فضاهای هیلبرت که ابتدا در سال ۱۹۵۲ [۱۰] معرفی شدند به دلیل کاربردی بودن در دو دهه اخیر به سرعت توسعه یافته‌اند و انواع مختلف قاب‌ها و نیز تعمیم‌های زیادی از قاب‌ها توسط محققین بیان شده است [۴، ۶، ۷، ۸، ۱۱، ۱۲]. نظریه قاب‌های ترکیب یکی از تعمیم‌های مهم قاب‌ها است که کاربردهای جالبی در پردازش شبکه‌های بی‌سیم، پردازش تصویر، فیلتر بانک‌ها و بسیاری از کاربردهای دیگر دارد که نمی‌توانند به کمک قاب‌های گسسته مدلسازی شوند [۹، ۱۷]. در سال ۲۰۰۷ هنگام کار روی الگوریتمهایی برای محاسبه بازسازی سیگنالها، برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی قاب‌های پارسوال [۵] اثبات شد. سپس این نامساوی‌ها روی برخی از قاب‌ها تعمیم داده شد [۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰]. در این مقاله این نامساوی‌ها را روی K-قاب‌ها ی ترکیب [۱] بررسی می‌کنیم که تعمیمی از قاب‌های ترکیب [۸] و نیز K-قاب‌ها ی گسسته [۲] هستند.

فرض کنید $\{W_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\{\omega_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از وزن‌ها، یعنی $\omega_i > 0, i \in I$ باشد. آنگاه $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود هر گاه ثابتهای مثبت A و B موجود باشند به طوری که

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|\pi_{W_i} f\|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad (f \in \mathcal{H}). \tag{1.1}$$

ثابتهای A و B به ترتیب کرانهای پایین و بالای K-قاب ترکیب نامیده می‌شوند و یکتا نیستند. K-قاب ترکیب W چسبان نامیده می‌شود اگر $A\|K^*f\|^2 = \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|\pi_{W_i} f\|^2$ و پارسوال نامیده می‌شود هر گاه

$$\|K^*f\|^2 = \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|\pi_{W_i} f\|^2.$$

همچنین اگر در (۱.۱) فقط کران بالا برقرار باشد، گوییم W یک دنباله بسل است. به وضوح اگر $K = I_{\mathcal{H}}$ آنگاه W یک قاب ترکیب است. مشابه قاب‌های ترکیب [۸] برای K-قاب ترکیب W نیز

می‌توان فضای زیر را در نظر گرفت

$$\sum_{i\in I}\oplus W_i=\left\{\{f_i\}_{i\in I}:f_i\in W_i,\sum_{i\in I}\|f_i\|^{2}<\infty\right\},$$

که با ضرب داخلی $\langle\{f_i\}_{i\in I},\{g_i\}_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\langle f_i,g_i\rangle$ یک فضای هیلبرت است. با این تعریف عملگر تجزیه $T_W:\sum_{i\in I}\oplus W_i\to\mathcal{H}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$T_W\left(\{f_i\}_{i\in I}\right)=\sum_{i\in I}\omega_i f_i,\qquad \left(\{f_i\}_{i\in I}\in\sum_{i\in I}\oplus W_i\right).$$

الحاقی این عملگر یعنی $T_W^*:\mathcal{H}\to\sum_{i\in I}\oplus W_i$، که عملگر آنالیز نام دارد به صورت زیر بدست می‌آید،

$$T_W^*(f)=\left\{\omega_i\pi_{W_i}(f)\right\}_{i\in I},\qquad (f\in\mathcal{H}).$$

سرانجام عملگر قاب $S_W:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ به صورت $S_Wf=\sum_{i\in I}\omega_i^{2}\pi_{W_i}f$، تعریف می‌شود که عملگری مثبت است اگر چه برخلاف عملگر قاب‌های ترکیب لزوما وارون پذیر نیست. اگر برد عملگر K بسته باشد آنگاه S_W از $R(K)$ به $S_W(R(K))$ عملگری وارون پذیر است، این مطلب برای K قاب‌های گسسته در [۱۹] و برای K قاب‌های ترکیب در [۱] بیان شده است. در سراسر این مقاله K عملگری با برد بسته فرض می‌شود و هرگاه از وارون عملگر قاب صحبت میکنیم منظور تحدید شده عملگر قاب به $R(K)$ می‌باشد.

خانواده بسل $V=\{(V_i,v_i)\}_{i\in I}$ یک K-دوگان از W نامیده می‌شود هرگاه

$$Kf=\sum_{i\in I}\omega_i v_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f,\quad (f\in\mathcal{H}).$$

برای اطلاعات بیشتر در زمینه قاب‌های ترکیب، K-قاب‌های ترکیب و نیز دوگان آنها [۱، ۸] را ببینید.

در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، I مجموعه اندیس گذار شمارا و برای هر $J\subset I$ متمم J را به وسیله J^c نشان می‌دهیم. به علاوه $I_{\mathcal{H}}$ عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ را نشان

می‌دهد. برای دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ مجموعه عملگرهای خطی کراندار بین این دو فضا را با $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ نشان داده و مجموعه $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ را به طور خلاصه به صورت $B(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. برای یک عملگر $K \in B(\mathcal{H})$ برد با $R(K)$ و عملگر شبه معکوس[1] با $K^\dagger$ نشان داده می‌شود. همچنین π_V تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ به یک زیر فضای بسته $V \subset \mathcal{H}$ است و در نهایت ما از علامتهای T_J و S_J برای مشخص کردن عملگرهای تجزیه و عملگر قابی استفاده می‌کنیم که مجموعه اندیس آنها به $J \subset I$ محدود شده است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش، چندین تساوی و نامساوی برای K-قاب‌های ترکیب و نیز K-قاب‌های ترکیب پارسوال به دست می‌آوریم. این نتایج بسیاری از نتایج مهم بدست آمده در [۳، ۱۵، ۱۶] را تعمیم می‌دهند.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ باشد و $V = \{(V_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک K-دوگان از W باشد، آنگاه برای هر $J \subseteq I$ و $f \in H$ داریم:*

$$\sum_{i\in J} \omega_i v_i \langle \pi_{W i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, Kf\rangle - \left\| \sum_{i\in J} \omega_i v_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2 =$$

$$\sum_{i\in J^C} \omega_i v_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, Kf\rangle - \left\| \sum_{i\in J^C} \omega_i v_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2$$

اثبات. فرض کنید $J \subseteq I$. عملگر خطی زیر را در نظر بگیرید

$$M_J f = \sum_{i\in J} \omega_i v_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

عملگر M_J یک عملگر خطی کراندار و خوشتعریف روی $\mathcal{H}$ است به علاوه $M_J + M_{J^C} = K$. در نتیجه می‌توان نوشت

[1] inverse pseudo

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in J}\omega_i\nu_i\langle\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f,Kf\rangle &-\left\|\sum_{i\in J}\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f\right\|^2\\
&=\left\langle\sum_{i\in J}\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f,Kf\right\rangle-\|M_Jf\|^2\\
&=\langle K^*M_Jf,f\rangle-\langle M_J^*M_Jf,f\rangle\\
&=\langle(K^*-M_J^*)M_Jf,f\rangle\\
&=\langle M_{J^c}^*(K-M_{J^c})f,f\rangle\\
&=\langle M_{J^c}^*Kf,f\rangle-\langle M_{J^c}^*M_{J^c}f,f\rangle\\
&=\langle f,K^*M_{J^c}f\rangle-\|M_{J^c}f\|^2\\
&=\langle Kf,\sum_{i\in J^c}\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f\rangle-\|M_{J^c}f\|^2\\
&=\sum_{i\in J^c}\omega_i\nu_i\langle Kf,\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f\rangle\\
&-\|\sum_{i\in J^c}\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_w^{-1})^*K\pi_{V_i}f\|^2.
\end{aligned}
$$

□

با استفاده از قضیه ۱.۲ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $W=\{(W_i,\omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ باشد و $V=\{V_i,\nu_i)\}_{i\in I}$ یک K-دوگان از W باشد. آنگاه برای هر دنباله کراندار $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ و $f\in H$ داریم*

$$
\sum_{i\in I}\alpha_i\omega_i\nu_i\langle\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f,Kf\rangle-\left\|\sum_{i\in I}\alpha_i\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-1})^*K\pi_{V_i}f\right\|^2
$$

$$= \sum_{i\in I}(۱-\overline{\alpha_i})\omega_i\nu_i\langle\pi_{W_i}(S_W^{-۱})^*K\pi_{V_i}f, Kf\rangle - \left\|\sum_{i\in I}(۱-\alpha_i)\omega_i\nu_i\pi_{R(K)}\pi_{W_i}(S_W^{-۱})^*K\pi_{V_i}f\right\|^۲.$$

در ادامه به اثبات برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی k-قاب‌های ترکیب پارسوال می‌پردازیم.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید* $W=\{(W_i,\omega_i)\}_{i\in I}$ *یک* k*-قاب ترکیب پارسوال باشد. به ازای هر* $f\in H$*،* $J\subseteq I$ *و* $E\subseteq J^c$ *داریم:*

$$\left\|\sum_{i\in J\cup E}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\right\|^۲ - \left\|\sum_{i\in J^c\setminus E}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\right\|^۲$$

$$= \left\|\sum_{i\in J}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\right\|^۲ - \left\|\sum_{i\in J^c}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\right\|^۲ + ۲Re\sum_{i\in E}\omega_i^۲\langle\pi_{W_i}f, KK^*f\rangle.$$

اثبات. با توجه به اینکه W یک K-قاب ترکیب پارسوال است، برای هر $J\subseteq I$ داریم

$$\langle(S_J+S_{J^c})f,f\rangle = \langle S_Wf,f\rangle = \|K^*f\|^۲, \quad (f\in\mathcal{H}).$$

بنابراین $S_J+S_{J^c}=KK^*$ و در نتیجه

$$S_J^۲ - S_{J^c}^۲ = S_J^۲ - (KK^*-S_J)^۲ = KK^*S_J + S_JKK^* - (KK*)^۲$$

$$= KK^*S_J - (KK^*-S_J)KK^* = KK^*S_J - S_{J^c}KK^*.$$

بنابراین برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم

$$\|S_Jf\|^۲ - \|S_{J^c}f\|^۲ = \langle KK^*S_Jf,f\rangle - \langle S_{J^c}KK^*f,f\rangle$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i\in J\cup E}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f\right\|^{۲}-\left\|\sum_{i\in J^c\setminus E}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f\right\|^{۲}\\
=\ &\left\langle KK^*\sum_{i\in J\cup E}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f,f\right\rangle-\left\langle\sum_{i\in J^c\setminus E}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}KK^*f,f\right\rangle\\
=\ &\sum_{i\in J}\omega_i^{۲}\langle\pi_{W_i}f,KK^*f\rangle-\sum_{i\in J^c}\omega_i^{۲}\langle KK^*f,\pi_{W_i}f\rangle+۲Re\sum_{i\in E}\omega_i^{۲}\langle\pi_{W_i}f,KK^*f\rangle\\
=\ &\left\|\sum_{i\in J}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f\right\|^{۲}-\left\|\sum_{i\in J^c}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f\right\|^{۲}+۲Re\sum_{i\in I}\omega_i^{۲}\langle\pi_{W_i}f,KK^*f\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل است.

□

قضیه ۴.۲. *اگر $W=\{(W_i,\omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب ترکیب پارسوال برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه برای هر $J\subseteq I$ و $f\in\mathcal{H}$*

$$Re\sum_{i\in J}\omega_i^{۲}\langle\pi_{W_i}f,KK^*f\rangle+\|\sum_{i\in J^C}\omega_i^{۲}\pi_{W_i}f\|^{۲}\geq\frac{۳}{۴}\|KK^*f\|^{۲}.$$

اثبات. دراثبات قضیه قبل مشاهده کردیم که

$$S_J^{۲}-S_{J^C}^{۲}=KK^*S_J-S_{J^C}KK^*$$

بنابراین

$$S_J^{۲}+S_{J^C}^{۲}=۲(\frac{KK^*}{۲}-S_J)^{۲}+\frac{(KK^*)^{۲}}{۲}\geq\frac{(KK^*)^{۲}}{۲}.$$

از این رو

$$\begin{aligned} KK^*S_J + S_{J^C}^۲ + (KK^*S_J + S_{J^C}^۲)^* &= KK^*S_J + S_{J^C}^۲ + S_J KK^* + S_{J^C}^۲ \\ &= KK^*(S_J + S_{J^C}) + S_J^۲ + S_{J^C}^۲ \\ &= (S_J + S_{J^C})KK^* + S_J^۲ + S_{J^C}^۲ \\ &\geq \frac{۳}{۲}(KK^*)^۲. \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$Re\sum_{i\in J}\omega_i^۲\langle \pi_{W_i}f, KK^*f\rangle + \|\sum_{i\in J^C}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\|^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}(\langle KK^*S_J f, f\rangle + \langle S_{J^C}^۲ f, f\rangle + \langle f, KK^*S_J f\rangle + \langle f, S_{J^C}^۲ f\rangle)$$

$$\geq \frac{۳}{۴}\|KK^*f\|^۲.$$

□

قضیه ۴.۲ به تعریف مفاهیم زیر منجر می‌شود که در واقع تعمیمی از مفاهیم معرفی شده در [۱۵، ۱۶] برای قاب‌های پارسوال و قاب‌های ترکیب پارسوال هستند.

فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب پارسوال ترکیب باشد آنگاه در نظر بگیرید

$$v_+(W, K, J) = \sup\left\{\frac{Re\sum_{i\in J^C}\omega_i^۲\langle \pi_{W_i}f, KK^*f\rangle + \|\sum_{i\in J}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\|^۲}{\|KK^*f\|^۲} : \quad KK^*f \neq ۰\right\},$$

$$v_-(W, K, J) = \inf\left\{\frac{Re\sum_{i\in J^C}\omega_i^۲\langle \pi_{W_i}f, KK^*f\rangle + \|\sum_{i\in J}\omega_i^۲\pi_{W_i}f\|^۲}{\|KK^*f\|^۲} : \quad KK^*f \neq ۰\right\}.$$

در ادامه ویژگی‌های این مفاهیم را برای K-قاب‌های ترکیب پارسوال بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید* $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ *یک* K*-قاب ترکیب پارسوال باشد. شرایط زیر برقرارند.*

(الف) $\frac{۳}{۴} \leq v_-(W, K, J) \leq v_+(W, K, J) \leq \|K\|\|K^\dagger\|(۱ + \|K\|\|K^\dagger\|)$

(ب) $v_+(W, K, J) = v_+(W, K, J^c)$ و $v_-(W, K, J) = v_-(W, K, J^c)$

(ج) $v_+(W, K, I) = v_-(W, K, I) = ۱$ و $v_+(W, K, \emptyset) = v_-(W, K, \emptyset) = ۱$.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف) با توجه به تعریف فقط کافی است کران بالای نامساوی را اثبات کنیم. با توجه به این که W دنباله بسل است داریم

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in J} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f\right\|^۲ &= \sup_{\|h\|=۱} \left|\left\langle \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f, h\right\rangle\right|^۲ \\
&= \sup_{\|h\|=۱} \left|\left\langle \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f, \pi_{W_i} h\right\rangle\right|^۲ \\
&\leq \sup_{\|h\|=۱} \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \|\pi_{W_i} f\|^۲ \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \|\pi_{W_i} h\|^۲ \\
&\leq \sup_{\|h\|=۱} \|K^* h\|^۲ \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \|\pi_{W_i} f\|^۲ \\
&\leq \|K\|^۲ \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \|\pi_{W_i} f\| \\
&\leq \|K\|^۲ \|K^* f\|^۲ \\
&= \|K\|^۲ \|K^\dagger K K^* f\|^۲ \\
&\leq \|K\|^۲ \|K^\dagger\|^۲ \|K K^* f\|^۲.
\end{aligned}$$

به علاوه

$$\begin{aligned} Re \sum_{i\in J^c} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle &= Re\langle \sum_{i\in J^c} \omega_i^2 \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle \\ &= Re\langle S_{J^c} f, KK^* f\rangle \\ &\leq \|S_{J^c} f\| \|KK^* f\| \\ &\leq \|K\|\, \|K^\dagger\|\, \|KK^* f\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین

$$v_-(W, K, J) \leq v_+(W, K, J) \leq \|K\|\, \|K^\dagger\|(1 + \|K\|\, \|K^\dagger\|),$$

و اثبات (الف) کامل است. از طرف دیگر بنابر اثبات قضیه ۳.۲

$$KK^* S_J - S_{J^c} KK^* = S_J^2 - S_{J^c}^2$$

در نتیجه

$$\langle S_J^2 f, f\rangle + Re\langle S_{J^c} KK^* f, f\rangle = \langle S_{J^c}^2 f, f\rangle + Re\langle KK^* S_J f, f\rangle,$$

برای هر $f \in H$. بنابراین

$$\begin{aligned} & Re \sum_{i\in J^c} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle + \| \sum_{i\in J} \omega_i^2 \pi_{W_i} f\|^2 \\ = \;& Re \sum_{i\in J} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle + \| \sum_{i\in J^c} \omega_i^2 \pi_{W_i} f\|^2, \end{aligned}$$

و این (ب) را نتیجه می‌دهد. قسمت (ج) مستقیم از تعریف با استفاده از این حقیقت که $S_W = KK^*$ اثبات می‌شود. □

با استفاده از قضیه فوق، می‌توان چند نتیجه معادل روی K-قاب‌های ترکیب پارسوال اثبات کرد.

نتیجه ۶.۲. *فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک K-قاب ترکیب پارسوال باشد، آنگاه شرایط زیر معادل اند:*

(۱) $v_+(W, K, J) = v_-(W, K, J) = ۱$.

(۲) $Re \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle = \| \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f\|^۲$.

(۳) $Re \sum_{i\in J^c} \omega_i^۲ \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle = \| \sum_{i\in J^c} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f\|^۲$.

اثبات. معادل بودن (۲) و (۳) بدیهی است. حال فرض کنید (۲) برقرار باشد، سپس

$$\begin{aligned} & Re \sum_{i\in J^c} \omega_i^۲ \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle + \| \sum_{i\in J} \omega_i^۲ \pi_{W_i} f\|^۲ \\ = \;& Re \sum_{i\in I} \omega_i^۲ \langle \pi_{W_i} f, KK^* f\rangle \\ = \;& \langle S_W f, KK^* f\rangle \\ = \;& \|KK^* f\|^۲, \end{aligned}$$

و این (۱) را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر اگر (۱) برقرار باشد به وضوح (۲) و (۳) نیز برقرار هستند. بنابراین اثبات کامل است. □

مراجع

[1] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamaal, Characterization and construction of K-fusion frames and their duals in Hilbert spaces, *Results in Mathematics*, **73**(47) (2018), https://doi.org/10.1007/s00025-018-0781-1.

[2] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamaal, Some constructions of K-frames and their duals, *Rocky Mt. J. Math.*, **47**(6) (2017), 1749–1764.

[3] F. Arabyani Neyshaburi, Gh. Mohajeri Minaei and E. Anjidani, On some equalities and inequalities for K-frames, *Indian journal of pure and applied mathematics*, To appear.

[4] R. Balan, P.G. Casazza and D. Edidin, On signal reconstruction without phase, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **20** (2006), 345–356.

[5] R. Balan, P.G. Casazza, D. Edidin and G. Kutyniok, A new identity for Parseval frames, *Proc. Am. Math. Soc.*, **135** (2007), 1007–1015.

[6] H. Bolcskel, F. Hlawatsch and H.G Feichtinger, Frame-theoretic analysis of oversampled filter banks, *IEEE Trans. Signal Process.*, **46** (1998), 3256–3268.

[7] P.G. Casazza, The art of frame theory, *Taiwanese J. Math.*, **4**(2) (2000), 129–202.

[8] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, *Contemp. Math.*, **345** (2004), 87–114.

[9] P.G. Casazza, G. Kutyniok and S. Li, Fusion frames and distributed processing, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **25**(1) (2008), 114–132.

[10] R. Duffin and A. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.

[11] H.G. Feichtinger and K. Grochenig, Irregular sampling theorems and series expansion of band-limited functions, *Math. Anal. Appl.*, **167** (1992), 530–556.

[12] H.G. Feichtinger and T. Werther, Atomic systems for subspaces, in: L. Zayed(Ed.), *proceedings SampTA. Orlando*, FL, (2001), 163–165.

[13] P. Găvruţa, On the duality of fusion frames, *J. Math. Anal. Appl.*, **333**(2) (2007), 871–879.

[14] L. Găvruţa, Frames for operators, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **32** (2012), 139–144.

[15] P. Găvruţa, On some identities and inequalities for frames in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **321** (2006), 467–478.

[16] Q. Guo, J. Leng and H. Li, Some equalities and inequalities for fusion frames, *SpringerPlus*, **121**(5) (2016), 1–10.

[17] S.S. Iyengar, R.R. Brooks, *Distributed Sensor Networks*, Chapman, Boston Rouge, La, USA, 2005.

[18] X. Xiao, Y. Zhu and M. Ding, Erasures and equalities for fusion frames in Hilbert spaces, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **38**(3) (2015), 1035–1045.

[19] X.C. Xiao, Y.C. Zhu and L. Găvruţa, Some properties of K-frames in Hilbert spaces, *Results. Math.*, **63** (2013), 1243–1255.

[20] X. Zhu and G. Wu, A note on some equalities for frames in Hilbert spaces, *Appl. Math. Lett.*, **23**(7) (2010), 788–790.