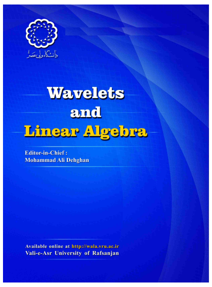
موجک‌ها و جبرخطی ۴(۳) (۱۳۹۷) ۱۴۸-۹۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

مقدمه‌ای مختصر بر ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی و گروه‌های کران‌دار ماتریس‌های کواترنیونی

الهه نجفی[آ]، بامداد یاحقی[*آ]

[آ] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

پیشکش یاد و خاطرهٔ مریم میرزاخانی، که ستاره‌ای تابان ولی کوتاه‌درخش، و پاک و صافی، و از عاشقان بود.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۸ تیر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:

کواترنیون‌ها، ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی، گروه‌های کران‌دار ماتریسی.

چکیده

حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها به عنوان تنها حلقهٔ تقسیم جبری ناجابه‌جایی روی میدان اعداد حقیقی از اهمیت به سزایی برخوردار است. در این مقاله، نخست مقدمه‌ای مختصر بر ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی ارائه می‌دهیم، که ما را در پرداختن به گزارهٔ اصلی مقاله یاری خواهد کرد. گزارهٔ اصلی مقاله روایت کواترنیونی قضیه‌ای از هرمان آوئرباخ[۱] است. به عبارت دقیق، ثابت می‌کنیم هر گروه کران‌دار از ماتریس‌ها با درایه‌های کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است.

۱. مقدمه

کواترنیون‌ها در سال ۱۸۴۳ توسط ویلیام همیلتون[۲]، ریاضی‌دان ایرلندی، کشف یا ابداع شدند. سابقهٔ مطالعه و پژوهش در زمینهٔ ماتریس‌های کواترنیونی دست کم به مقالهٔ ولف[۳] به سال ۱۹۳۶ [۱۵] برمی‌گردد. برای فهرستی مبسوط پیرامون پیشینهٔ پژوهش‌ها دربارهٔ کواترنیون‌ها و ماتریس‌های کواترنیونی خواننده را به منبع [۱۴] و مراجع آن ارجاع می‌دهیم.

این مقاله شامل دو بخش عمده است. در بخش عمدهٔ نخست، متشکل از بخش‌های دوم تا هشتم، مقدمه‌ای مختصر از کواترنیون‌ها، ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی ارائه خواهد شد. به طور کلی، در این مقاله گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها، و جبرهایی از این ماتریس‌ها در نظر گرفته می‌شوند و نیز ویژگی‌هایی از آنها بررسی می‌شوند. بخش مقدمهٔ نخست، به طور کلی از مرجع یا مراجعی کپی‌برداری نشده است. هر چند مطالب ارائه شده در بخش‌های دوم تا هشتم استاندارد هستند، اما برخی گزاره‌ها و نیز، بعضا، برخی برهان‌ها و همچنین سبک ارائهٔ مطلب در این بخش تازگی دارند. در بخش عمدهٔ دیگر، متشکل از بخش‌های نهم و دهم، روایت کواترنیونی قضیه‌ای از هرمان آوئرباخ ارائه خواهد شد. به زبان دقیق، روایت کواترنیونی قضیهٔ آوئرباخ حکم می‌کند که هر گروه کران‌دار از ماتریس‌های کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است. برهان قضیهٔ آوئرباخ، که در این مقاله بدان پرداخته می‌شود، با الهام از برهان‌های ارائه شده در [۶] و [۱۳، قضیهٔ ۵.۱.۳] است. شایان گفتن است که برهان مبسوط قضیهٔ آوئرباخ، ارائه شده برای گروه‌های ماتریس‌های مختلط، در [۱۳، قضیهٔ ۵.۱.۳] خود با الهام از برهان پرداخته شده در [۶] است. برای روایتی نامتناهی‌بعد از قضیهٔ آوئرباخ در چارچوب فضاهای هیلبرت نه لزوما متناهی‌بعد به [۳، لم ۱، صفحهٔ ۵۴] رجوع کنید.

۲. حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها

---

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: elanajafi17@yahoo.com (الهه نجفی)، bamdad5@hotmail.com (بامداد یاحقی).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.85963.1170

[2] William R. Hamilton

[3] L.A. Wolff

حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها به طور صوری به صورت

$$\left\{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^{2} = j^{2} = k^{2} = ijk = -1\right\}$$

تعریف می‌شود و با $\mathbb{H}$ نمایش داده می‌شود. به افتخار زحمات ویلیام همیلتون که اولین بار کواترنیون‌ها را تعریف کرد، برای نمایش کواترنیون‌ها حرف $\mathtt{H}$ را به کار می‌برند. به آسانی بررسی می‌شود که $\mathbb{H}$ یک جبر چهاربعدی یک‌دار روی $\mathbb{R}$ است که عمل ضرب در آن ناجابه‌جایی است. هر کواترنیون $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ را می‌توان به صورت $x = \mathtt{Re}(x) + \mathtt{Im}(x)$ نوشت، که در آن $\mathtt{Re}(x) := x_0$ قسمت حقیقی x و $\mathtt{Im}(x) := x_1 i + x_2 j + x_3 k$ قسمت موهومی x نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۲. مزدوج[4] کواترنیون x را با $\overline{x}$ نمایش می‌دهیم و بنا به تعریف $\overline{x} := \mathtt{Re}(x) - \mathtt{Im}(x)$. نرم کواترنیون x را با $|x|$ نشان داده شده و بنا به تعریف توسط $|x| := \sqrt{\overline{x}x}$ تعریف می‌شود.

توجه کنید به ازای هر $x, y \in \mathbb{H}$، به راحتی می‌توان نشان داد $\overline{\overline{x}} = x$، $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$، $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$، $|xy| = |x||y|$، و $|x|^{2} = x\overline{x} = \overline{x}x$، و لذا $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^{2}}$ به ازای هر $x \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$. برای دیدن چند ویژگی دیگر کواترنیون‌ها، خواننده را به [۱۴، گزارهٔ ۴.۱.۲] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. دو عضو $x, y \in \mathbb{H}$ مشابه[5] گفته می‌شود هر گاه یک $a \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ موجود باشد که $axa^{-1} = y$. برای تشابه بین x, y نماد $x \sim y$ را به کار می‌بریم. حال فرض کنید $x \in \mathbb{H}$. به مجموعهٔ متشکل از axa^{-1}ها که $a \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$، مدار تشابهی[6] x گوییم و آن را با $\mathtt{Sim}(x)$ نمایش می‌دهیم. به طور کلی، اگر $S \subseteq \mathbb{H}$، بنا به تعریف

$$\mathtt{Sim}(S) := \left\{a^{-1}pa : a \in a \in \mathbb{H}\backslash\{0\},\ p \in S\right\} = \bigcup_{p \in S} \mathtt{Sim}(p).$$

روشن است که $axa^{-1} = y$ اگر و تنها اگر $bxb^{-1} = y$، که در آن $b = |a^{-1}|a$. ولی $|b| = 1$، و به طور معادل $b^{-1} = \overline{b}$. در نتیجه $\mathtt{Sim}(x) = \left\{bxb^{-1} :\ b \in \mathbb{H}\backslash\{0\},\ b^{-1} = \overline{b}\right\}$.

---
[4] Conjugate
[5] Similar
[6] Similarity orbit

توجه کنید که تشابه کواترنیونی یک رابطهٔ هم‌ارزی است. در لم زیر به بیان قسمت‌هایی از [۱۴، قضیهٔ ۶.۲.۲]، ولی با برهانی متفاوت، می‌پردازیم. لم زیر توصیفی از کواترنیون‌های مشابه و مدار تشابهی کواترنیون‌ها به دست می‌دهد.

لم ۳.۲. *فرض کنید $x, y \in \mathbb{H}$. در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(i) $y \in Sim(x)$ *اگر و تنها اگر* $Re(x) = Re(y)$ *و* $|Im(x)| = |Im(y)|$.

(ii) $Sim(x) = Re(x) + |Im(x)|S$ *که در آن*

$$S := \left\{q \in \mathbb{H} :\ |q| = ۱,\ Re(q) = ۰\right\} = \left\{q \in \mathbb{H} :\ q^{۲} = -۱\right\}.$$

به علاوه،

$$S = Sim(S) = Sim(i) = Sim(p),$$

به ازای هر $p \in S$.

(iii) به ازای هر $x \in \mathbb{H}$*، عضو یکتای* $y \in Sim(x) \cap \mathbb{C}_+$ *موجود است، که در آن* $\mathbb{C}_+$ *بستار نیم‌صفحهٔ بالایی صفحهٔ مختلط است.*

اثبات. (i) فرض کنید $y \in \mathrm{Sim}(x)$. پس $a \in \mathbb{H}\backslash\{۰\}$ موجود است به طوری که $y = axa^{-۱}$ و $a^{-۱} = \overline{a}$. بنابراین،

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(y) &= \frac{axa^{-۱} + \overline{axa^{-۱}}}{۲} \\ &= a(\frac{x + \overline{x}}{۲})a^{-۱} \\ &= a\mathrm{Re}(x)a^{-۱} = \mathrm{Re}(x). \end{aligned}$$

سپس داریم

$$\begin{aligned} \mathtt{Im}(y) &= \frac{axa^{-۱} - \overline{axa^{-۱}}}{۲} \\ &= a(\frac{x-\overline{x}}{۲})a^{-۱} \\ &= a\mathtt{Im}(x)a^{-۱}. \end{aligned}$$

در نتیجه، $|\mathtt{Im}(y)| = |\mathtt{Im}(x)|$. حال برعکس، فرض کنید $\mathtt{Re}(x) = \mathtt{Re}(y)$ و $|\mathtt{Im}(x)| = |\mathtt{Im}(y)|$. اگر $|\mathtt{Im}(x)| = ۰$، آنگاه حکم واضح است. پس فرض کنید $|\mathtt{Im}(x)| \neq ۰$. داریم $x = \mathtt{Re}(x) + \mathtt{Im}(x)$، $y = \mathtt{Re}(y)+\mathtt{Im}(y)$ و $\mathtt{Re}(x) = \mathtt{Re}(y)$. پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $\mathtt{Im}(x) \sim \mathtt{Im}(y)$، یا به طور معادل، نشان دهیم $|\mathtt{Im}(x)|\frac{\mathtt{Im}(x)}{|\mathtt{Im}(x)|} \sim |\mathtt{Im}(y)|\frac{\mathtt{Im}(y)}{|\mathtt{Im}(y)|}$. بنا بر $|\mathtt{Im}(x)| = |\mathtt{Im}(y)|$، کافی است $\frac{\mathtt{Im}(x)}{|\mathtt{Im}(x)|} \sim \frac{\mathtt{Im}(y)}{|\mathtt{Im}(y)|}$ را ثابت کنیم. از طرفی، طول طرفین تشابه مذکور برابر با یک است. پس بنا بر ویژگی تعدی رابطهٔ تشابه، کافی است ثابت کنیم هر یک از طرفین این تشابه با i مشابه است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم

$$a = a_۱ i + a_۲ j + a_۳ k \sim i$$

هر گاه $|a| = a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ = ۱$. حال $q = q_۰ + q_۱ i + q_۲ j + q_۳ k$ با $|q| = ۱$، به طور معادل $q^{-۱} = \overline{q}$، را طوری می‌یابیم که رابطهٔ $a = qiq^{-۱} = qi\overline{q}$ برقرار باشد. حال با توجه به برابری

$$a_۱ i + a_۲ j + a_۳ k = (q_۰ + q_۱ i + q_۲ j + q_۳ k)i(q_۰ - q_۱ i - q_۲ j - q_۳ k),$$

معادلات زیر را داریم

$$\begin{aligned} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 &= 1,\\ q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 &= a_1,\\ q_0q_3+q_1q_2 &= \frac{1}{2}a_2,\\ q_1q_3-q_0q_2 &= \frac{1}{2}a_3. \end{aligned}$$

با فرض $a_1 \neq -1$، به روشنی $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$، که در آن

$$q_0 = 0,\ q_1 = \sqrt{\frac{1+a_1}{2}},\ q_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}},\ q_3 = \frac{a_3}{2\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}},$$

یک جواب معادلهٔ $a = qi\overline{q}$ با شرط $q^{-1} = \overline{q}$ است. حال اگر $a_1 = -1$، از آنجا که $|a| = 1$، پس داریم $a_2^2 + a_3^2 = 0$. در نتیجه، $a_2 = a_3 = 0$. و در این حالت معادلهٔ $-i = qiq^{-1}$ دارای جواب $q = j$ است.

(ii) قرار دهید

$$S := \left\{q \in \mathbb{H} :\ |q| = 1,\ \mathtt{Re}(q) = 0\right\},\ S_1 := \left\{q \in \mathbb{H} :\ q^2 = -1\right\}.$$

نخست نشان می‌دهیم $S = S_1$. برای این منظور، فرض کنید $q \in S$ عضوی دلخواه باشد. لذا $|q| = 1,\ \mathtt{Re}(q) = 0$. با توجه به اینکه $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$، داریم $q^{-1} = \overline{q} = -\mathtt{Im}(q) = -q$. پس $q^2 = -1$ و $q \in S_1$. حال فرض کنید $q \in S_1$ عضوی دلخواه باشد. در نتیجه داریم $|q| = 1$ ،$q^{-1} = -q$. سپس با توجه به رابطهٔ $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$، داریم $-q = q^{-1} = \overline{q}$. این به روشنی ایجاب می‌کند $\mathtt{Re}(q) = 0$، و لذا $q \in S$. بنابراین $S = S_1$. حال نشان می‌دهیم

$$\mathtt{Sim}(x) = \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|S.$$

توجه کنید اگر $\mathtt{Im}(x) = 0$، آنگاه حکم واضح است. فرض کنید $\mathtt{Im}(x) \neq 0$ و $y \in \mathtt{Sim}(x)$ عضوی دلخواه باشد. سپس $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ موجود است به طوری که $y = a^{-1}xa$. حال داریم

$$\begin{aligned} y &= a^{-1}(\mathtt{Re}(x) + \mathtt{Im}(x))a \\ &= \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|\frac{a^{-1}\mathtt{Im}(x)a}{|\mathtt{Im}(x)|} \\ &= \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|q, \end{aligned}$$

که در آن $q = \frac{a^{-1}\mathtt{Im}(x)a}{|\mathtt{Im}(x)|}$. بنابراین $|q| = 1$ و $\mathtt{Re}(q) = 0$. پس $q \in S$. این نتیجه می‌دهد که

$$\mathtt{Sim}(x) \subseteq \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|S.$$

حال برای اثبات عکس رابطهٔ شمول مذکور، فرض کنید $y = \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|q$، که در آن $q \in S$. در نتیجه، می‌توان نوشت $\mathtt{Re}(y) + \mathtt{Im}(y) = \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|q$. بنابراین $\mathtt{Re}(x) = \mathtt{Re}(y)$ و $|\mathtt{Im}(x)| = |\mathtt{Im}(y)|$. حال بنا بر (i)، داریم $y \in \mathtt{Sim}(x)$. این نتیجه می‌دهد که

$$\mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|S \subseteq \mathtt{Sim}(x).$$

(iii) فرض کنید $y = \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|i$. حال بنا بر (ii)، $y \in \mathtt{Sim}(x)$. همچنین $y \in \mathbb{C}_+$. برای اثبات یکتایی y، فرض کنید $y_1, y_2 \in \mathtt{Sim}(x) \cap \mathbb{C}_+$ موجودند. بنا بر (ii)، $\mathtt{Re}(y_1) = \mathtt{Re}(x) = \mathtt{Re}(y_2)$ و $|\mathtt{Im}(y_1)| = |\mathtt{Im}(x)| = |\mathtt{Im}(y_2)|$. در نتیجه، داریم

$$\mathtt{Sim}(y_1) = \mathtt{Sim}(x) = \mathtt{Sim}(y_2),$$

و $y_1, y_2 \in \mathbb{C}_+$. بنابراین $y_1 = \mathtt{Re}(x) + |\mathtt{Im}(x)|i = y_2$. □

گزارهٔ زیر نتیجه‌ای سرراست و مفید از لم بالاست.

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$. در این صورت معادلهٔ $p^{۲} - ۲ap + b = ۰$ در کواترنیون‌ها بسته اینکه به ترتیب $a^{۲} - b > ۰$، $a^{۲} - b = ۰$، یا $a^{۲} - b < ۰$، دارای دو جواب حقیقی $a \pm \sqrt{a^{۲} - b}$، یک جواب حقیقی a، یا بینهایت جواب کواترنیونی*

$$a + \sqrt{b - a^{۲}}S = \mathit{Sim}(a + i\sqrt{b - a^{۲}})$$

است، که در آن

$$S = \mathit{Sim}(i) = \left\{q \in \mathbb{H} :\ |q| = ۱,\ \mathit{Re}(q) = ۰\right\} = \left\{q \in \mathbb{H} :\ q^{۲} = -۱\right\}.$$

به علاوه، هر دو جواب کواترنیونی و ناحقیقی هر معادلهٔ درجهٔ دوم کواترنیونی با ضرایب حقیقی مشابه هستند.

اثبات. در سایهٔ لم بالا، حکم نتیجه‌ای سرراست از اتحاد

$$p^{۲} - ۲ap + b = (p - a)^{۲} - (a^{۲} - b)$$

است. $\square$

۳. ماتریس‌ها و تعبیر عملگری آنها

در این بخش، ابتدا به معرفی حلقهٔ ماتریس‌ها با درایه‌ها در یک حلقهٔ تقسیم دلخواه می‌پردازیم. سپس به طور خاص، آن را برای ماتریس‌ها با درایه‌های کواترنیونی در نظر می‌گیریم. همچنین حلقهٔ عملگرهای خطی روی فضاهای برداری روی حلقه‌های تقسیم را نیز معرفی خواهیم کرد.

فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم دلخواه باشد. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌ها در D را با $\mathtt{M}_{m\times n}(D)$ نمایش می‌دهیم، که تحت جمع معمولی ماتریسی یک گروه آبلی است. بنا به تعریف

$$D^{n} := \mathtt{M}_{n\times ۱}(D),\ D_{n} := \mathtt{M}_{۱\times n}(D).$$

مجموعه‌های D^n و D_n، به طور طبیعی به همراه جمع برداری و ضرب اسکالر در ماتریس‌های ستونی و سطری، به ترتیب، فضاهای برداری راست و چپ با بعد n روی D هستند. به طور مرسوم، ترانهادهٔ ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathtt{M}_{m\times n}(D)$ با A^t نشان داده و بنا به تعریف $A^t = (a^t_{ij}) := (a_{ji}) \in \mathtt{M}_{n\times m}(D)$. نیز یاد آور می‌شویم که به ازای هر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ در $\mathtt{M}_{n\times m}(D)$، بنا به تعریف داریم

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathtt{M}_{n\times m}(D).$$

حال اگر $m = n$، مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$، یا از اندازهٔ n، با درایه‌ها در D را با $\mathtt{M}_n(D)$ نمایش می‌دهیم، که تحت جمع معمولی ماتریسی به صورت بالا و ضرب ماتریس‌ها به صورت زیر یک حلقه است. به ازای هر $A = (a_{ik})$ و $B = (b_{kj})$ در $\mathtt{M}_n(D)$،

$$AB = (a_{ik})(b_{kj}) := (c_{ij}) \in \mathtt{M}_n(D),$$

که در آن $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. به روشنی، $\mathtt{M}_{n\times m}(D)$ یک $\mathtt{M}_m(D)$-مدول راست و $\mathtt{M}_n(D)$-مدول چپ با جمع و ضرب ماتریسی است و $\mathtt{M}_n(D)$ یک $\mathtt{M}_n(D)$-مدول دوطرفه است. این روشن می‌کند که چرا D^n و D_n، به ترتیب، فضاهای برداری راست و چپ روی D هستند. به ویژه، در حالتی که $D = \mathbb{H}$، مجموعه‌های $\mathbb{H}^n$ و $\mathbb{H}_n$، را، به ترتیب، به عنوان فضاهای برداری راست و چپ روی $\mathbb{H}$ در نظر می‌گیریم و به آنها فضاهای برداری کواترنیونی استاندارد می‌گوییم. تمامی مفاهیم پایه‌ای که در فضاهای مختلط، مانند فضای استاندارد مختلط $\mathbb{C}^n$، تعریف می‌شوند، مانند مفاهیم استقلال و وابستگی خطی، زیرفضا، مجموعهٔ مولد یک زیرفضا، پایه، بعد، جمع مستقیم و غیره را می‌توان در فضاهای برداری کواترنیونی، به ویژه در فضاهای استاندارد کواترنیونی $\mathbb{H}^n$ و $\mathbb{H}_n$، نیز تعریف کرد. در سراسر این مقاله منظور از $\mathbb{F}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، یا $\mathbb{H}$ است. توجه کنید که مجموعهٔ $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ تحت جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهد. به طور مرسوم، نماد $\mathtt{GL}_n(\mathbb{H})$ را برای نمایش ماتریس‌های وارون‌پذیر در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ به کار می‌بریم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathtt{M}_{m\times n}(\mathbb{H})$. ماتریس الحاقی A[7] را به صورت $(\overline{a_{ji}})$ در

---
[7] Adjoint of A

$\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{H})$ تعریف می‌کنیم و با A^* نمایش می‌دهیم. به ویژه به ازای $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^n$، بنا به تعریف، داریم $v^* := \begin{bmatrix} \overline{v}_1 & \cdots & \overline{v}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_n$.

به طور مرسوم، به ازای فضای برداری راست داده شدهٔ V روی یک حلقهٔ تقسیم D، مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی یا عملگرهای خطی راست $T : V \to V$ با $\mathcal{L}(V)$ نشان داده می‌شود، که تحت جمع معمولی عملگرهای خطی تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد. می‌توان دید $\mathcal{L}(V)$ تحت جمعِ عملگری و ترکیب عملگرهای خطی یک حلقه است. به ویژه، اگر $D = \mathbb{H}$، مجموعهٔ $\mathcal{L}(\mathbb{H}^n)$ تحت جمع معمولی عملگرهای خطی و ترکیب عملگرهای خطی تشکیل یک حلقه می‌دهد. به طور طبیعی، اگر V یک فضای برداری چپ روی یک حلقهٔ تقسیم D باشد، می‌توان $\mathcal{L}(V)$ را تعریف کرد.

تعریف ۲.۳. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$ یک پایهٔ مرتب برای فضای برداری راست V باشد. به ازای هر بردار $v \in V$، اسکالرهای یگانهٔ $x_1, \dots, x_n \in D$ موجودند که $v = \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n$. به بردار $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D^n$ مختصات v نسبت به پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ گوییم و آن را با $[v]_{\mathcal{B}}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ مرتب برای فضای برداری راست V باشد. در این صورت به ازای هر تبدیل خطی $T \in \mathcal{L}(V)$، ماتریس یکتای $A \in \mathrm{M}_n(D)$ موجود است که به ازای هر $v \in D^n$،

$$[Tv]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}.$$

ماتریس A را نمایش ماتریسی یا ماتریس نمایش T[8] نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ گوییم و آن را با $[T]_{\mathcal{B}}$ نشان می‌دهیم. همچنین، به طور طبیعی، هر ماتریس A در $\mathrm{M}_n(D)$، یک تبدیل خطی روی D^n القا می‌کند که با T_A نشان داده می‌شود و توسط $T_A X = AX$ روی D^n تعریف می‌شود. اغلب برای راحتی،

[8] Matrix representation of T

T_A را با A نیز نمایش می‌دهیم زیرا ماتریس نمایش T_A نسبت به پایهٔ مرتب استاندارد D^n همان ماتریس A است. بنا بر گزاره‌ای استاندارد، با تثبیت یک پایهٔ مرتب برای D^n، مثلا پایهٔ مرتب استاندارد D^n، نگاشتی که هر تبدیل خطی را به ماتریس نمایش آن را نسبت به آن پایه می‌برد، نگاشتی یک‌به‌یک، پوشا، و حافظ جمع و ضرب است. از این رو، به ویژه با تثبیت پایهٔ مرتب استاندارد برای D^n، اعضای $\mathcal{L}(D^n)$ را به طور طبیعی با اعضای $\mathrm{M}_n(D)$ یکی می‌گیریم. همچنین شایان گفتن است که قضایای استاندارد جبر خطی مربوط به ماتریس‌های تغییر مختصات پایه‌های فضاهای برداری متناهی‌بعد روی حلقه‌های تقسیم، به ویژه در موارد D^n و $\mathbb{H}^n$، و نیز ارتباط نمایش ماتریسی تبدیلات خطی نسبت به پایه‌های متمایز فضاهای برداری راست متناهی‌بعد در $\mathcal{L}(D^n)$، و به ویژه در $\mathcal{L}(\mathbb{H}^n)$، به همان شکل استانداردشان بر حسب تبدیلات تشابهی برقرارند.

۴. فضاهای ضرب داخلی کواترنیونی و فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت

در این بخش، فضاهای ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) کواترنیونی را تعریف می‌کنیم. سپس گزارهٔ استاندارد فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت را ارائه خواهیم داد.

تعریف ۱.۴. فرض کنید V یک فضای برداری راست روی $\mathbb{H}$ باشد. نگاشت

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{H}$$

را یک ضرب داخلی راست روی V گوییم هر گاه به ازای هر $v, w, z \in V$ و $\alpha \in \mathbb{H}$ داشته باشیم:

(۱) $\langle v, v \rangle \geq 0$ و تساوی برقرار باشد اگر و تنها اگر $v = 0$.

(۲) $\langle v\alpha, w \rangle = \langle v, w \rangle \alpha$.

(۳) $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$.

(۴) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

به فضای V همراه با ضرب داخلی راست $\langle .,. \rangle$ روی V، یک فضای ضرب داخلی راست روی V[۹]

[9] Inner product space over $\mathbb{H}$

گوییم. به طور طبیعی، می‌توان فضاهای ضرب داخلی چپ کواترنیونی را تعریف کرد.

برای مثال، V را فضای برداری راست $\mathbb{H}^n$ بگیرید. به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت

$$\langle .,. \rangle : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H},\ \langle x, y \rangle := y^* x,\ (x, y \in \mathbb{H}^n)$$

یک ضرب داخلی راست روی $\mathbb{H}^n$ است، که به آن ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{H}^n$ می‌گوییم. همچنین $\mathbb{H}_n$ به همراه نگاشت

$$\langle .,. \rangle : \mathbb{H}_n \times \mathbb{H}_n \to \mathbb{H},\ \langle x, y \rangle := x y^*,\ (x, y \in \mathbb{H}_n)$$

یک ضرب داخلی چپ روی $\mathbb{H}_n$ است. به این ضرب داخلی، ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{H}_n$ می‌گوییم.

در این نقطه خوب است دو مطلب کاملا استاندارد مربوط به فضاهای ضرب داخلی کواترنیونی را یادآوری کنیم. نخست اینکه، همانند فضاهای ضرب داخلی حقیقی و مختلط، در هر فضای ضرب داخلی کواترنیونی $(V, \langle .,. \rangle)$ نابرابری زیر، معروف به نابرابری کوشی-بونیاکوفسکی-شوارتس، برقرار است.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle},\ (x, y \in V),$$

و در آن تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر مجموعهٔ $\{x, y\}$ وابستهٔ خطی باشد. یک نتیجهٔ آنی نابرابری کوشی-بونیاکوفسکی-شوارتس مطلب استاندارد دیگر زیر است. اینکه نگاشت $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ تعریف‌شده توسط $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ روی فضای ضرب داخلی کواترنیونی دادهشدهٔ $(V, \langle .,. \rangle)$ یک نرم روی V القا می‌کند، که به آن نرم ناشی از ضرب داخلی V می‌گویند. فضاهای ضرب داخلی که با آنها در این مقاله سر و کار داریم همگی متناهی‌بعد هستند. در نتیجه متریک القاشده از نرم ناشی از ضرب داخلی روی هر چنین فضایی همواره کامل است، و لذا چنین فضاهایی هیلبرت هستند. نیز خوب است یادآور شویم که اگر V یک فضای ضرب داخلی (و به طور کلی نرم‌دار) متناهی‌بعد باشد و $T \in \mathcal{L}(V)$، آنگاه T پیوسته است و به علاوه

$$\|.\| : \mathcal{L}(V) \to [\circ, +\infty),\ \|T\| := \sup_{\|x\| \leq ۱} \|Tx\|,$$

یک نرم، موسوم به نرم عملگری، روی $\mathcal{L}(V)$ تعریف می‌کند. توجه کنید که اگر V یک فضای ضرب داخلی (و به طور کلی نرم‌دار) متناهی‌بعد کواترنیونی باشد، آنگاه $\mathcal{L}(V)$ به همراه نرم عملگری یک فضای نرم‌دار حقیقی کامل (باناخ) است. به سادگی می‌توان دید که یک عملگر خطی روی یک فضای نرم‌دار دلخواه، نه لزوما متناهی‌بعد، پیوسته است اگر و تنها اگر نرم عملگری آن متناهی باشد. از این رو، معمول است که عملگرهای خطی و پیوسته روی یک فضای نرم‌دار را عملگرهای خطی و کران‌دار می‌نامند.

همچنین، از جمله گزاره‌های استاندارد نظریهٔ فضاهای هیلبرت (ضرب داخلی کامل) کواترنیونی که می‌توان از آنها یاد کرد قضایای بهترین تقریب[10] و نمایش ریس[11] هستند. نتیجهٔ سرراستی از این قضایای استانداردِ نظریهٔ فضاهای هیلبرت این امکان را می‌دهد که به ازای هر عملگر خطی کران‌دار داده شدهٔ $T \in \mathcal{L}(V)$ عملگر الحاقی آن، نشان داده شده توسط $T^* \in \mathcal{L}(V)$، را تعریف کرد. می‌توان دید به ازای $T \in \mathcal{L}(V)$ دلخواه و داده شده، $T^* \in \mathcal{L}(V)$ از طریق رابطهٔ

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \ \ (x, y \in V)$$

به طور یگانه معین می‌شود. یادآور می‌شویم که برای ما عملگرهای خطی با عملگرهای خطی و کران‌دار یکی هستند زیرا تنها با فضاهای متناهی‌بعد سروکار داریم.

از دیگر گزاره‌های کلاسیک نظریهٔ فضاهای ضرب داخلی کواترنیونی قضیهٔ فرایند متعامدسازی گرام–اشمیت[12] است، که برهانی استاندارد از آن را در زیر ارائه می‌دهیم. برای این منظور، به طور طبیعی، به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۲.۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ روی $\mathbb{H}$ باشد. بردارهای $x, y \in V$ را متعامد خوانیم هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$. زیرمجموعهٔ $S \subseteq V$ را متعامد یکه خوانیم هرگاه $\langle x, y\rangle = \delta_{x,y}$، که در آن δ نشانگر δی کرونکر روی زیرمجموعهٔ S است.

گزاره ۳.۴. *(**فرایند متعامدسازی گرام–اشمیت**) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) روی $\mathbb{H}$ باشد. فرض کنید $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از بردارهای مستقل خطی در V باشد. در*

[10] The best approximation theorem
[11] The Riesz representation theorem for bounded linear functionals
[12] The Gram-Schmidt orthogonalization process

این صورت یک دنبالهٔ متعامد یکه $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ *در* V *موجود است به طوری‌که به ازای هر* $n \in \mathbb{N}$*، داریم*

$$span_{\mathbb{H}}\{v_1, \ldots, v_n\} = span_{\mathbb{H}}\{u_1, \ldots, u_n\}.$$

به علاوه، اگر $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ *دنباله‌ای متعامد یکه در* V *باشد به طوری‌که به ازای هر* $n \in \mathbb{N}$ *داشته باشیم*

$$span_{\mathbb{H}}\{v_1, \ldots, v_n\} = span_{\mathbb{H}}\{w_1, \ldots, w_n\},$$

آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$*، اسکالر با طول واحد* c_n *موجود است به طوری‌که* $w_n = u_n c_n$ *(به ترتیب:* $w_n = c_n u_n$*).*

اثبات. برهان را برای فضاهای ضرب داخلی راست می‌نویسیم. به روشنی، برهان در حالت فضاهای ضرب داخلی چپ به طور مشابه انجام می‌شود. نخست تعریف کنید $u_1 = v_1\|v_1\|^{-1}$. سپس به ازای هر $n \geq 2$، بردارهای u_n را به صورت زیر تعریف کنید

$$\widehat{u_n} := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} u_i\langle v_n, u_i\rangle, \ \ u_n := \widehat{u_n}\|\widehat{u_n}\|^{-1}.$$

روشن است که به ازای هر $k \geq 1$، داریم $\|u_k\| = 1$. حکم نخست را با نشان دادن اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ متعامد یکه است و اینکه

$$\mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \ldots, u_n\}$$

ثابت می‌کنیم. این حکم اخیر را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به ازای $n = 1$ بدیهی است. حکم را برای $n - 1$ فرض کنید. آن را برای n ثابت می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ متعامد یکه است، با توجه به فرض استقرا، کافی است ثابت کنیم

$$\langle u_n, u_l\rangle = 0,$$

به ازای هر $1 \leq l < n$. برای این منظور، به ازای هر $1 \leq l < n$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u_n}, \widehat{u_l} \rangle &= \Big\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \widehat{u_l} \Big\rangle, \\
&= \langle v_n, \widehat{u_l} \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_i, \widehat{u_l} \rangle \langle v_n, u_i \rangle, \\
&= \langle v_n, \widehat{u_l} \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_i, u_l \rangle \langle v_n, u_i \rangle \|\widehat{u_l}\|, \\
&= \langle v_n, \widehat{u_l} \rangle - \langle u_l, u_l \rangle \langle v_n, u_l \rangle \|\widehat{u_l}\|, \\
&= \langle v_n, \widehat{u_l} \rangle - \langle v_n, \widehat{u_l} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

این یعنی $\{\widehat{u_i}\}_{i=1}^{n}$ یک مجموعهٔ متعامد است، و لذا مجموعهٔ $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ متعامد یکه است. حال می‌ماند نشان دهیم که $\mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^{n} = \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n}$، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$. این حکم را نیز با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به ازای $n = 1$ بدیهی است. حکم را به ازای $n - 1$ فرض کرده، آن را به ازای n ثابت می‌کنیم. برای این منظور، با توجه به فرض استقرا، کافی است نشان دهیم $u_n \in \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ و $v_n \in \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \ldots, u_n\}$. به روشنی، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
u_n &= \widehat{u_n} \|\widehat{u_n}\|^{-1}, \\
&= v_n \|\widehat{u_n}\|^{-1} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle \|\widehat{u_n}\|^{-1}, \\
&\in \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^{n},
\end{aligned}$$

که در آن از برابری $\mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$، که ناشی از فرض استقراست، استفاده شده است.

همچنین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} v_n &= \widehat{u}_n + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \\ &= u_n \|\widehat{u}_n\| + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \\ &\in \operatorname{span}_{\mathbb{H}} \{u_i\}_{i=1}^{n}. \end{aligned}$$

بنابراین $\operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^n = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^n$. برای اثبات یکتایی دنبالهٔ متعامد یکه حاصل از فرایند گرام-اشمیت، یعنی دنبالهٔ $(u_i)_{i=1}^{\infty}$، با تقریب ضرب در اسکالرهای با طول واحد، فرض کنید $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ دنبالهٔ متعامد یکه دیگری در V باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، در شرط زیر صدق می‌کند

$$\operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{w_1, \dots, w_n\}.$$

نشان می‌دهیم که به ازای هر $n \geq 1$، اسکالر لزوما با طول واحد c_n موجود است به طوری که $w_n = u_n c_n$. این حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = 1$، حکم بدیهی است. فرض کنید حکم به ازای $n - 1$ برقرار باشد و اسکالرهای لزوما با طول واحد $c_1, \dots, c_{n-1}$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n - 1$، داشته باشیم $w_i = u_i c_i$. حال با توجه به برابری $\operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{w_1, \dots, w_n\}$، اسکالرهای c'_i $(1 \leq i \leq n)$ موجودند به طوری که $w_n = \sum_{i=1}^n u_i c'_i$. پس می‌توان نوشت

$$w_n - u_n c'_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i c'_i \in \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{w_i\}_{i=1}^{n-1}.$$

اما، به روشنی، u_n و w_n بر $\operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{w_i\}_{i=1}^{n-1}$ عمود هستند. در نتیجه

$$\|w_n - u_n c'_n\|^2 = \langle w_n - u_n c'_n, w_n - u_n c'_n \rangle = 0,$$

و از آنجا $w_n = u_n c_n'$. این برهان را کامل می‌کند. □

۵. طیف، تحویل‌پذیری، و مثلثی‌پذیری

در این بخش، نخست مقدار ویژهٔ راست و طیف ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(D)$، که D یک حلقهٔ تقسیم است، را تعریف می‌کنیم. به ویژه، این تعریف را برای ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را در نظر گرفته و سپس چندجمله‌ای مینیمال و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژهٔ راست این ماتریس‌ها را تعریف می‌کنیم. همچنین پس از تعریف تشابه دو ماتریس، روابط بین طیف، چندجمله‌ای مینیمال، و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژهٔ راست دو ماتریس مشابه را بررسی می‌کنیم. در گام بعد، به تعریف نیم‌گروه‌های ماتریسی و F-جبرهای تولیدشده توسط نیم‌گروه‌ها می‌پردازیم. سپس، مفاهیم تحویل‌ناپذیری، تحویل‌ناپذیری مطلق، و مثلثی‌پذیری برای خانواده‌های ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(D)$ را بیان و روابط بین آنها را بررسی می‌کنیم. در پایان این بخش، طیف ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در $\mathtt{M}_n(D)$، و به طور خاص ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، را مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد و $T \in \mathcal{L}(D^n)$. به اسکالر $\lambda \in D$ یک مقدار ویژهٔ راست T[۱۳] گوییم هرگاه یک بردار $u \in D^n \setminus \{0\}$ موجود باشد به طوری که $Tu = u\lambda$. به بردار u، یک بردار ویژهٔ راست[۱۴] متناظر به مقدار ویژهٔ راست λ گفته می‌شود. به طور مشابه، اسکالر $\lambda \in D$ را یک مقدار ویژهٔ راست برای ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(D)$ گوییم هرگاه $\lambda \in D$ یک مقدار ویژهٔ راست $T_A \in \mathcal{L}(D^n)$ باشد، که در آن T_A تبدیل خطی القاشده توسط ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(D)$ است. مجموعهٔ همهٔ مقادیر ویژهٔ راست $A \in \mathtt{M}_n(D)$ با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود و طیف[۱۵] A نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۵. چندجمله‌ای مینیمال[۱۶] با ضرایب حقیقی ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را با $p^{(A)}$ نمایش می‌دهیم، یعنی $p^{(A)} \in \mathbb{R}[x]$ چندجمله‌ای تکین یگانهٔ با ضرایب حقیقی و با کم‌ترین درجه است که $p^{(A)}(A) = 0$.

[13] Right eigenvalue of T
[14] Right eigenvector
[15] Spectrum
[16] Minimal polynomial

تعریف ۳.۵. فرض کنید $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ و $p^{(A)} = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$، که در آن p_jها چندجمله‌ای‌های تکین تحویل‌ناپذیر با ضرایب حقیقی و متمایز هستند. به ازای هر $1 \le j \le k$، زیرفضای ریشه‌ای[17] A را با $\mathcal{M}_j$ نشان می‌دهیم که به صورت

$$\mathcal{M}_j := \ker p_j(A)^{m_j} = \left\{ u \in \mathbb{H}^n : \ p_j(A)^{m_j} u = 0 \right\}$$

تعریف می‌شود. به روشنی هر مقدار ویژهٔ راست A ریشهٔ یکی از این p_jهاست. چندگانگی جبری[18] λ در $\sigma(A)$، بعد زیرفضای ریشه‌ایِ متناظر به عامل تحویل‌ناپذیری است که λ ریشهٔ آن است. چندگانگی هندسی[19] $\lambda \in \sigma(A)$، بعد فضای کواترنیونی تولیدشده توسط مجموعهٔ (در واقع فضای حقیقی) $\{X \in \mathbb{H}^n : \ AX = X\lambda\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathtt{M}_n(D)$. خانوادهٔ $\mathcal{A}$ را مشابه با خانوادهٔ $\mathcal{B}$ از ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(D)$ گوییم، و با $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم، هرگاه یک ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathtt{M}_n(D)$ موجود باشد به طوری که

$$\mathcal{A} = P^{-1}\mathcal{B}P = \left\{P^{-1}BP : \ B \in \mathcal{B}\right\}.$$

به طور طبیعی، گوییم ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(D)$ مشابه با ماتریس $B \in \mathtt{M}_n(D)$ است، و می‌نویسیم $A \sim B$، هر گاه $\{A\} \sim \{B\}$. به راحتی می‌توان نشان داد که رابطهٔ تشابه خانواده‌های ماتریس‌ها، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ توانی $\mathtt{M}_n(D)$ است؛ و به طور مشابه، رابطهٔ تشابه ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(D)$، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathtt{M}_n(D)$ است.

در لم زیر نشان می‌دهیم طیف یک ماتریس در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ تحت تشابه کواترنیون‌ها بسته است. همچنین، دو ماتریس مشابه، دارای طیف های مساوی هستند و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژهٔ راست یکسان آنها برابرند.

[17] Root subspace
[18] Algebraic multiplicity
[19] Geometric multiplicity

لم ۵.۵. *فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(۱) *اگر $\lambda \in \sigma(A)$، آنگاه مدار تشابهی λ هم در $\sigma(A)$ قرار می‌گیرد.*

(۲) *اگر $A \sim B$، آنگاه $\sigma(A) = \sigma(B)$.*

(۳) *اگر $A \sim B$، آنگاه چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژهٔ راست یکسان آنها برابرند.*

اثبات. (۱) فرض کنید $\lambda \in \sigma(A)$. اگر یک بردار ویژهٔ راست $u \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ متناظر به مقدار ویژهٔ راست λ را در نظر بگیریم، آنگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ داریم

$$A(u\alpha) = u\alpha(\alpha^{-1}\lambda\alpha).$$

بنابراین $u\alpha$ یک بردار ویژهٔ راست A متناظر به مقدار ویژهٔ راست $\alpha^{-1}\lambda\alpha$ است. از این رو، مدارهای مقادیر ویژهٔ راست A نیز در طیف A قرار می‌گیرند.

(۲) ابتدا از آنجا که $A \sim B$، پس $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که $A = PBP^{-1}$. حال فرض کنید $\lambda \in \sigma(A)$. پس $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ موجود است که $Ax = x\lambda$. پس

$$PBP^{-1}x = x\lambda.$$

در نتیجه، $BP^{-1}x = P^{-1}x\lambda$ و $P^{-1}x \neq 0$. پس $\lambda \in \sigma(B)$. به همین صورت، اگر $\lambda \in \sigma(B)$، آنگاه $\lambda \in \sigma(A)$.

(۳) از آنجا که $A \sim B$، یک $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ موجود است که $Q^{-1}AQ = B$. اگر f یک چندجمله‌ای دلخواه با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه

$$f(B) = Q^{-1}f(A)Q.$$

بنابراین A و B دارای چندجمله‌ای‌های مینیمال یکسانی، مانند $p = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$، هستند. همچنین، اگر $\mathcal{M}_j := \ker p_j(A)^{m_j}$ زیرفضای ریشه‌ای A متناظر به مقدار ویژهٔ راست دلخواه $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$ باشد، که $p_j(\lambda) = 0$، آنگاه به روشنی می‌توان دید که $\ker p_j(B)^{m_j} = Q^{-1} \ker p_j(A)^{m_j}$ زیرا

$p_j(B)^{m_j} = Q^{-1} p_j(A)^{m_j} Q$. بنابراین،

$$\dim\ker p_j(B)^{m_j} = \dim\ker p_j(A)^{m_j}$$

و لذا چندگانگی جبری $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$ به عنوان یک مقدار ویژهٔ راست هم A و هم B یکسان است. این برهان را کامل می‌کند. □

تعریف ۶.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{S} \subseteq \mathtt{M}_n(D)$. زیرمجموعهٔ $\mathcal{S}$ را یک نیم‌گروه[20] (ضربی) در $\mathtt{M}_n(D)$ گوییم اگر تحت عمل ضرب ماتریس‌ها بسته باشد. همچنین، زیرمجموعهٔ $\mathcal{J}$ از $\mathcal{S}$ را یک ایده‌ال[21] (نیم‌گروهی) $\mathcal{S}$ گوییم اگر به ازای هر $S \in \mathcal{S}$ و $J \in \mathcal{J}$ داشته باشیم $SJ \in \mathcal{J}$ و $JS \in \mathcal{J}$.

تعریف ۷.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم، F یک زیرمیدان $\mathtt{Z}(D)$، مرکز D، و $\mathcal{A}$ یک زیرحلقهٔ $\mathtt{M}_n(D)$ باشد. حلقهٔ $\mathcal{A}$ را یک F-جبر[22] گوییم اگر نسبت به ضرب اسکالر در اعضای F بسته باشد. همچنین، نیم‌گروه $\mathcal{S}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ را در نظر بگیرید. F-جبر تولیدشده توسط $\mathcal{S}$[23] را با $\mathtt{Alg}_F(\mathcal{S})$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i S_i : \ k \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in F,\ S_i \in \mathcal{S},\ 1 \le i \le k\right\}$$

تعریف می‌شود. در واقع، $\mathtt{Alg}_F(\mathcal{S})$ فضای F-خطی تولیدشده توسط $\mathcal{S}$[24] است.

تعریف ۸.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و F یک زیرمیدان $\mathtt{Z}(D)$ باشد. ماتریس A در $\mathtt{M}_n(D)$ را روی F جبری یا به اختصار F-جبری گوییم هر گاه یک چندجمله‌ای مانند $p \in F[x]$ موجود باشد که $p(A) = 0$.

[20] Semigroup
[21] Ideal
[22] F-algebra
[23] F-algebra generated by $\mathcal{S}$
[24] F-linear span of $\mathcal{S}$

تعریف ۹.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از ماتریس‌ها در $\mathtt{M}_n(D)$، تحویل‌ناپذیر[۲۵] نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $x \in D^n \setminus \{\circ\}$،

$$\mathtt{Sem}(\mathcal{F})x = \Big\{Ax : \ A \in \mathtt{Sem}(\mathcal{F})\Big\},$$

فضای برداری راست D^n را تولید کند، که در آن $\mathtt{Sem}(\mathcal{F}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^n$ نشانگر نیم‌گروه ضربی تولیدشده توسط $\mathcal{F}$ است. به بیان دیگر، $\langle \mathtt{Sem}(\mathcal{F})x\rangle_D = D^n$.

تعریف ۱۰.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای در $\mathtt{M}_n(D)$ باشد. زیرفضای $\mathcal{M}$ از D^n تحت $\mathcal{F}$[۲۶] پایا نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $m \in \mathcal{M}$ و هر $A \in \mathcal{F}$، $Am \in \mathcal{M}$. به بیان دیگر، اعضای $\mathcal{F}$ دارای زیرفضای پایای مشترک $\mathcal{M}$ هستند. نیز زیرفضای $\mathcal{M}$ از D^n را تحت A پایا گوییم هر گاه $\mathcal{M}$ تحت $\{A\}$ پایا باشد. به روشنی، $\{\circ\}$ و D^n زیرفضاهای پایای بدیهی $\mathtt{M}_n(D)$ هستند. مجموعهٔ زیرفضاهای پایا تحت $\mathcal{F}$ را با $\mathtt{Lat}(\mathcal{F})$ نمایش می‌دهیم.

مشاهده ۱۱.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد و $n > ۱$. در این صورت خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر اعضای $\mathcal{F}$، به عنوان مجموعه‌ای از تبدیلات خطی روی D^n، هیچ زیرفضای پایایی به جز زیرفضاهای پایای بدیهی نداشته باشند.

تعریف ۱۲.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ تحویل‌پذیر[۲۷] نامیده می‌شود هر گاه تحویل‌ناپذیر نباشد. به طور معادل، $\mathcal{F} = \{\circ\}$ یا $\mathcal{F}$ دارای یک زیرفضای پایای نابدیهی باشد.

تعریف ۱۳.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد. حلقهٔ تقسیم E را یک توسیع (یا گسترش) D[۲۸] گوییم هر گاه $D \subset E$ و $\mathtt{Z}(D) \subset \mathtt{Z}(E)$ که در آن $\mathtt{Z}(D)$ و $\mathtt{Z}(E)$ به ترتیب مرکزهای D و E هستند.

تعریف ۱۴.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ را به طور مطلق تحویل‌ناپذیر[۲۹] (مطلقا تحویل‌ناپذیر یا تحویل‌ناپذیر مطلق) گوییم هر گاه روی همهٔ توسیع‌های D

---

[25] Irreducible

[26] Invariant under $\mathcal{F}$

[27] Reducible

[28] Extension of D

[29] Absolutely irreducible

تحویل‌ناپذیر باشد.

لم ۱۵.۵. *فرض کنید F یک میدان باشد. در این صورت خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $M_n(F)$ به طور مطلق تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $Alg_F(\mathcal{F}) = M_n(F)$.*

اثبات. فرض کنید $\overline{F}$ نشانگر بستار جبری F باشد. ابتدا فرض کنید $\mathcal{F}$ به طور مطلق تحویل‌ناپذیر باشد. پس $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{M}_n(\overline{F})$ تحویل‌ناپذیر است. از آنجا که $\overline{F}$ به طور جبری بسته است، پس بنا بر قضیهٔ برنساید [۱۳، قضیهٔ ۲.۲.۰۱]، داریم

$$\mathrm{Alg}_{\overline{F}}(\mathcal{F}) = \langle \mathrm{Sem}(\mathcal{F}) \rangle_{\overline{F}} = \mathrm{M}_n(\overline{F}).$$

در نتیجه مجموعه‌ای مانند

$$\{T_1, \ldots, T_{n^2}\} \subseteq \mathrm{Sem}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{M}_n(F)$$

موجود است که روی $\overline{F}$، و لذا روی F، مستقل خطی است. در نتیجه این مجموعه یک پایه برای $\mathrm{M}_n(F)$ تشکیل می‌دهد، و از این رو $\mathrm{Alg}_F(\mathcal{F}) = \langle \mathrm{Sem}(\mathcal{F}) \rangle_F = \mathrm{M}_n(F)$ است، که حکم را ثابت می‌کند. حکم در جهت عکس بدیهی است. این برهان را کامل می‌کند. □

تعریف ۱۶.۵. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای در $\mathrm{M}_n(D)$ باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ را مثلثی‌پذیر[۳۰] گوییم هر گاه زیرفضاهای پایای $\mathcal{F}$ شامل یک زنجیر ماکسیمال به طول n در D^n باشند. در واقع، هر چنین زنجیر ماکسیمال زنجیری از زیرفضاها به صورت

$$\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n = D^n$$

است، که در آن هر $\mathcal{V}_j$، یک زیرفضای پایای j-بعدی $\mathcal{F}$ است. چنین زنجیری، یک زنجیر مثلثی‌ساز[۳۱]

[30] Triangularizable
[31] Triangularizing chain

از زیرفضاها برای $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود. نیز به آسانی می‌توان دید که خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر است اگر و تنها اگر یک پایه برای D^n موجود باشد که نسبت به آن اعضای $\mathcal{F}$ دارای نمایش‌های ماتریسی بالامثلثی هستند. چنین پایه‌ای را یک پایهٔ مثلثی‌ساز[۳۲] $\mathcal{F}$ گوییم. همچنین، به زبان ماتریس‌ها، خانوادهٔ $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر است اگر و تنها اگر یک ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathtt{M}_n(D)$ موجود باشد به طوری که $P^{-1}\mathcal{F}P$ متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است. روشن است که ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(D)$ را مثلثی‌پذیر گوییم هر گاه $\{A\} \subseteq \mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر باشد.

به یاد آورید فضای خارج قسمتی[۳۳] $\frac{V}{\mathcal{N}}$ که در آن V یک فضای برداری راست روی حلقهٔ تقسیم D و $\mathcal{N}$ یک زیرفضا از V است به صورت $\frac{V}{\mathcal{N}} = \{[x] = x + \mathcal{N} : \ x \in V\}$ تعریف می‌شود که با جمع و ضرب اسکالر (خوش‌تعریف)

$$[x] + [y] := [x + y], \ [x]\lambda := [x\lambda], \ (x \in V, \ \lambda \in D)$$

تشکیل یک فضای برداری روی D می‌دهد. به روشنی، هر زیرفضای $Q \le \frac{V}{\mathcal{N}}$ به صورت $Q = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{N}}$ است، که در آن $\mathcal{K} \le V$ و $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{K}$؛ در واقع $\mathcal{K} = \{k \in V : k + \mathcal{N} \in Q\}$.

فرض کنید $T \in \mathcal{L}(V)$ و $\mathcal{N}$ یک زیرفضا پایای T باشد. عملگر خطی (خارج قسمتی) $T_{\frac{V}{\mathcal{N}}}$ روی $\frac{V}{\mathcal{N}}$ با دستور (خوش‌تعریف)

$$T_{\frac{V}{\mathcal{N}}}(x + \mathcal{N}) = T(x) + \mathcal{N}, \ (x \in V)$$

تعریف می‌شود. همچنین، یادآوری می‌کنیم ویژگی $\mathcal{P}$ از خانواده‌های تبدیلات خطی را گوییم با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد هر گاه اگر $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$ دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشد، آنگاه به ازای هر $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathtt{Lat}(\mathcal{F})$ که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، خانوادهٔ خارج قسمتی

$$\mathcal{F}_{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}} := \left\{T_{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}/\mathcal{M}) : T \in \mathcal{F}\right\}$$

[32] Triangularizing basis
[33] Quotient space

نیز دارای ویژگی $\mathcal{P}$ باشد.

گزارهٔ زیر معروف به لم مثلثی‌سازی نتیجه‌ای سرراست از مشاهدات بدیهی زیر است. اگر $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$ و $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathtt{Lat}(\mathcal{F})$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، آنگاه $\mathcal{Q} \in \mathtt{Lat}\left(\mathcal{F}_{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}}\right)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{K}_\mathcal{Q}}{\mathcal{M}}$، که در آن $\mathcal{K}_\mathcal{Q} = \{n \in \mathcal{N} : n + \mathcal{M} \in \mathcal{Q}\}$، و به روشنی $\mathcal{K}_\mathcal{Q} \in \mathtt{Lat}(\mathcal{F})$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$. به ویژه، $\mathcal{Q} \in \mathtt{Lat}\left(\mathcal{F}_{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}}\right)$ نابدیهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{K}_\mathcal{Q}}{\mathcal{M}}$، که در آن $\mathcal{K}_\mathcal{Q} = \{n \in \mathcal{N} : n + \mathcal{M} \in \mathcal{Q}\}$، و به علاوه $\mathcal{K}_\mathcal{Q} \in \mathtt{Lat}(\mathcal{F})$ و $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}_\mathcal{Q} \subsetneq \mathcal{N}$.

لم ۱۷.۵. *(**مثلثی‌سازی**) فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{P}$ یک ویژگی خانواده‌های تبدیلات خطی روی فضاهای متناهی‌بعد روی حلقهٔ تقسیم D باشد که با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. اگر هر خانواده از تبدیلات خطی دارای خاصیت $\mathcal{P}$ روی یک فضای متناهی‌بعد با بعد بیشتر از واحد تحویل‌پذیر باشد، آنگاه هر خانواده از تبدیلات خطی دارای ویژگی $\mathcal{P}$ مثلثی‌پذیر است.*

اثبات. برهان که در واقع بازنویسی برهانِ [۱۳، لم ۴.۱.۱] در چارچوب فضاهای برداری روی حلقه‌های تقسیم است را از باب کامل بودن ارائهٔ مطلب می‌آوریم. فرض کنید V یک فضای برداری راست (یا چپ) با بعد $n > ۱$ روی حلقهٔ تقسیم D و خانوادهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$ دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشد. فرض کنید

$$\{\circ\} = \mathcal{M}_\circ \leq \cdots \leq \mathcal{M}_k = V,$$

که در آن $k \in \mathbb{N}$ و $k \leq n$، یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای پایای (متمایز) $\mathcal{F}$ باشد. با نشان دادن اینکه $k = n$، و در نتیجه $\dim \frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-۱}} = ۱$ به ازای هر $۱ \leq i \leq k = n$، حکم را ثابت می‌کنیم. به برهان خلف، فرض کنید $k < n$، و لذا یک $۱ \leq i \leq k$ موجود است به طوری که $\dim \frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-۱}} > ۱$. ولی از فرض نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{F}_{\frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-۱}}} := \left\{T_{\frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-۱}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-۱}) : T \in \mathcal{F}\right\}$$

تحویل‌پذیر است زیرا دارای خاصیت $\mathcal{P}$ است و $\dim \frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-۱}} > ۱$. بنابراین، خانوادهٔ خارج قسمتی

$\frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-1}}$ $\mathcal{F}$ دارای یک زیرفضای پایای نابدیهی $Q = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}_{i-1}}$ به ازای یک $\mathcal{K} \in \mathrm{Lat}(\mathcal{F})$ است، که $\mathcal{M}_{i-1} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{M}_i$. این امر به روشنی ایجاب می‌کند که

$$\{0\} = \mathcal{M}_0 \leq \cdots \leq \mathcal{M}_k = V$$

زنجیری ماکسیمال از زیرفضاهای پایای (متمایز) $\mathcal{F}$ نیست، که با فرض در تناقض است. در نتیجه $k = n$، و این برهان را کامل می‌کند. □

نتیجه‌ای سرراست از لم مثلثی‌سازی گزارهٔ زیر است.

قضیه ۱۸.۵. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، D یک حلقهٔ تقسیم، و $\mathcal{Z}(D)$ مرکز D باشد. در این صورت*

(i) هر ماتریس در $\mathrm{M}_n(D)$ با این ویژگی که دارای چندجمله‌ای مینیمال با ضرایب در $\mathcal{Z}(D)$ است که به عوامل خطی روی مرکز D تجزیه می‌شود مثلثی‌پذیر است.

(ii) هر گردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر با طیف در $\mathcal{Z}(D)$ مثلثی‌پذیر است.

اثبات. (i) به روشنی این ویژگی که یک تبدیل خطی دارای چندجمله‌ای مینیمال با ضرایب در $\mathrm{Z}(D)$ است که به عوامل خطی روی مرکز D تجزیه می‌شود با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. در نتیجه، با توجه به لم مثلثی‌سازی کافی است ثابت کنیم که به ازای هر $n > 1$، هر چنین ماتریسی در $\mathrm{M}_n(D)$ به عنوان یک تبدیل خطی تحویل‌پذیر است. اما این مطلب بدیهی است زیرا هر چنین ماتریسی دارای یک مقدار ویژه در مرکز D است و فضای ویژهٔ متناظر به هر چنین مقدار ویژه‌ای زیرفضایی پایا و نابدیهی برای ماتریس در نظر گرفته شده است.

(ii) برهان، که استاندارد است، مشابهٔ برهان (i) است. به روشنی این ویژگی که یک گردایه از تبدیلات خطی جابه‌جایی بوده و متشکل از تبدیلاتی خطی بوده که دارای چندجمله‌ای‌های مینیمال با ضرایب در $\mathrm{Z}(D)$ هستند که به عوامل خطی روی مرکز D تجزیه می‌شوند با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. در نتیجه، با توجه به لم مثلثی‌سازی کافی است ثابت کنیم که به ازای هر $n > 1$، هر چنین گردایه‌ای از ماتریس‌ها به عنوان گردایه‌ای از تبدیلات خطی تحویل‌پذیر است. اما این مطلب بدیهی است زیرا هر چنین گردایه‌ای یا متشکل از ماتریس‌های اسکالر است، که به روشنی تحویل‌پذیر است، یا شامل ماتریسی غیر اسکالر است که دارای یک مقدار ویژه در مرکز D است. در این صورت فضای ویژهٔ متناظر

به هر چنین مقدار ویژه‌ای زیرفضایی پایا و نابدیهی برای گردایهٔ در نظر گرفته شده است. این برهان را کامل می‌کند. □

شایان گفتن است که، به ازای یک حلقهٔ تقسیم کلی و ناجابه‌جایی D، به طور کلی معیاری برای اینکه یک ماتریس داده شده در $\mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر یا تحویل‌پذیر باشد وجود ندارد. همچنین اینکه آیا هر گردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در $\mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر است مسأله‌ای باز است. البته، به ازای یک میدان کلی F یک ماتریس داده شده در $\mathtt{M}_n(F)$ به ترتیب مثلثی‌پذیر، تحویل‌پذیر، ابرتحویل‌پذیر است اگر و تنها اگر به ترتیب چندجمله‌ای مینیمالش به عوامل خطی روی F تجزیه شود، چندجمله‌ای مشخصه‌اش تحویل‌پذیر باشد، چندجمله‌ای مینیمالش تحویل‌پذیر باشد؛ به [۱۸، لم‌های ۱.۱.۱ و ۲.۲.۲۰] رجوع کنید. یادآور می‌شویم که یک ماتریس در $\mathtt{M}_n(F)$ را ابرتحویل‌پذیر[۳۴] گوییم هر گاه مرکزسازش[۳۵] در $\mathtt{M}_n(F)$ تحویل‌پذیر باشد.

قضیهٔ زیر طیف ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در $\mathtt{M}_n(D)$ که روی $\mathtt{Z}(D)$ جبری هستند را به طوری طبیعی بر حسب درایه‌های قطری هر فرم مثلثی‌شدهٔ ماتریس توصیف می‌کند.

قضیه ۱۹.۵. *فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم و $A \in \mathtt{M}_n(D)$ مثلثی‌پذیر بوده و همچنین روی $\mathtt{Z}(D)$ جبری باشد. در این صورت*

$$\sigma(A) = \left\{\alpha^{-1}\beta\alpha : \ \alpha \in D \setminus \{0\}, \ \beta \in \mathcal{D}(B)\right\} = \mathtt{Sim}(\mathcal{D}(B)),$$

که در آن B هر ماتریس بالامثلثی‌ای است که با A مشابه است و $\mathcal{D}(B)$ مجموعهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B است.

اثبات. فرض کنید $A \sim B$، که در آن $B = (b_{ij}) \in \mathtt{M}_n(D)$ یک ماتریس بالامثلثی است. نخست ثابت می‌کنیم $\mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B)) \subseteq \sigma(A)$. با توجه به لم ۵.۵، کافی است ثابت کنیم $b_{ii} \in \sigma(B) = \sigma(A)$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$. این حکم را با استقرا روی $n \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم. حکم به ازای $n = 1$ بدیهی است. حکم را برای ماتریس‌های بالامثلثی با اندازهٔ کمتر از $n \in \mathbb{N}$ فرض کرده، آن را برای ماتریس‌های

[34] Hyperreducible
[35] Centralizer

با اندازهٔ $n \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم. قرار دهید $B_1 = (b_{ij}) \in \mathtt{M}_{n-1}(D)$. در نتیجه $B = \begin{bmatrix} B_1 & b^t \\ 0 & b_{nn} \end{bmatrix}$، که در آن $b = (b_{1n}, \ldots, b_{n-1n}) \in D_{n-1}$ و $0 = (0, \ldots, 0) \in D_{n-1}$. اکنون با توجه به اینکه $\sigma(B_1) \subseteq \sigma(B)$ و با توجه به فرض استقرا، تنها کافی است ثابت کنیم $b_{nn} \in \sigma(B)$. برای این منظور از آنجا که بنا به فرض استقرا $b_{ii} \in \sigma(B_1)$، و لذا به لم ۵.۵، $\mathtt{Sim}(b_{ii}) \subseteq \sigma(B_1) \subseteq \sigma(B)$ به ازای هر $1 \leq i \leq n-1$، می‌توان فرض کرد که $b_{nn} \notin \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B_1))$. فرض کنید $p \in F[x]$، که در آن F نشانگر مرکز حلقهٔ تقسیم D است، چندجمله‌ای مینیمال b_{nn} باشد. در نتیجه از قضیهٔ دِکسون[36] [۸، صفحهٔ ۱۰۳] درمی‌یابیم که $p(B_1)$ وارون‌پذیر است. بنابراین از [۵، لم ۲.۲.۸] نتیجه می‌گیریم که یک عضو یگانهٔ $x_1 \in D^{n-1}$ موجود است به طوری که $B_1 x_1 - x_1 b_{nn} = -b^t$ زیرا $p(b_{nn}) = 0$ ولی $p(B_1)$ وارون‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر قرار دهیم $x^t = (x_1^t, 1) \in D_n$، آنگاه

$$Bx = \begin{bmatrix} B_1 & b^t \\ 0 & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} b_{nn} = x b_{nn},$$

و لذا $b_{nn} \in \sigma(B)$، که همان حکم مطلوب نظر ماست. برای اتمام برهان، می‌ماند نشان دهیم $\sigma(A) = \sigma(B) \subseteq \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B))$. برای این منظور فرض کنید $\lambda \in \sigma(B)$ عضوی دلخواه باشد. در نتیجه یک $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D^n \setminus \{0\}$ موجود است به طوری که $Bx = x\lambda$. اگر $x_n \neq 0$، خواهیم داشت $b_{nn} x_n = x_n \lambda$، و از آنجا $\lambda = x_n^{-1} b_{nn} x_n \in \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B))$. و اگر $x_n = 0$، عدد $1 \leq i < n$ را بزرگترین اندیسی اختیار کنید که $x_i \neq 0$ ولی $x_j = 0$ به ازای هر $i < j \leq n$. اکنون استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد $b_{ii} x_i = x_i \lambda$، و لذا $\lambda = x_i^{-1} b_{ii} x_i \in \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B))$. در نتیجه $\sigma(B) \subseteq \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(B))$، که برهان را کامل می‌کند. $\square$

۶. نمایش‌های ماتریسی حقیقی و مختلط کواترنیون‌ها

[36] L.E. Dickson's theorem

نخست نمایش استاندارد $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، در $\mathtt{M}_۲(\mathbb{R})$ را یادآور می‌شویم. به طور مرسوم، میدان اعداد مختلط را از طریق نشانندهٔ[۳۷]

$$\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathtt{M}_۲(\mathbb{R}),\ \varepsilon(a+bi) := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

می‌توان به عنوان یک زیرمجموعهٔ $\mathtt{M}_۲(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. این نمایش، نمایش استاندارد اعداد مختلط بر حسب ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های حقیقی نامیده می‌شود. همچنین، $\mathbb{H}$، حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها، را از طریق نشانندهای

$$\varepsilon' : \mathbb{H} \to \mathtt{M}_۲(\mathbb{C}),\ \varepsilon'(z+wj) := \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

و

$$\varepsilon'' : \mathbb{H} \to \mathtt{M}_۴(\mathbb{R}),\ \varepsilon''(a+bi+cj+dk) := \begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{bmatrix},$$

می‌توان، به ترتیب، به عنوان یک زیرمجموعهٔ $\mathtt{M}_۲(\mathbb{C})$ و $\mathtt{M}_۴(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. این نمایش‌ها را نمایش‌های استاندارد $\mathbb{H}$، به ترتیب، در $\mathtt{M}_۲(\mathbb{C})$ و $\mathtt{M}_۴(\mathbb{R})$ می‌نامیم.

سپس به طور طبیعی، از طریق نشانندهٔ

$$\varepsilon_n : \mathtt{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{R}),\ \varepsilon_n([z_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [\varepsilon(z_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

جبر حقیقی $\mathtt{M}_n(\mathbb{C})$ را می‌توان به عنوان یک زیرمجموعهٔ $\mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. همچنین، به طور

[37] Embedding

مشابه، از طریق نشاننده‌های

$$\varepsilon'_n : \mathtt{M}_n(\mathbb{H}) \to \mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{C}),\ \varepsilon'_n([q_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [\varepsilon'(q_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

و

$$\varepsilon''_n : \mathtt{M}_n(\mathbb{H}) \to \mathtt{M}_{۴n}(\mathbb{R}),\ \varepsilon''_n([q_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [\varepsilon''(q_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

جبر حقیقی $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را می‌توان، به ترتیب، به عنوان یک زیرمجموعهٔ $\mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{C})$ و $\mathtt{M}_{۴n}(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. از این پس، وقتی می‌نویسیم $\mathtt{M}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{R})$، منظور ما $\mathtt{M}_n(\varepsilon(\mathbb{C})) \subseteq \mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{R})$ است. همچنین وقتی می‌نویسیم $\mathtt{M}_n(\mathbb{H}) \subseteq \mathtt{M}_{۴n}(\mathbb{R})$، منظور ما $\mathtt{M}_n(\varepsilon''(\mathbb{H})) \subseteq \mathtt{M}_{۴n}(\mathbb{R})$ است. در بقیهٔ موارد هم به طور مشابه عمل می‌کنیم. اغلب، در صورتی که ابهامی وجود نداشته باشد، برای راحتی نمادهای ε، ε' و ε'' را، به ترتیب، به جای نمادهای ε_n، ε'_n و ε''_n به کار می‌بریم. به عنوان مشاهده‌ای ساده، به ازای هر $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، ماتریس‌های

$$A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H}),\ \varepsilon'_n(A) \in \mathtt{M}_{۲n}(\mathbb{C}),\ \varepsilon''_n(A) \in \mathtt{M}_{۴n}(\mathbb{R}),$$

دارای چندجمله‌ای‌های مینیمال با ضرایب حقیقی یکسانی هستند. برخی از ویژگی‌های نشاننده‌های فوق در [۱۴، صفحات ۳۳ تا ۳۷] آمده است.

دو گزارهٔ زیر حکم می‌کنند که ε، ε' و ε''، و همچنین ε_n، ε'_n و ε''_n، نمایش‌هایی تحویل‌ناپذیر هستند.

قضیه ۱.۶. *نشاننده‌های ε، ε' و ε'' که، به ترتیب، نمایش‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}$ در $M_۲(\mathbb{R})$، $M_۲(\mathbb{C})$ و $M_۴(\mathbb{R})$ هستند را در نظر بگیرید. در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(i) نشانندهٔ ε یک نمایش تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{C}$ در $M_۲(\mathbb{R})$ است. به عبارت دیگر، $\varepsilon(\mathbb{C}) \subset M_۲(\mathbb{R})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است.

(ii) نشانندهٔ ε' یک نمایش تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{H}$ در $M_۲(\mathbb{C})$ است. به عبارت دیگر، $\varepsilon'(\mathbb{H}) \subset M_۲(\mathbb{C})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است.

(iii) نشانندهٔ ε'' یک نمایش تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{H}$ در $M_۴(\mathbb{R})$ است. به عبارت دیگر، $\varepsilon''(\mathbb{H}) \subset$

$M_۴(\mathbb{R})$ *یک* $\mathbb{R}$ *-جبر تحویل‌ناپذیر است.*

اثبات. (i) ماتریس $\varepsilon(i)$ در $\mathrm{M}_۲(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است زیرا فاقد مقدار ویژه حقیقی است. پس حکم برقرار است.

(ii) برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که مجموعهٔ $\{\varepsilon'(۱), \varepsilon'(i), \varepsilon'(j), \varepsilon'(k)\}$ روی $\mathbb{C}$ مستقل خطی است. برای این منظور، فرض کنید $\alpha_۱, \dots, \alpha_۴ \in \mathbb{C}$ و

$$\alpha_۱\varepsilon'(۱) + \alpha_۲\varepsilon'(i) + \alpha_۳\varepsilon'(j) + \alpha_۴\varepsilon'(k) = ۰.$$

به دست می‌آوریم $\alpha_۱ + i\alpha_۲ = ۰$، $\alpha_۱ - i\alpha_۲ = ۰$، $\alpha_۳ + i\alpha_۴ = ۰$، و $-\alpha_۳ + i\alpha_۴ = ۰$. در نتیجه، $\alpha_۱ = \cdots = \alpha_۴ = ۰$. پس $\varepsilon'(\mathbb{H}) \subset \mathrm{M}_۲(\mathbb{C})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است.

(iii) کافی است نشان دهیم $\varepsilon''(\mathbb{H})x_۰ = \mathbb{R}^۴$ به ازای هر $x_۰ \in \mathbb{R}^۴ \setminus \{۰\}$. برای این منظور، نخست توجه کنید که $\mathcal{B} = \{\varepsilon''(۱), \varepsilon''(i), \varepsilon''(j), \varepsilon''(k)\}$ یک پایه برای $\varepsilon''(\mathbb{H})$ به عنوان $\mathbb{R}$-جبر در $\mathrm{M}_۴(\mathbb{R})$ است. حال، عضو $x_۰ \in \mathbb{R}^۴ \setminus \{۰\}$ را دلخواه اختیار کرده و بگیرید $\mathcal{B}_۱ = \{\varepsilon''(۱)x_۰, \varepsilon''(i)x_۰, \varepsilon''(j)x_۰, \varepsilon''(k)x_۰\}$. برای اثبات حکم کافی است که نشان دهیم $\mathcal{B}_۱$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۴$ است. برای این منظور، نشان می‌دهیم $\mathcal{B}_۱$ در $\mathbb{R}^۴$ مستقل خطی است. فرض کنید $\alpha_۱, \dots, \alpha_۴ \in \mathbb{R}$ به طوری که

$$\alpha_۱\varepsilon''(۱)x_۰ + \alpha_۲\varepsilon''(i)x_۰ + \alpha_۳\varepsilon''(j)x_۰ + \alpha_۴\varepsilon''(k)x_۰ = ۰.$$

سپس داریم

$$\varepsilon''(\alpha_۱ + \alpha_۲ i + \alpha_۳ j + \alpha_۴ k)x_۰ = \Big(\alpha_۱\varepsilon''(۱) + \alpha_۲\varepsilon''(i) + \alpha_۳\varepsilon''(j) + \alpha_۴\varepsilon''(k)\Big)x_۰ = ۰.$$

اما از آنجا که هر عضو ناصفر در $\mathbb{H}$، و لذا در $\varepsilon''(\mathbb{H})$، وارون‌پذیر است و $x_۰ \in \mathbb{R}^۴ \setminus \{۰\}$، به روشنی، درمی‌یابیم $\varepsilon''(\alpha_۱ + \alpha_۲ i + \alpha_۳ j + \alpha_۴ k) = ۰$، و از آنجا $\alpha_۱ + \alpha_۲ i + \alpha_۳ j + \alpha_۴ k = ۰$. در نتیجه $\alpha_۱ = \cdots = \alpha_۴ = ۰$. بنابراین، $\varepsilon''(\mathbb{H})x_۰ = \mathbb{R}^۴$. پس $\varepsilon''(\mathbb{H}) \subset \mathrm{M}_۴(\mathbb{R})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است. □

مشابه با قضیهٔ بالا، نتیجهٔ زیر برقرار است.

نتیجه ۲.۶. *فرض کنید $n > 1$. در این صورت $M_n(\mathbb{C})$ و $M_n(\mathbb{H})$ به ترتیب $\mathbb{R}$-جبرهای تحویل‌ناپذیر در $M_{2n}(\mathbb{R})$، $M_{2n}(\mathbb{C})$ و $M_{4n}(\mathbb{R})$ هستند.*

اثبات. اینکه $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ و $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ به ترتیب در $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ و $\mathrm{M}_{4n}(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر هستند از برهان حکمی مشابه در [۱۸، صفحهٔ ۴۹] نتیجه می‌شود. اینکه $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ در $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ تحویل‌ناپذیر است مشابهٔ بخش دوم قضیهٔ قبل ثابت می‌شود؛ به طور دقیق‌تر، با نشان دادن اینکه $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ شامل $4n^2$ ماتریس مستقل خطی روی $\mathbb{C}$ است. □

۷. روایت‌های حقیقی قضیهٔ برنساید

ویلیام برنساید در [۴، صفحهٔ ۴۳۳]، قضیه‌ای ثابت کرد که حکم می‌کند یک گروه از ماتریس‌های مختلط تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر این گروه شامل یک پایهٔ فضای برداری برای $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ باشد. در واقع معیار بالا برای نیم‌گروه‌های ماتریس‌های مختلط نیز برقرار است. این روایت موسوم به قضیهٔ برنساید[۳۸] است، که البته همزادی بر حسب جبرهای ماتریسی به صورت زیر دارد. فرض کنید F یک میدان بستهٔ جبری باشد. در این صورت تنها زیرجبر تحویل‌ناپذیر $\mathrm{M}_n(F)$ خودش است. در این بخش، گزاره‌ای از نوع قضیهٔ برنساید، یا توصیفی از زیرجبرهای حقیقی تحویل‌ناپذیر $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ارائه می‌دهیم.

ابتدا قضیه‌ای از نوع قضیهٔ ودربرن-آرتین[۳۹] را بیان می‌کنیم که در ادامه به آن نیاز داریم و در [۱۶، قضیهٔ ۲.۲] ثابت شده است.

قضیه ۱.۷. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، D یک حلقهٔ تقسیم، F یک زیرمیدان مرکز D، و $\mathcal{A}$ یک F-جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌های F-جبری در $M_n(D)$ باشد. فرض کنید $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در بین رتبه‌های اعضای ناصفر $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت n بر r بخش‌پذیر است و $\mathcal{A}$ مشابه با $M_{\frac{n}{r}}(\Delta)$ است، که در آن Δ یک F-جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌های F-جبری در $M_r(D)$ است.* به

38 Burnside's theorem

39 Wedderburn-Artin type theorem

ویژه، $\mathcal{A}$ مشابه با $M_n(\Delta_۱)$ است، که در آن $\Delta_۱$ یک زیرحلقهٔ تقسیم F-جبری از D است، اگر و تنها اگر $r = ۱$.

قضیهٔ زیر توصیفی از زیرجبرهای حقیقی $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$، $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$، و $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ به دست می‌دهد. بخش (i) قضیهٔ زیر استاندارد است. برای نمونه، به [۱۰، قضیهٔ ۶] و [۱۱، صفحهٔ ۴۱۵] رجوع کنید. بخش (ii) هر چند که استاندارد است ولی تا جایی که اطلاع داریم در هیچ جایی آورده نشده است. بخش (iii)، که حالت خاصی از [۱۰، قضیهٔ ۱۰] است، از بامداد یاحقی است ولی برای نخستین بار در [۱۰] آمده است.

قضیه ۲.۷. *(i) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{R})$، و $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت r، که n را عاد می‌کند، دارای یکی از سه مقدار ۱، ۲، یا ۴ است، و به علاوه $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$، یا $\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{۲}}(\mathbb{C})$، یا $\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{۴}}(\mathbb{H})$ بر حسب اینکه، به ترتیب، $r = ۱$، $r = ۲$، یا $r = ۴$ باشد. به ویژه، $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$ اگر و تنها اگر $r = ۱$.*

(ii) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{C})$، و $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت عدد صحیح r، که n را عاد می‌کند، دارای یکی از دو مقدار ۱ یا ۲ است، و به علاوه $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ یا $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{R})$ هرگاه $r = ۱$، و $\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{۲}}(\mathbb{H})$ هرگاه $r = ۲$.

(iii) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$، و $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت $r = ۱$ و $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{H})$، یا $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{C})$، یا $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{R})$.

اثبات. (i) بنا بر قضیهٔ ۱.۷، $\mathcal{A}$ با $\mathrm{M}_{\frac{n}{r}}(\Delta)$ مشابه است، که در آن $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ و Δ یک $\mathbb{R}$-جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $\mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ است. بنا بر قضیهٔ فروبنیوس[40]، [۹، قضیهٔ ۱۲.۱۳.۵]، $\Delta \cong \mathbb{H}$ یا $\Delta \cong \mathbb{C}$ یا $\Delta \cong \mathbb{R}$. اما $r = \dim_{\mathbb{R}} \Delta$ زیرا Δ یک $\mathbb{R}$-جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر در $\mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ است. در نتیجه مقدار r، ۱ یا ۲ یا ۴ است. اگر $r = ۱$، آنگاه $\Delta \cong \mathbb{R}$، که در این حالت حکم از قضیهٔ ۱.۷ نتیجه می‌شود. در دو حالت دیگر، از قضیهٔ اسکولم-نوتر[41]،

[40] Frobenius' theorem
[41] Skolem-Noether theorem

[۷، صفحهٔ ۳۹]، درمی‌یابیم $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{C} \sim \Delta$ هرگاه $r = 2$، یا $\mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{H} \sim \Delta$ هرگاه $r = 4$.
حال به روشنی، حکم از قضیهٔ ۱.۷ نتیجه می‌شود.

(ii) بنا بر قضیهٔ ۱.۷، $\mathcal{A}$ با $\mathrm{M}_{\frac{n}{r}}(\Delta)$ مشابه است، که در آن $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ و Δ یک $\mathbb{R}$-جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ است. بنا بر قضیهٔ فروبنیوس، $\Delta \cong \mathbb{H}$ یا $\Delta \cong \mathbb{C}$ یا $\Delta \cong \mathbb{R}$. اگر $\Delta \cong \mathbb{R}$ یا $\Delta \cong \mathbb{C}$، آنگاه از قضیهٔ اسکولم-نوتر به دست می‌آوریم $\Delta \sim \mathbb{R}1_{\mathrm{M}_r(\mathbb{C})} \subseteq \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ هرگاه $\Delta \cong \mathbb{R}$، یا $\Delta \sim \mathbb{C}1_{\mathrm{M}_r(\mathbb{C})} \subseteq \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ هرگاه $\Delta \cong \mathbb{C}$، که در هر دو حالت نتیجه می‌شود $r = 1$ زیرا Δ در $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ تحویل‌ناپذیر است. اگر $\Delta \cong \mathbb{H}$، آنگاه $\dim_{\mathbb{R}} \Delta = 4$.
از طرفی، Δ یک نیم‌گروه ضربی تحویل‌ناپذیر در $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ است. در نتیجه، بنا بر قضیهٔ برنساید، Δ شامل r^2 عضو مستقل خطی روی $\mathbb{C}$ است. از این رو، $\dim_{\mathbb{R}} \Delta \geq r^2$ که نتیجه می‌دهد $r \leq 2$. اما $r > 1$ زیرا $\mathbb{H} \cong \Delta$ جابه‌جایی نیست. پس $r = 2$. دوباره، از قضیهٔ اسکولم-نوتر به دست می‌آوریم $\Delta \sim \mathbb{H} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ هرگاه $\Delta \cong \mathbb{H}$. بنابراین، حکم از قضیهٔ ۱.۷ نتیجه می‌شود.

(iii) بنا بر قضیهٔ ۱.۷، $\mathcal{A}$ با $\mathrm{M}_{\frac{n}{r}}(\Delta)$ مشابه است، که در آن $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ و Δ یک $\mathbb{R}$-جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در $\mathrm{M}_r(\mathbb{H})$ است. بنا بر قضیهٔ فروبنیوس، $\Delta \cong \mathbb{H}$ یا $\Delta \cong \mathbb{C}$ یا $\Delta \cong \mathbb{R}$. پس بنا بر قضیهٔ اسکولم-نوتر، $\Delta \sim \mathbb{H}1_{\mathrm{M}_r(\mathbb{H})}$ یا $\Delta \sim \mathbb{C}1_{\mathrm{M}_r(\mathbb{H})}$ یا $\Delta \sim \mathbb{R}1_{\mathrm{M}_r(\mathbb{H})}$. در نتیجه، $r = 1$ زیرا Δ در $\mathrm{M}_r(\mathbb{H})$ تحویل‌ناپذیر است. بنابراین، $\Delta \sim \mathbb{H}$ یا $\Delta \sim \mathbb{C}$ یا $\Delta \sim \mathbb{R}$، و لذا، با استفاده از قضیهٔ ۱.۷، برهان کامل می‌شود. □

گزارهٔ زیر نتیجه‌ای سرراست از قضیهٔ بالاست.

قضیه ۳.۷. *(i) هرگردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های تحویل‌پذیر حقیقی از اندازهٔ بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هرگردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر حقیقی مثلثی‌پذیر است.*

(ii) هرگردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های مختلط از اندازهٔ بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هرگردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های مختلط مثلثی‌پذیر است.

(iii) هرگردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی از اندازهٔ بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هر گردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی مثلثی‌پذیر است.

اثبات. احکام تحویل‌پذیری به روشنی از قضیهٔ پیشین نتیجه می‌شوند. احکام مثلثی‌پذیری از احکام متناظر تحویل‌پذیری به همراه لم مثلثی‌سازی نتیجه می‌شوند. □

۸. انواعی از ماتریس‌ها و عملگرهای خطی

در این بخش، به اختصار انواعی از ماتریس‌ها، از جمله ماتریس‌ها و عملگرهای خطی یکانی، هرمیتی، نرمال، و معین مثبت، را در چارچوب ماتریس‌ها یا جبر خطی کواترنیونی معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آنها، از جمله ارتباط بین این مفاهیم، را بررسی می‌کنیم. این مفاهیم به طور طبیعی از همزادهای حقیقی و مختلط‌شان اقتباس شده‌اند. تمامی گزاره‌هایی که در پی خواهند آمد در چارچوب ماتریس‌ها یا جبر خطی مختلط برقرارند. همزادهای حقیقی آنها در بیشترِ موارد برقرارند و در کمترِ موارد با اندکی تغییرِ توام با تدبیر در صورت گزاره‌ها برقرار هستند. از جمله، در این بخش، قضیهٔ کلاسیک مثلثی‌سازی شور[۴۲] را برای ماتریس‌های کواترنیونی اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۸. ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را هرمیتی[۴۳] یا خودالحاق گوییم هر گاه $A^* = A$، و هرمیتی کج یا شبهه هرمیتی[۴۴] گوییم هر گاه $A^* = -A$. ماتریس A را یکانی[۴۵] گوییم هر گاه وارون‌پذیر بوده و به علاوه $A^{-1} = A^*$. همچنین، A را نرمال[۴۶] گوییم هر گاه $A^*A = AA^*$. گردایهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را خودالحاق گوییم هر گاه $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$، که در آن $\mathcal{F}^* := \{A^* : A \in \mathcal{F}\}$.

شایان گفتن است که ماتریس‌های حقیقی به ترتیب هرمیتی، شبهه هرمیتی، یا یکانی را متقارن، پاد (شبهه) متقارن، یا متعامد می‌خوانند.

تعریف ۲.۸. ماتریس‌های $A, B \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را به طور یکانی هم‌ارز یا به طور یکانی مشابه گوییم هر گاه یک ماتریس یکانی $U \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری که $B = U^*AU$.

به روشنی می‌توان بررسی کرد که هم‌ارزی یکانی ماتریس‌ها یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ تعریف می‌کند. نیز روشن است که یک ماتریس به ترتیب هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یا یکانی است اگر و

[42] Schur's triangularization theorem
[43] Hermitian
[44] Skew hermitian
[45] Unitary
[46] Normal

تنها اگر یک هم‌ارز یکانی‌اش هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یا یکانی باشد. به طور مشابه می‌توان مفهوم هم‌ارزی یکانی را برای خانواده‌های ماتریس‌ها تعریف کرد و به آسانی دید که هم‌ارزی یکانی خانواده‌های ماتریس‌ها یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ توانی $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ تعریف می‌کند.

تعریف ۳.۸. خانوادهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را به طور یکانی مثلثی‌پذیر گوییم هر گاه یک ماتریس یکانی $U \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری که U^*AU به ازای هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ بالامثلثی است. ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را مثلثی‌پذیر یکانی خوانیم هر گاه $\{A\}$ مثلثی‌پذیر یکانی باشد.

بخش دوم قضیهٔ زیر معروف به قضیهٔ مثلثی‌سازی شور حکم می‌کند که هر ماتریس کواترنیونی مثلثی‌پذیرِ یکانی است. به روشنی استدلال زیر برای ماتریس‌های مختلط برقرار است غیر از اینکه در برهان باید از بخش دوم قضیهٔ ۳.۷ استفاده کرد. همچنین قضیهٔ زیر برای ماتریس‌های حقیقی نیز برقرار است غیر از اینکه در صورت قضیه باید فرض کرد ماتریس‌ها هر یک به تنهایی مثلثی‌پذیرند و دیگر اینکه در برهان باید به قسمت نخست قضیهٔ ۳.۷ استناد کرد.

قضیه ۴.۸. *(i) هر گردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی مثلثی‌پذیر یکانی است. یعنی، به ازای هر گردایهٔ جابه‌جایی $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$، یک ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که گردایهٔ $U^*\mathcal{F}U$ متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است.*

*(ii) (**مثلثی‌سازی شور**) هر ماتریس کواترنیونی مثلثی‌پذیر یکانی است. یعنی، به ازای هر $A \in M_n(\mathbb{H})$، یک ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که ماتریس U^*AU بالامثلثی است.*

اثبات. به روشنی تنها کافی است (i) را ثابت کنیم. برای این منظور، نخست توجه کنید که از بخش سوم قضیهٔ ۳.۷ نتیجه می‌شود که هر گردایهٔ جابه‌جایی $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ مثلثی‌پذیر است. فرض کنید گردایهٔ جابه‌جایی $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ داده شده باشد. در نتیجه پایه‌ای مرتب مانند $\mathcal{B}_۰ = (v_i)_{i=۱}^n$ برای $\mathbb{H}^n$ وجود دارد که نمایش ماتریسی تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}_۰$ بالامثلثی است. با انجام فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت بر اعضای پایهٔ $\mathcal{B}_۰ = (v_i)_{i=۱}^n$ پایهٔ مرتب متعامد یکهٔ $\mathcal{B}_۱ = (u_i)_{i=۱}^n$ را به دست می‌آوریم. به روشنی ماتریس نمایش تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathcal{B}_۱ = (u_i)_{i=۱}^n$ نیز بالامثلثی است. ولی ماتریس نمایش تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ استاندارد $\mathbb{H}^n$، یعنی

$\mathcal{B}_۲ := (e_i)_{i=۱}^{n}$، برابر A است. در نتیجه تبدیل یکانی مشخص شده توسط ماتریس یکانی U، که ستون‌های آن $u_۱, \ldots, u_n$ هستند، هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ را بالامثلثی می‌کند. به عبارت دیگر، $U^*\mathcal{F}U$ متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است. این برهان را کامل می‌کند. □

قضیهٔ زیر نتیجه‌ای جالب از قضیهٔ مثلثی‌سازی شور است.

قضیه ۵.۸. *فرض کنید* $n \in \mathbb{N}$ *و* $A \in M_n(\mathbb{H})$*. در این صورت*

$$\sigma(A) = \left\{p \in \mathbb{H} : A^۲ - ۲Re(p)A + |p|^۲ I_n \notin GL_n(\mathbb{H})\right\}.$$

اثبات. با توجه به قضیهٔ مثلثی‌سازی شور و لم ۵.۵، بدون آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ بالامثلثی است، که در این صورت بنا به قضیهٔ ۵.۱۹، داریم $\sigma(A) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathtt{Sim}(a_{ii})$، که در آن a_{ii}ها $(۱ \leq i \leq n)$ درایه‌های قطری ماتریس A هستند. نخست نشان می‌دهیم

$$\sigma(A) \subseteq \left\{p \in \mathbb{H} : A^۲ - ۲\mathtt{Re}(p)A + |p|^۲ I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})\right\}.$$

برای این منظور، با توجه به برابری $\sigma(A) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathtt{Sim}(a_{ii})$ و اینکه سمت راست شمول بالا تحت هر تبدیل تشابهی بسته است، کافی است نشان دهیم $A^۲ - ۲\mathtt{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^۲ I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})$ به ازای هر $۱ \leq i \leq n$. ولی از آنجا که ماتریس A بالامثلثی است، به روشنی، به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، درایهٔ (ii)ام ماتریس بالامثلثی $A^۲ - ۲\mathtt{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^۲ I_n$ برابر $a_{ii}^۲ - ۲\mathtt{Re}(a_{ii})a_{ii} + |a_{ii}|^۲ = ۰$ است. این ایجاب می‌کند $A^۲ - ۲\mathtt{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^۲ I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})$، به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، که همان حکم مطلوب نظر ماست. حال، فرض کنید $p \in \mathbb{H}$، که $A^۲ - ۲\mathtt{Re}(p)A + |p|^۲ I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})$، دلخواه باشد. دو حالت می‌توان در نظر گرفت. نخست، اگر $p \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$(A - pI_n)^۲ = A^۲ - ۲pA + p^۲ I_n = A^۲ - ۲\mathtt{Re}(p)A + |p|^۲ I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H}),$$

و لذا $A - pI_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})$، که به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند $\ker(A - pI_n) \neq ۰$. بنابراین، در این حالت خواهیم داشت $p \in \sigma(A)$. حالت دیگر این است که $p \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$. در این صورت، p یک ریشهٔ کواترنیونی و ناحقیقی معادلهٔ با ضرایب حقیقی $x^۲ - ۲\mathtt{Re}(p)x + |p|^۲ = ۰$ خواهد بود. از

آنجا که $(a_{ii}^{۲} - ۲\mathrm{Re}(p)a_{ii} + |p|^{۲})$ها $(۱ \le i \le n)$ درایه‌های قطری ماتریس بالامثلثی وارون‌ناپذیر $A^{۲} - ۲\mathrm{Re}(p)A + |p|^{۲}I_n$ هستند، نتیجه می‌گیریم که $a_{jj}^{۲} - ۲\mathrm{Re}(p)a_{jj} + |p|^{۲} = ۰$ به ازای یک $۱ \le j \le n$. ولی $p^{۲} - ۲\mathrm{Re}(p)p + |p|^{۲} = ۰$. اکنون از نتیجهٔ ۴.۲ درمی‌یابیم که p و a_{jj} مشابه هستند. این امر ایجاب می‌کند که در این حالت نیز $p \in \bigcup_{i=۱}^{n} \mathtt{Sim}(a_{ii}) = \sigma(A)$. بنابراین،

$$\left\{p \in \mathbb{H} : A^{۲} - ۲\mathrm{Re}(p)A + |p|^{۲}I_n \notin \mathtt{GL}_n(\mathbb{H})\right\} \subseteq \sigma(A).$$

این برهان را کامل می‌کند. □

تعریف ۶.۸. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(D)$ را قطری‌پذیر[۴۷] گوییم هرگاه $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(D)$ مشابه با خانواده‌ای از ماتریس‌های قطری باشد. به عبارت دیگر، یک ماتریس وارون‌پذیر مانند $P \in \mathtt{M}_n(D)$ موجود باشد به طوری که $P^{-۱}AP$ به ازای هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ قطری است. ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(D)$ را قطری‌پذیر خوانیم هرگاه $\{A\}$ قطری‌پذیر باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را به طور یکانی قطری‌پذیر[۴۸] گوییم هرگاه $\mathcal{F}$ در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ به طور یکانی هم‌ارز با خانواده‌ای از ماتریس‌های قطری باشد. یعنی، یک ماتریس یکانی مانند $U \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری که U^*AU به ازای هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$ قطری است. به طور طبیعی، ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ را به طور یکانی قطری‌پذیر خوانیم هرگاه $\{A\}$ به طور یکانی قطری‌پذیر باشد.

تمامی بخش‌های گزارهٔ زیر برای ماتریس‌های مختلط نیز برقرار است. در ارتباط با ماتریس‌های حقیقی، حکم مربوط به ماتریس‌های هرمیتی (متقارن در حالت حقیقی) برای ماتریس‌های حقیقی نیز برقرار است. احکام دیگر مربوط به ماتریس‌های نرمال، شبهه هرمیتی (پادمتقارن)، و یکانی (متعامد) حقیقی برقرارند با این فرض اضافه که ماتریس‌ها باید مثلثی‌پذیر فرض شوند. محض نمونه، نتیجهٔ مربوط به ماتریس‌های پادمتقارن حقیقی شکل سادهٔ زیر را پیدا می‌کند: ماتریس صفر تنها ماتریس مثلثی‌پذیر پادمتقارن حقیقی است.

گزاره ۷.۸. *(i) فرض کنید $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$. در این صورت ماتریس A نرمال است اگر و تنها اگر A به طور یکانی قطری‌پذیر باشد. بنابراین، ماتریس A هرمیتی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی*

---
[47] Diagonalizable
[48] Unitarily diagonalizable

$U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری‌که U^*AU ماتریسی قطری و حقیقی است. ماتریس A شبه هرمیتی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری‌که U^*AU ماتریس قطری است و درایه‌های قطر اصلی آن اعدادی مختلط و موهومی محض هستند. ماتریس A یکانی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری‌که U^*AU ماتریس قطری است و درایه‌های قطر اصلی آن اعدادی مختلط با طول واحد هستند.

(ii) یک گردایهٔ جابه‌جایی از ماتریس‌ها قطری‌پذیرِ یکانی است اگر و تنها اگر متشکل از ماتریس‌های نرمال باشد.

(iii) یک گردایهٔ خودالحاق از ماتریس‌ها قطری‌پذیرِ یکانی است اگر و تنها اگر مثلثی‌پذیرِ یکانی باشد.

اثبات. (i) تنها کافی است حکم نخست را ثابت کنیم. احکام دیگر نتیجهٔ سرراستی از حکم نخست هستند. بخش «اگر» حکم بدیهی است. پس کافی است بخش «تنها اگر» حکم را ثابت کنیم. برای این منظور، فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{H})$ ماتریسی نرمال باشد. بنا بر بخش نخست قضیهٔ ۴.۸، یک ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری‌که $U^*\{A, A^*\}U$ متشکل از دو ماتریس بالامثلثی است. در نتیجه U^*AU هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی است. بنابراین U^*AU قطری است. این برهان را کامل می‌کند.

(ii) بخش «تنها اگر» حکم بدیهی است. بخش «اگر» حکم مانند بخش «تنها اگر» (i) ثابت می‌شود.

(iii) ایدهٔ برهان دقیقا همان ایدهٔ دو برهان قبلی است. بخش «تنها اگر» حکم بدیهی است. بخش «اگر» حکم مانند بخش «تنها اگر» (i) ثابت می‌شود. به طور دقیق، فرض کنید $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$ گردایه‌ای خودالحاق و مثلثی‌پذیر یکانی باشد به طوری‌که یک ماتریس یکانی $U \in M_n(\mathbb{H})$ موجود باشد به طوری که گردایهٔ $U^*\mathcal{F}U$ متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی باشد. در نتیجه به ازای هر ماتریس $A \in \mathcal{F}$، دو ماتریس U^*AU, U^*A^*U بالامثلثی‌اند. ولی $(U^*AU)^* = U^*A^*U$. بنابراین، U^*AU ماتریسی قطری است. این حکم را ثابت می‌کند. □

تعریف ۸.۸. ماتریس $P \in M_n(\mathbb{H})$ را مثبت یا معین مثبت[49] گوییم، و می‌نویسیم $P > 0$، هر گاه به ازای هر $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$، $x^*Px > 0$، یعنی x^*Px حقیقی و مثبت باشد. ماتریس $N \in M_n(\mathbb{H})$ را

[49] Positive definite

نامنفی یا نیم‌معین مثبت[۵۰] گوییم، و می‌نویسیم $N \geq ۰$، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{H}^n$، $x^*Nx \geq ۰$، یعنی x^*Nx حقیقی و نامنفی باشد.

تعریف معین مثبت و نامنفی بودن برای ماتریس‌های مختلط با تعریف بالا یکسان است. تعریف معین مثبت بودن و نامنفی بودن برای ماتریس‌های حقیقی به طور یکسان انجام می‌شود با این فرض اضافه که هر چنین ماتریسی هرمیتی (متقارن) فرض می‌شود؛ یعنی، ماتریس‌های معین مثبت و نامنفی حقیقی بنا به فرض هرمیتی (متقارن) هستند. روشن است که به ازای ماتریس داده‌شدهٔ $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، به ترتیب داریم $A \geq ۰$ یا $A > ۰$ اگر و تنها اگر به ازای یک ماتریس یکانی $U \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ داشته باشیم $U^*AU \geq ۰$ یا $U^*AU > ۰$. همچنین، روشن است که هر ماتریس قطری با درایه‌های مثبت (به ترتیب: نامنفی) ماتریسی مثبت (به ترتیب: نامنفی) است. دیگر اینکه اگر $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ ماتریسی هرمیتی باشد، $N, P \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، $N \geq ۰$ و $P > ۰$، آنگاه $ANA \geq ۰$ و $APA \geq ۰$. در حالتی که $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ ماتریسی هرمیتی و وارون‌پذیر باشد و $N, P \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، خواهیم داشت $N \geq ۰$ $(P > ۰)$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $ANA \geq ۰$ $(APA > ۰)$.

قضیهٔ زیر برای ماتریس‌های حقیقی و مختلط نیز برقرار است.

قضیه ۹.۸. *ماتریس $A \in M_n(\mathbb{H})$ معین مثبت (به ترتیب: نامنفی) است اگر و تنها اگر A هرمیتی و اعضای $\sigma(A)$ حقیقی و مثبت (به ترتیب: حقیقی و نامنفی) باشند. بنابراین، هر چنین ماتریسی به طور یکانی قطری‌پذیر است و همهٔ درایه‌های قطری ماتریس قطری متناظر به ماتریس داده شده مثبت (به ترتیب: نامنفی) هستند.*

اثبات. کافی است حکم نخست را ثابت کنیم. حکم دیگر نتیجهٔ آنی حکم نخست است. حکم را برای ماتریس‌های مثبت ثابت می‌کنیم. حکم دیگر به طور مشابه به اثبات می‌رسد. ابتدا فرض کنید $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ معین مثبت باشد. فرض کنید $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{۰\}$. از آنجا که $x^*Ax \in \mathbb{R}$، پس

$$x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \overline{x^*Ax} = x^*Ax.$$

از این رو، $x^*(A^* - A)x = ۰$. حال فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ راست $A^* - A$ و $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{۰\}$

---
[50] Positive semidefinite

یک بردار ویژهٔ راست متناظر با λ باشد. داریم

$$\circ = x^*(A^* - A)x = x^*x\lambda = |x|^{۲}\lambda.$$

از آنجا که $|x|^{۲} > \circ$، پس $\lambda = \circ$. از طرفی، داریم $(A^* - A)^* = A - A^* = -(A^* - A)$. در نتیجه، $A^* - A$ قطری‌پذیر است و $\sigma(A^* - A) = \{\circ\}$. بنابراین، $A^* - A = \circ$ که نتیجه می‌دهد $A^* = A$. حال فرض کنید $\lambda \in \sigma(A)$. داریم $|x|^{۲}\lambda = x^*x\lambda = x^*Ax$، که در آن x یک بردار ویژهٔ متناظر به مقدار ویژهٔ λ است. اکنون، از آنجا که x^*Ax حقیقی و مثبت است، از رابطهٔ بالا درمی‌یابیم که λ نیز حقیقی و مثبت است. برعکس، فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{H})$ هرمیتی و اعضای $\sigma(A)$ حقیقی و مثبت باشند. حال، از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که ماتریس A به طور یکانی هم‌ارز با یک ماتریس قطری و با درایه‌های قطری مثبت است. ولی هر چنین ماتریسی معین مثبت است. بنابراین، ماتریس A معین مثبت است. این برهان را کامل می‌کند. □

بخش‌های دوم و سوم گزارهٔ زیر در واقع [۱۴، گزاره‌های ۱.۳.۳ و ۱.۴.۳] هستند. به طور طبیعی، بخش نخست گزاره نیز با الهام از گزاره‌های یادشده تنظیم شده است. دوباره یادآور می‌شویم که ماتریس‌های حقیقی یکانی ماتریس‌های متعامد نامیده می‌شوند. و همچنین در تعریف ماتریس‌های معین مثبت و ماتریس‌های نامنفی حقیقی، این ماتریس‌ها هرمیتی (متقارن یا خودالحاق) فرض می‌شوند.

گزاره ۱۰.۸. *(i) ماتریس $Z \in M_n(\mathbb{C})$، به ترتیب، هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر $\varepsilon(Z) \in M_{۲n}(\mathbb{R})$ چنین باشد.*

(ii) ماتریس $P \in M_n(\mathbb{H})$، به ترتیب، هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر $\varepsilon'(P) \in M_{۲n}(\mathbb{C})$ چنین باشد.

(iii) ماتریس $P \in M_n(\mathbb{H})$، به ترتیب، هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر $\varepsilon''(P) \in M_{۴n}(\mathbb{R})$ چنین باشد.

اثبات. به روشنی به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ و $p \in \mathbb{H}$، داریم

$$\varepsilon(\overline{z}) = \varepsilon(z)^t,\ \varepsilon'(\overline{p}) = \varepsilon'(p)^*,\ \varepsilon''(\overline{p}) = \varepsilon(p)^t.$$

حال فرض کنید $Z = (z_{ij}) \in \mathtt{M}_n(\mathbb{C})$ و $P = (p_{ij}) \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، که در آن $1 \leq i, j \leq n$ و $z_{ij} \in \mathbb{C}$ و $p_{ij} \in \mathbb{H}$، و لذا $Z^* = (\overline{z_{ji}}) \in \mathtt{M}_n(\mathbb{C})$ و $P^* = (\overline{p_{ji}}) \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\varepsilon(Z^*) = \varepsilon\Big((\overline{z_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon(\overline{z_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon(z_{ji})^t\Big) = \Big(\varepsilon(z_{ij})\Big)^t = \varepsilon(Z)^t,$$

$$\varepsilon'(P^*) = \varepsilon'\Big((\overline{p_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon'(\overline{p_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon'(p_{ji})^*\Big) = \Big(\varepsilon'(p_{ij})\Big)^* = \varepsilon'(P)^*,$$

و

$$\varepsilon''(P^*) = \varepsilon''\Big((\overline{p_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon''(\overline{p_{ji}})\Big) = \Big(\varepsilon''(p_{ji})^t\Big) = \Big(\varepsilon''(p_{ij})\Big)^t = \varepsilon''(P)^t.$$

اکنون روشن است که تمامی احکام (i)، (ii)، و (iii) به آسانی از سه رابطهٔ اخیر حاصل می‌شوند. □

همان طور که در آغاز بخش چهارم این مقاله یادآور شدیم، در سایهٔ قضیهٔ نمایش ریس، مفهوم الحاقی عملگرهای خطی و کران‌دار روی فضاهای هیلبرت تعریف می‌شود. در نتیجه تعاریف زیر را به طور طبیعی در چارچوب فضاهای هیلبرت کواترنیونی خواهیم داشت. تعاریف را در چارچوب فضاهای ضرب داخلی کواترنیونی متناهی‌بعد ارائه می‌دهیم هر چند که می‌توان این تعاریف را در چارچوب فضاهای هیلبرت کواترنیونی، حتی برای عملگرهای خطی و نه لزوما کران‌دار، انجام داد.

تعریف ۱۱.۸. فرض کنید $(V, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی کواترنیونی متناهی‌بعد باشد. عملگر خطی (و لذا کران‌دار) $T \in \mathcal{L}(V)$ را هرمیتی گوییم هر گاه $T^* = T$؛ هرمیتی کج یا شبهه هرمیتی گوییم هر گاه $T^* = -T$؛ T را نرمال گوییم هر گاه $T^*T = TT^*$؛ T را یکانی گوییم هر گاه $T^*T = TT^* = I_V$، که در آن $T^* \in \mathcal{L}(V)$ نشانگر عملگر الحاقی T است و I_V نشانگر عملگر خطی همانی روی V است. همچنین $T \in \mathcal{L}(V)$ را مثبت یا معین مثبت (به ترتیب نامنفی) گوییم، و می‌نویسیم $T > 0$ (به ترتیب $T \geq 0$)، هر گاه $\langle Tx, x \rangle > 0$ (به ترتیب $\langle Tx, x \rangle \geq 0$) به ازای هر $x \in V \setminus \{0\}$.

به آسانی می‌توان دید که عملگر خطی $T \in \mathcal{L}(V)$ یکانی است اگر و تنها اگر $T^*T = I_V$؛ اگر و تنها اگر $TT^* = I_V$؛ اگر و تنها اگر $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ به ازای هر $x, y \in V$. نیز توجه کنید ماتریس $A \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، به ترتیب، هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر ماتریس A به عنوان یک عملگر خطی روی فضای ضرب داخلی کواترنیونی $\mathbb{H}^n$ به همراه ضرب داخلی استانداردش یک عملگر هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی باشد.

گزارهٔ بعدی، که برای تبدیلات خطی روی فضاهای حقیقی و همچنین فضاهای مختلط برقرار است، نتیجهٔ سرراستی از مشاهدات زیرین است. البته مشاهدات زیر در چارچوب فضاهای حقیقی و مختلط نیز برقرارند. فرض کنید $(V, \langle .,. \rangle)$ مطابق تعریف بالا، $T \in \mathcal{L}(V)$، و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ مرتب متعامد یکه برای V باشد. در این صورت $[T^*]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^*$. برای بررسی این مشاهدهٔ سرراست، کافی است توجه کنیم که اگر $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^{n}$ و $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$، آنگاه $a_{ij} = \langle Tu_j, u_i \rangle$ $(1 \leq i, j \leq n)$. دیگر اینکه اگر V یک فضای راست برداری n-بعدی روی یک حلقهٔ تقسیم مانند D و $\mathcal{B}$ یک پایه برای V باشد، آنگاه نگاشت $\phi : \mathcal{L}(V) \to \mathtt{M}_n(D)$ تعریف‌شده توسط $\phi(T) = [T]_{\mathcal{B}}$ $(T \in \mathcal{L}(V))$ یک‌به‌یک، پوشا، و حافظ جمع و ضرب است. به ویژه، اگر $S, T \in \mathcal{L}(V)$ باشند، آنگاه

$$[S+T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} + [T]_{\mathcal{B}},\ [ST]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}},\ \big(S = T \Longleftrightarrow [S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\big).$$

نیز به ویژه اینکه به ازای هر تبدیل خطی $T \in \mathcal{L}(V)$، به ترتیب، داریم، $T = I_V$ یا $T = 0_V$ اگر و تنها اگر $[T]_{\mathcal{B}} = I_n = (\delta_{ij}) \in \mathtt{M}_n(D)$ یا $[T]_{\mathcal{B}} = 0_n = (0) \in \mathtt{M}_n(D)$.

گزاره ۱۲.۸. *فرض کنید $(V, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی کواترنیونی راست متناهی‌بعد با بعد $n \in \mathbb{N}$، $T \in \mathcal{L}(V)$، و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای V باشد. در این صورت عملگر خطی $T \in \mathcal{L}(V)$ به ترتیب، هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر ماتریس $[T]_{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{H})$، هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی باشد.*

اثبات. برهان چهار حکم نخست نتیجهٔ سرراستی از مشاهداتی است که پیش از بیان قضیه به آنها توجه کردیم. در حالتی که $T \in \mathcal{L}(V)$ معین مثبت یا نامنفی است، نخست توجه کنید که به روشنی داریم

$$\langle x, y \rangle = ([y]_{\mathcal{B}})^*[x]_{\mathcal{B}},\ (x, y \in V).$$

در نتیجه

$$\langle Tx, x \rangle = ([x]_{\mathcal{B}})^*[T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}},\ (x \in V).$$

اکنون، این برابری به روشنی حکم مورد نظر ما را ثابت می‌کند. □

حکم زیر نتیجه‌ای مفید و کارآمد از گزارهٔ ۱۲.۸ است. البته هر چند که گزارهٔ زیر در چارچوب فضاهای کواترنیونی ارائه شده است، ولی روشن است که برهانی یکسان با برهان گزارهٔ زیر همزاد آن را برای خانواده‌های ماتریس‌های حقیقی و مختلط نیز ثابت می‌کند.

نتیجه ۱۳.۸. *فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$ باشد. در این صورت $\mathcal{F}$ به ترتیب با خانواده‌ای از ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است اگر و تنها اگر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{H}^n$ موجود باشد به طوری که هر عضو $\mathcal{F}$ نسبت به این ضرب داخلی به ترتیب هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است.*

اثبات. نخست بخش «تنها اگر» حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{B} = (e_j)_{j=۱}^n$ نشانگر پایهٔ مرتب استاندارد برای $\mathbb{H}^n$ باشد. فرض کنید خانوادهٔ $\mathcal{F}$ به ترتیب با خانواده‌ای از ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است. در نتیجه یک ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که خانوادهٔ $P^{-۱}\mathcal{F}P$ متشکل از به ترتیب ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است. به طور مرسوم اعضای $\mathcal{F}$ را به عنوان تبدیلات خطی که بر چپ فضای راست $\mathbb{H}^n$ از طریق ضرب ماتریسی عمل می‌کنند در نظر بگیرید. به روشنی $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}$. از سوی دیگر، اگر u_j $(۱ \leq j \leq n)$ نشانگر ستون jام ماتریس P باشد، آنگاه به روشنی $\mathcal{B}' := (u_j)_{j=۱}^n$ یک پایهٔ مرتب برای $\mathbb{H}^n$ است و داریم $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-۱}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}P = P^{-۱}\mathcal{F}P$. اکنون، ضرب داخلی $\langle.,.\rangle'$ روی $\mathbb{H}^n$ را با تعریف آن روی $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=۱}^n$ توسط $\langle u_j, u_j\rangle' := \delta_{ij}$ $(۱ \leq i, j \leq n)$ و سپس گسترش آن به $\mathbb{H}^n$ را به طور خطی تعریف کنید. به طور دقیق‌تر،

$$\langle x, y\rangle' := ([y]_{\mathcal{B}'})^*[x]_{\mathcal{B}'},\ \ (x, y \in \mathbb{H}^n).$$

چون $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=۱}^n$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی $(\mathbb{H}^n, \langle.,.\rangle')$ است، و $P^{-۱}\mathcal{F}P$ متشکل از به ترتیب ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است، و به علاوه $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-۱}\mathcal{F}P$، حکم از گزارهٔ قبل نتیجه می‌شود.

برهان بخش «اگر» حکم آسان است. فرض کنید یک ضرب داخلی $\langle.,.\rangle'$ روی $\mathbb{H}^n$ موجود باشد به طوری که هر عضو به عنوان یک تبدیل خطی $\mathcal{F}$ نسبت به این ضرب داخلی به ترتیب هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است. یک پایهٔ متعامد یکه $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=۱}^n$ برای فضای

ضرب داخلی $(\mathbb{H}^n, \langle .,. \rangle')$ اختیار کنید. بنا به قضیهٔ قبل $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$ متشکل از ماتریس‌های به ترتیب هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است. ولی $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}P = P^{-1}\mathcal{F}P$. این برهان را کامل می‌کند. □

۹. پیش‌درآمدِ برهان قضیهٔ آوئرباخ

در این بخش مقدمات لازم برای ارائهٔ برهان قضیهٔ آوئرباخ را در طی چند لم فراهم می‌آوریم. برای این منظور با لمی آسان شروع می‌کنیم.

لم ۱.۹. *فرض کنید $\mathcal{G}$ بستار یک گروه کران‌دار $\mathcal{G}_0 \subseteq M_n(\mathbb{H})$ باشد. در این صورت $\mathcal{G}$ زیرگروهی فشرده از $M_n(\mathbb{H})$ است.*

اثبات. نخست توجه کنید که از قضیهٔ هاینه-بورل[51] نتیجه می شود که $\mathcal{G}$ فشرده است. می‌ماند نشان می‌دهیم که $\mathcal{G}$ زیرگروهی از $M_n(\mathbb{H})$ است. تنها حکم غیر بدیهی این است که نشان دهیم $\mathcal{G}$ تحت وارون‌گیری بسته است. برای این منظور، فرض کنید $A \in \mathcal{G}$ دلخواه باشد. پس دنبالهٔ $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{G}_0$ موجود است به طوری که $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. به روشنی، $(A_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathcal{G}_0$ است. حال از آنجا که $\mathcal{G}$ فشرده است، پس زیردنبالهٔ $(A_{n_k}^{-1})_{k=1}^{\infty}$ از دنبالهٔ $(A_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ موجود است که به عضوی مانند $B \in \mathcal{G}$ همگراست. از طرفی، $\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A$. بنابراین، $I_n = \lim_{k\to\infty} A_{n_k}A_{n_k}^{-1} = AB$ و $I_n = \lim_{k\to\infty} A_{n_k}^{-1}A_{n_k} = BA$. پس A وارون‌پذیر است و $A^{-1} = B \in \mathcal{G}$. □

لم زیر روایت کواترنیونی [۶، گزارهٔ ۵.۳] است.

لم ۲.۹. *فرض کنید $\mathcal{G}$ یک گروه کران‌دار از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$ باشد. در این صورت نگاشت*

$$|.|_{\mathcal{G}} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R},\ |x|_{\mathcal{G}} := \sup\left\{\|Tx\| :\ T \in \mathcal{G}\right\},\ (x \in \mathbb{H}^n)$$

خوش‌تعریف است و یک نرم روی $\mathbb{H}^n$ تعریف می‌کند. به علاوه، هر عضو $\mathcal{G}$ نسبت به نرم $|.|_{\mathcal{G}}$ یک ایزومتری (یک‌متری) است؛ و بنابراین، طیف هر عضو $\mathcal{G}$ متشکل از اسکالرهایی با طول واحد است.

---
[51] Heine-Borel theorem

اثبات. برهان بخش نخست حکم، که کاملا سرراست و بدیهی است، به جهت اختصار حذف می‌شود. برای دیدن بخش دیگر حکم، فرض کنید $T \in \mathcal{G}$ و $\lambda \in \sigma(T)$ اعضایی دلخواه باشند. یک بردار ویژهٔ $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ متناظر به مقدار ویژهٔ $\lambda \in \sigma(T)$ اختیار کنید. به روشنی می‌توان نوشت

$$|x|_{\mathcal{G}} = |Tx|_{\mathcal{G}} = |x\lambda|_{\mathcal{G}} = |x|_{\mathcal{G}}|\lambda|.$$

در نتیجه $|\lambda| = 1$. این برهان را کامل می‌کند. □

سه لم بعدی بر اساس برهان [۱۳، قضیهٔ ۵.۱.۳] تنظیم شده‌اند.

لم ۳.۹. *فرض کنید $\mathcal{G}$ یک گروه فشرده در $M_n(\mathbb{H})$ باشد. فرض کنید*

$$E_{\mathcal{G}} := \Big\{A \in M_n(\mathbb{H}) : \quad A \geq 0, \ x^*Ax \leq |x|^2_{\mathcal{G}}, \ \forall x \in \mathbb{H}^n\Big\},$$

که در آن

$$|x|_{\mathcal{G}} := \sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\|, \ (x \in \mathbb{H}^n).$$

در این صورت نگاشت زیر خوش‌تعریف و پیوسته است

$$f : E_{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}^+_0, \ f(A) := \sqrt{\det\nolimits_{\mathbb{C}} A} := \sqrt{\det \varepsilon'(A)} = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k}, \ (A \in E_{\mathcal{G}}),$$

که در آن $\mathbb{R}^+_0 := [0, +\infty)$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ و $m_1, \ldots, m_k$ به ترتیب مقادیر ویژهٔ راست $A \in E_{\mathcal{G}}$ و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژهٔ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ هستند. همچنین مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$ (نسبت به نرم عملگری $M_n(\mathbb{H})$) بسته وکران‌دار، و لذا فشرده، است. به علاوه، $E_{\mathcal{G}}$ محدب و ناتهی است؛ به ویژه $0_n, I_n \in E_{\mathcal{G}}$.

اثبات. فرض کنید $M := \sup_{A\in\mathcal{G}} \|A\|$ و $A \in E_{\mathcal{G}}$. از آنجا که A نامنفی است، بنا به بخش دوم گزارهٔ ۱۰.۸ $\varepsilon'(A) \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ نیز چنین است و لذا نگاشت f خوش‌تعریف است. از سوی دیگر، بنا بر قضیهٔ ۹.۸، A روی $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ به طور یکانی با یک ماتریس قطری حقیقی مشابه است. یعنی، یک ماتریس یکانی $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که U^*AU قطری است و $\mathrm{D}(U^*AU)$، مجموعهٔ

همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس U^*AU، حقیقی و نامنفی هستند. حال بنا بر گزارهٔ ۱۹.۵،

$$\sigma(A) = \mathtt{Sim}(\mathtt{D}(U^*AU)) = \mathtt{D}(U^*AU) \subseteq \mathbb{R}^+_\circ.$$

بنابراین، به ازای هر $A \in E_{\mathcal{G}}$، $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+_\circ$، و به علاوه

$$f(A) = \sqrt{\det \varepsilon'(A)} = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k},$$

که در آن $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ و $m_1, \ldots, m_k$ به ترتیب مقادیر ویژهٔ راست $A \in E_{\mathcal{G}}$ و چندگانگی‌های جبری این مقادیر ویژه هستند. پیوستگی f از پیوستگی نگاشت $\sqrt{\det \varepsilon'(.)}$ نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$ بسته و کران‌دار، و لذا فشرده، است. با توجه به تعریف مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$ و این واقعیت بدیهی که مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های نامنفی زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ است، درمی‌یابیم که $E_{\mathcal{G}}$ بسته است. برای اینکه ببینید $E_{\mathcal{G}}$ کران‌دار است، با نشان دادن اینکه $\sup \|E_{\mathcal{G}}\| := \sup_{A \in E_{\mathcal{G}}} \|A\| \leq M^2$ برهان را کامل می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید $A \in E_{\mathcal{G}}$ دلخواه بوده و ماتریس یکانی U مطابق بالا باشد. به روشنی داریم

$$\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |x|_{\mathcal{G}}^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M^2\|x\|^2 \leq M^2.$$

با نشان دادن اینکه $\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax = \|A\|$ حکم ثابت می‌شود زیرا $A \in E_{\mathcal{G}}$ دلخواه است. برای این منظور، از آنجا که ماتریس $U \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ یکانی است و U^*AU ماتریسی قطری با درایه‌های قطری نامنفی است، به روشنی داریم $U^*AU = P^2$ که در آن $P \geq \circ$ ماتریسی قطری است، و لذا $\|A\| = \|U^*AU\| = \|P^2\|$. به علاوه می‌توان نوشت

$$\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*U^*AUx = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*P^2x = \|P^2\| = \|A\|.$$

اینکه $E_{\mathcal{G}}$ محدب است و $\circ_n, I_n \in E_{\mathcal{G}}$، و لذا ناتهی است، به آسانی از تعریف $E_{\mathcal{G}}$ نتیجه می‌شود. این برهان را کامل می‌کند. $\square$

لم زیر، که براساس برهان [۱۳، قضیهٔ ۵.۱.۳] تنظیم شده است، حالت خاصی از قضیهٔ اصلی [۱۲] است. لم زیر را از جهت کامل بودن ارائهٔ مطلب می‌آوریم.

لم ۴.۹. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و ماتریس‌های $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ نامنفی باشند به طوری که یکی از آنها معین مثبت است. در این صورت*

$$\det \frac{A+B}{۲} \geq \sqrt{\det A}\,\sqrt{\det B},$$

و در آن برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $A = B$.

اثبات. بدون آنکه از کلیت کاسته شود، فرض کنید ماتریس A مثبت باشد. از روایت مختلط قضیهٔ ۹.۸ درمی‌یابیم که ماتریس معین مثبت $P \in \mathtt{M}_n(\mathbb{C})$ موجود است به طوری که $A = P^۲$. می‌توان نوشت

$$\frac{A+B}{۲} = \frac{۱}{۲}P(I_n + P^{-۱}BP^{-۱})P,$$

در نتیجه

$$\det \frac{A+B}{۲} = \frac{۱}{۲^n}(\det P)^۲ \det(I_n + P^{-۱}BP^{-۱}).$$

از آنجا که، به روشنی، ماتریس $P^{-۱}BP^{-۱}$ نامنفی است، باری دیگر از روایت مختلط قضیهٔ ۹.۸ نتیجه می‌گیریم که $P^{-۱}BP^{-۱}$ با یک ماتریس قطری $\mathtt{diag}(d_۱, \ldots, d_n)$ هم‌ارز یکانی است، که در آن d_iها $(۱ \leq i \leq n)$ مقادیر ویژهٔ ماتریس $P^{-۱}BP^{-۱}$ هستند. پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\left(\det(I_n + P^{-۱}BP^{-۱})\right)^۲ &= \prod_{i=۱}^{n}(۱ + d_i)^۲,\\
&\geq \prod_{i=۱}^{n} ۴d_i = ۴^n \prod_{i=۱}^{n} d_i,\\
&= ۴^n \det(P^{-۱}BP^{-۱}),\\
&= ۴^n \det(P)^{-۲} \det B.
\end{aligned}$$

اگر و تنها اگر

$$\det(I_n + P^{-1}BP^{-1}) \;\; \geq \;\; 2^n \det(P)^{-1} \sqrt{\det B}.$$

توجه کنید در نابرابری بالا، نابرابری اکید است مگر اینکه $d_i = 1$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$، و به طور معادل اگر و تنها اگر $P^{-1}BP^{-1} = I_n$، اگر و تنها اگر $A = P^2 = B$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\det \frac{A+B}{2} &= \frac{1}{2^n}(\det P)^2 \det(I_n + P^{-1}BP^{-1}),\\
&\geq \frac{1}{2^n}(\det P)^2 2^n \det(P)^{-1} \sqrt{\det B},\\
&= \det P \sqrt{\det B},\\
&= \sqrt{\det A}\sqrt{\det B},
\end{aligned}$$

که در آن برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $A = B$. این برهان را کامل می‌کند. □

لم ۵.۹. *فرض کنید $\mathcal{G}$ گروهی فشرده در $M_n(\mathbb{H})$ باشد. فرض کنید مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$ و نگاشت f مطابق لم ۳.۹ باشند. در این صورت یک عضو یگانهٔ $A \in E_{\mathcal{G}}$ وجود دارد به طوری که $f(A) = \sup\{f(P) : \; P \in E_{\mathcal{G}}\}$.*

اثبات. اینکه یک عضو $A \in E_{\mathcal{G}}$ وجود دارد به طوری که $f(A) = \sup\{f(P) : \; P \in E_{\mathcal{G}}\}$ از پیوستگی نگاشت f و فشردگی مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$ نتیجه می‌شود. فرض کنید اعضای $A, B \in E_{\mathcal{G}}$ موجود باشند به طوری که $f(A) = \sup\{f(P) : \; P \in E_{\mathcal{G}}\} = f(B)$. در نتیجه

$$f(A) = \sqrt{\det \varepsilon'(A)} = \sqrt{\det \varepsilon'(B)} = f(B).$$

ولی $E_{\mathcal{G}}$ محدب است. پس $\frac{A+B}{۲} \in E_{\mathcal{G}}$، و لذا

$$\begin{aligned}\sqrt{\det\Big(\frac{\varepsilon'(A)+\varepsilon'(B)}{۲}\Big)} &= \sqrt{\det\varepsilon'\Big(\frac{A+B}{۲}\Big)}\\ &= f\Big(\frac{A+B}{۲}\Big)\\ &\leq \sup\{f(P):\ P\in E_{\mathcal{G}}\}\\ &= \Big(\sqrt{\det\varepsilon'(A)}\Big)^{\frac{۱}{۲}}\Big(\sqrt{\det\varepsilon'(B)}\Big)^{\frac{۱}{۲}},\end{aligned}$$

و لذا

$$\det\Big(\frac{\varepsilon'(A)+\varepsilon'(B)}{۲}\Big) \leq \sqrt{\det\varepsilon'(A)}\,\sqrt{\det\varepsilon'(B)}.$$

این نابرابری، به همراه لم پیشین، یا قضیهٔ اصلی [۱۲]، ایجاب می‌کند

$$\det\Big(\frac{\varepsilon'(A)+\varepsilon'(B)}{۲}\Big) = \sqrt{\det\varepsilon'(A)}\,\sqrt{\det\varepsilon'(B)},$$

و از آنجا از شرط برابری نابرابری در لم پیشین، یا در قضیهٔ اصلی [۱۲]، نتیجه می‌گیریم که $\varepsilon'(A) = \varepsilon'(B)$، و لذا $A = B$. این برهان را کامل می‌کند. □

۱۰. روایت کواترنیونی قضیهٔ آوئرباخ

با مقدمات بخش پیشین در دست، اکنون آماده‌ایم قضیهٔ اصلی این فصل، که روایت کواترنیونی قضیهٔ آوئرباخ است، را ثابت کنیم. به روشنی، با اصلاح سرراست برهان زیر، به طور طبیعی، می‌توان روایت‌های حقیقی و مختلط قضیهٔ آوئرباخ را نیز ثابت کرد.

قضیه ۱.۱۰. *هر گروه کران‌دار از ماتریس‌های وارون‌پذیر کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{G}$ زیرگروهی کران‌دار از ماتریس‌های وارون‌پذیر در $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ باشد. با توجه به لم ۱.۹، و در صورت لزوم با جایگزین کردن بستار گروه کران‌دار $\mathcal{G}$ به جای $\mathcal{G}$، می‌توان فرض کرد که $\mathcal{G}$

زیرگروهی فشرده از ماتریس‌های وارون‌پذیر در $\mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ است. حال در سایهٔ نتیجهٔ ۱۳.۸، کافی است نشان دهیم یک ضرب داخلی روی $\mathbb{H}^n$ موجود است به طوری که هر عضو $\mathcal{G}$ به عنوان یک عملگر خطی نسبت به آن ضرب داخلی یکانی است. برای این منظور، مجموعهٔ $E_{\mathcal{G}}$، نگاشت f، و عضو یکتای $A \in E_{\mathcal{G}}$ را به طوری که $f(A) = \sup\{f(P) : \ P \in E_{\mathcal{G}}\}$، را مطابق لم ۵.۹ در نظر بگیرید. از آنجا که ماتریس A معین مثبت است، نگاشت

$$\langle .,. \rangle_A : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H},\ \langle x, y\rangle_A := x^*Ay, (x, y \in \mathbb{H}^n)$$

یک ضرب داخلی روی $\mathbb{H}^n$ تعریف می‌کند. ثابت خواهیم کرد که هر عضو دلخواه $T \in \mathcal{G}$ نسبت به ضرب داخلی $\langle .,. \rangle_A$ یکانی است. برای این منظور، نشان خواهیم داد $T^*AT = A$، که از آنجا به روشنی خواهیم داشت

$$\langle Tx, Ty\rangle_A = (Tx)^*ATy = x^*T^*ATy = x^*Ay = \langle x, y\rangle_A,$$

به ازای هر $x, y \in \mathbb{H}^n$، و این مطلب حکم را ثابت خواهد کرد. اما، به ازای عضو دلخواه دادهٔ شدهٔ $T \in \mathcal{G}$، به روشنی ماتریس $T^*AT \in \mathtt{M}_n(\mathbb{H})$ معین مثبت است و می‌توان نوشت

$$x^*(T^*AT)x = (Tx)^*A(Tx) \le |Tx|^{۲}_{\mathcal{G}} = |x|^{۲}_{\mathcal{G}},$$

به ازای هر $x \in \mathbb{H}^n$. در نتیجه، $T^*AT \in E_{\mathcal{G}}$. توجه کنید که آخرین برابری سمت راست در عبارت بالا از لم ۲.۹ به دست آمده است. از سوی دیگر

$$\begin{aligned} f(T^*AT) &= \sqrt{\det\left(\varepsilon'(T^*AT)\right)} \\ &= \sqrt{|\det \varepsilon'(T)|^{۲}}\sqrt{\det \varepsilon'(A)} \\ &= \sqrt{۱^{۲}}\sqrt{\det \varepsilon'(A)} \\ &= f(A). \end{aligned}$$

توجه کنید که در عبارت بالا برابری $|\det \varepsilon'(T)| = 1$ از لم ۲.۹ حاصل می‌شود. در نتیجه

$$f(A) = \sup\{f(P) : \ P \in E_{\mathcal{G}}\} = f(T^*AT).$$

ولی $A, T^*AT \in E_{\mathcal{G}}$. بنابراین، از لم ۵.۹ نتیجه می‌گیریم که $A = T^*AT$. این برهان را کامل می‌کند. □

مراجع

[1] H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéares, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **195** (1932), 1367–1369.

[2] B. Bollobás, *Linear Analysis. An Introductory Course*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Integration II, Chapters 7-9* (translated from French into English by S.K. Berberian), Springer Verlag, Berlin, 2004.

[4] W. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**(1) (1905), 430–434.

[5] P.M. Cohn, *Skew Fields: Theory of General Division Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] E. Deutsch and H. Schneider, Bounded groups and norm Hermitian matrices, *Linear Algebra Appl.*, **9** (1974), 9–27.

[7] P.K. Draxl, *Skew Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[8] I.N. Herstein, *Noncommutative Rings, Carus Mathematical Monographs*, no. 15, The Mathematical Association of America, 1968.

[9] T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag, New York, 1991.

[10] T.K. Lee and Y. Zhou, On irreducible and transitive subalgebras in matrix algebras, *Linear Multilinear Algebra*, **57**(7) (2009), 659–672.

[11] V.I. Lomonosov, H. Radjavi, and V.G. Troitsky, Sesquitransitive and localizing operator algebras, *Integral Equations Oper. Theory*, **60**(3) (2008), 405–418.

[12] L. Mirsky, An inequality for positive definite matrices, *Am. Math. Mon.*, **62**(6) (1955), 428–430.

[13] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer Verlag, New York, 2000.

[14] L. Rodman, *Topics in Quaternion Linear Algebra*, Princeton University Press, New Jersey, 2014.

[15] L.A. Wolf, Similarity of matrices in which elements are real quaternions, *Bull. Amer. Math. Sco.*, **42**(10) (1936), 737–743.

[16] B.R. Yahaghi, On F-algebras of algebraic matrices over a subfield F of the center of a division ring, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 599–613.

[17] B.R. Yahaghi, On irreducible semigroup of matrices with traces in a subfield, *Linear Algebra Appl.*, **383** (2004), 17–28.

[18] B.R. Yahaghi, *Reducibility Results on Operator Semigroups*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, Halifax, Canada, 2002.