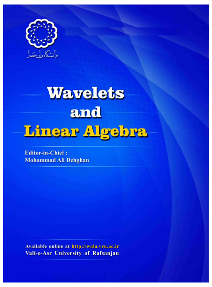
موجک‌ها و جبرخطی ۴(۳) (۱۳۹۷) ۸۱-۹۵



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

الگوریتم قاب اصلاح شده و تسریع همگرایی آن با روش چبیشف

حسن جمالی[*آ]، محسن کلاه‌دوز[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۰ اسفند ۱۳۹۶
پذیرفته شده: ۲۰ تیر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: اصغر رحیمی

کلمات کلیدی:

الگوریتم قاب، روش ریچاردسون، روش چبیشف، نرخ همگرایی.

چکیده

هدف این مقاله بهبود نرخ همگرایی الگوریتم قاب براساس روش‌های تکراری ریچاردسون و چبیشف است. ابتدا بر اساس روش تکراری ریچاردسون، نرخ همگرایی موجود در الگوریتم قاب را مربع نموده که در نتیجه تعداد تکرارها نصف شده و سرعت همگرایی افزایش می‌یابد، سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف این سرعت را نیز بهبود می‌بخشیم. اهمیت این روش‌ها بخصوص زمانی مشخص می‌شود که قاب مورد استفاده دارای عدد شرطی (نسبت کران بالا به کران پایین) بد وضع باشد.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: jamali@vru.ac.ir; jamalihassan28@yahoo.com (حسن جمالی)، mkolahdouz@stu.vru.ac.ir; mkolahdouz64@gmail.com (محسن کلاه‌دوز).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.82366.1162

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

در بیشتر مسایل پردازش سیگنال، برای بازسازی یک سیگنال مانند f در یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، اطلاعات آن سیگنال بصورت دنباله‌ای از اسکالرهای $\langle f, e_n \rangle$ بیان می‌شود که برای نمونه می‌توان به بازسازی یک سیگنال با استفاده از پایه‌های متعامد یکه و یا قاب‌ها اشاره کرد. اما سوال اساسی، چگونگی محاسبه این دنباله و یا حتی تقریب آن است. در این راستا برای تقریب بوسیله قاب‌ها تلاش‌هایی در قالب الگوریتم قاب و تسریع همگرایی آن از طریق روش چبیشف انجام گرفته است [۲، ۳].

در سراسر این مقاله H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، I یک مجموعه اندیس‌گذار شمارش‌پذیر و I_H عملگر همانی روی H را نمایش می‌دهند.

دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ در H یک قاب برای H نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که رابطه‌ی

$$A\left\|f\right\|^2 \leq \sum_{k\in I}\left|\langle f, f_k\rangle\right|^2 \leq B\left\|f\right\|^2,$$

برای هر $f \in H$ برقرار باشد. A و B به‌ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین را کران‌های بهینه قاب می‌گویند. برای این قاب عملگر قاب S به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$S : H \to H, \;\; Sf = \sum_{k\in I}\langle f, f_k\rangle f_k.$$

ثابت می‌شود [۲] که S عملگری معکوس‌پذیر، معین مثبت و خودالحاق بوده و

$$AI_H \leq S \leq BI_H. \qquad (۱.۱)$$

اکنون با توجه به خواص S فرمول بازسازی یک سیگنال برابراست با

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k\in I}\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k.$$

اما لازمه به‌کارگیری این فرمول، محاسبه معکوس عملگر قاب است که این موضوع وقتی H دارای بعد بالا و یا بعد نامتناهی باشد ممکن است پیچیده و یاحتی ناممکن باشد. با توجه به رابطه اخیر با قراردادن

$u = S^{-1}f$ مسأله بازنویسی f، معادل با مسأله یافتن جواب معادله عملگری

$$Su = f, \tag{۲.۱}$$

می‌باشد. در الگوریتم قاب ارائه شده در [۲]، جواب تقریبی این معادله با روشی تکراری و با نرخ همگرایی $\frac{B-A}{A+B}$ به‌دست می‌آید. با اعمال روش چبیشف بر روی آن، برای حالتی که عدد شرطی این معادله (نسبت کران بالا به کران پایین) بالا باشد، به روشی تکراری با نرخ همگرایی $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}$ که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{A}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}}$، منجر می‌شود [۳]. در واقع سرعت همگرایی در الگوریتم‌های عددی حل یک معادله عملگری با عملگر معین مثبت به عدد شرطی آن، که به‌صورت نسبت بزرگترین مقداروپژه بر کوچک‌ترین مقداروپژه تعریف می‌شود، وابسته است. در عملگر قاب، این مقادیرویژه، متناظر با کران‌های بهینه‌ی قاب می‌باشند.

معمول‌ترین روش برای حل تقریبی معادلات عملگری استفاده از روش ریچاردسون است. این روش برای معادله (۲.۱) به‌صورت

$$u_{k+1} = u_k + a_k(f - Su_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{۳.۱}$$

می‌باشد که در آن u_0 یک حدس اولیه و $a_k > 0$ پارامترهایی هستند که به‌طور مناسب انتخاب می‌شوند. معادله (۳.۱) به‌سادگی نتیجه می‌دهد بردارهای باقیمانده $r_k = f - Su_k$ و خطای $u - u_k$، به‌صورت

$$r_k = Q_k(S)r_0, \qquad u - u_k = Q_k(S)(u - u_0),$$

هستند که در آن $Q_k(x) = \Pi_{i=1}^{k}(1 - a_i x)$ و $Q_k(0) = 1$. با انتخاب مناسب پارامترهای $\{a_i\}_{i=1}^{k-1}$ در (۳.۱) می‌توان نرخ همگرایی این روش تکراری را بهبود بخشید.

لم ۱.۱. *[۴] اگر $\{f_k\}_{k\in I}$ قابی با کران‌های A, B و عملگر قاب S باشد، آن‌گاه*

$$\left\| I_H - \frac{2}{A+B}S \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right).$$

بر این اساس، متداولترین و آسان‌ترین الگوریتم قاب را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲.۱. *[۴] فرض کنید $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای H با کران‌های پایین و بالای A, B و عملگر قاب S باشد. برای $f \in H$، دنباله $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ تعریف شده به‌صورت*

$$u_\circ = \circ,\ \ u_i = u_{i-1} + \frac{2}{A+B}(f - S u_{i-1}), \qquad i \geq 1, \tag{4.1}$$

در رابطه

$$\left\|u - u_i\right\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^i \left\|u\right\|,$$

صادق است.

اکنون با توجه به این قضیه می‌توان دید

$$\begin{aligned} \|f - S u_i\| &= \left\|S u - S u_i\right\| \\ &\leq \left\|S\right\| \left\|u - u_i\right\| \\ &\leq \left\|S\right\| \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^i \left\|f\right\|, \end{aligned}$$

و لذا همگرایی $\{S u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ به f با نرخ همگرایی $\frac{B-A}{A+B}$ نتیجه می‌شود. همچنین در [۳] نشان داده می‌شود که با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌توان این همگرایی را سرعت بخشید و الگوریتمی با نرخ همگرایی $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}$ با $\sigma = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{A}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}}$ به‌دست آورد که کمتر از $\frac{B-A}{A+B}$ است.

در فصل بعد با توسیع روش ریچاردسون، الگوریتم قاب اصلاح‌شده با نرخ همگرایی $\left(\frac{B-A}{A+B}\right)^2$ را ارائه می‌دهیم که مربع شدن نرخ همگرایی و تقلیل تعداد تکرارها به نصف، در مقایسه باالگوریتم قاب، را نتیجه می‌دهد.

پس از آن مجددا با به‌کارگیری روش چبیشف اقدام به تسریع همگرایی الگوریتم قاب اصلاح‌شده نموده که این بار نرخ همگرایی جدید به‌صورت $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}$ می‌باشد که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{2AB}}$. بوضوح دیده می‌شود که این نرخ همگرایی در مقایسه با کمیت متناظر در سه روش مطرح شده قبل مقدار کمتری را نشان می‌دهد.

۲. الگوریتم قاب اصلاح‌شده براساس روش تکراری ریچاردسون

در این بخش الگوریتم قاب ارائه شده به‌صورت (۳.۱) را تعدیل کرده و الگوریتم جدیدی ارائه خواهیم کرد که نرخ همگرایی آن مربع نرخ همگرایی الگوریتم قاب (۳.۱) می‌باشد.

لم ۱.۲. *فرض کنید $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A,B و عملگر قاب S باشد. در این‌صورت*

$$\left\| I_H - \frac{۴}{A+B}\left(I_H - \frac{۱}{A+B}S\right)S \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^{۲}. \tag{۱.۲}$$

اثبات. با توجه به لم ۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\left\| I_H - \frac{۴}{A+B}\left(I_H - \frac{۱}{A+B}S\right)S \right\| &= \left\| I_H - \frac{۴}{A+B}S + \frac{۴}{(A+B)^{۲}}S^{۲} \right\| \\ &= \left\| \left(I_H - \frac{۲}{A+B}S\right)^{۲} \right\| \qquad (۲.۲) \\ &\leq \left\| I_H - \frac{۲}{A+B}S \right\|^{۲} \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^{۲},\end{aligned}$$

و از این جا حکم قضیه ثابت می‌شود. □

اکنون اگر $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A,B و عملگر قاب S باشد آن‌گاه با در نظر گرفتن معادله عملگری $Su=f$ و با قراردادن

$$u_۰ = ۰,\ \ u_i = u_{i-۱} + \frac{۴}{A+B}\left(I - \frac{۱}{A+B}S\right)S\,(f-u_{i-۱}), \qquad i \geq ۱,$$

رابطه بازگشتی خواهیم داشت که آن را الگوریتم قاب اصلاح‌شده بر اساس روش ریچاردسون می‌نامیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که این الگوریتم مربع نرخ همگرایی الگوریتم قاب (۴.۱) را داراست.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A,B و عملگر قاب S باشد. برای*

$f \in H$، *دنباله* $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *را به‌صورت زیر تعریف کنید:*

$$u_\circ = \circ,\ \ u_i = u_{i-۱} + \frac{۴}{A+B}\Big(I - \frac{۱}{A+B}S\Big)(f - Su_{i-۱}), \qquad i \geq ۱. \qquad (۳.۲)$$

در این صورت

$$\left\|u - u_i\right\| \leq \Big(\frac{B-A}{B+A}\Big)^{۲i}\left\|u\right\|.$$

اثبات. از آنجا که $Su = f$ با توجه به تعریف u_i داریم:

$$\begin{aligned} u - u_i &= u - u_{i-۱} - \frac{۴}{A+B}\Big(I_H - \frac{۱}{A+B}S\Big)(f - Su_{i-۱}) \\ &= \Big(I_H - \frac{۴}{A+B}\Big(I_H - \frac{۱}{A+B}S\Big)S\Big)(u - u_{i-۱}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|u - u_i\| &= \Big\|\Big(I_H - \frac{۴}{A+B}\Big(I_H - \frac{۱}{A+B}S\Big)S\Big)(u - u_{i-۱})\Big\| \\ &\leq \Big\|I_H - \frac{۴}{A+B}\Big(I_H - \frac{۱}{A+B}S\Big)S\Big\|\,\|u - u_{i-۱}\|, \end{aligned}$$

لذا طبق رابطه (۱.۲) حکم قضیه نتیجه می‌شود. □

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نرخ همگرایی این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم قاب معمول مربع شده است و در نتیجه تعداد تکرارها به نصف کاهش می‌یابد. در واقع، در الگوریتم قاب معمول نرخ همگرایی برابر $\left(\frac{B-A}{B+A}\right)$ است در حالیکه با توجه به قضیه قبل، در الگوریتم قاب اصلاح شده این کمیت برابر $\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^۲$ می‌باشد.

این ویژگی به‌خصوص وقتی نمایان‌تر می‌شود که A, B نسبت به هم دور باشند و به‌عبارتی دیگر عدد شرطی قاب، یعنی $\frac{A}{B}$، بد وضع باشد. در واقع هرچه عدد شرطی نزدیک‌تر به ۱ باشد همگرایی الگوریتم سریع‌تر خواهد بود.

۳. استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف در تسریع همگرایی الگوریتم قاب اصلاح‌شده

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، همگرایی الگوریتم قاب اصلاح‌شده تحت تأثیر کران‌های بالا و پایین قاب یا به عبارتی عدد شرطی قاب می‌باشد. متأسفانه در بسیاری از قاب‌های مورد توجه، فقط یک کران بالای خام و وجود یک کران پایین $A > ۰$ شناخته شده‌اند. بنابراین به‌منظور حفظ الگوریتم قاب اصلاح شده، سعی می‌کنیم قدرت همگرایی این الگوریتم را با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف تسریع بخشیم.

در این بخش با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف الگوریتمی را ارائه خواهیم کرد که نرخ همگرایی آن $\frac{۲\sigma^i}{۱+\sigma^{۲i}}$، با $\sigma = \frac{\sqrt{A^۲+B^۲}-\sqrt{۲AB}}{\sqrt{A^۲+B^۲}+\sqrt{۲AB}}$ می‌باشد. این نرخ همگرایی به مراتب قوی‌تر از نرخ همگرایی الگوریتم ارائه شده در بخش قبل می‌باشد.

برای شروع فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$، $h_i = \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} u_k$ با این خاصیت که

$$\sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} = ۱, \tag{۱.۳}$$

و دنباله $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ طبق رابطه (۳.۲) می‌باشد. توجه کنید که شرط (۱.۳) ایجاب می‌کند که اگر $u_۱ = u_۲ = \ldots = u_i = u$ آن‌گاه $h_i = u$.

بنابراین با توجه به روابط

$$\begin{aligned} u - u_k &= u - u_{k-۱} - \frac{۴}{A+B}\left(I - \frac{۱}{A+B}S\right)S\ (f - u_{k-۱}) \\ &= u - u_{k-۱} - \left(\frac{۴}{A+B} - \frac{۴}{(A+B)^۲}S\right)S\ (f - u_{k-۱}) \\ &= u - u_{k-۱} - \left(\frac{۴}{A+B} - \frac{۴}{(A+B)^۲}S\right)S\ (u - u_{k-۱}) \\ &= \left(I - \frac{۴}{A+B}S + \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u - u_{k-۱}) \\ &= \left(I - \frac{۲}{A+B}S\right)^۲ (u - u_{k-۱}), \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} u - h_i &= \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} u - \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} u_k \\ &= \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} (u - u_k) \\ &= \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} \left(I_H - \frac{۲}{A+B}S\right)^{۲k} (u - u_۰). \end{aligned}$$

با قراردادن $R = \left(I_H - \frac{۲}{A+B}S\right)^۲$ و $Q_i(x) = \sum_{k=۱}^{i} a_{i_k} x^k$ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$u - h_i = Q_i(R)(u - u_۰). \qquad (۲.۳)$$

در نتیجه خطای ناشی از این تقریب، حاصل اعمال یک چندجمله‌ای برحسب R بر خطای اولیه $(u - u_۰)$

است.

نکته ۱.۳ . بنابر لم ۱.۱ داریم:

$$-\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^{۲}\left\|f\right\|^{۲} \leq \left\langle\left(I-\frac{۲}{A+B}S\right)^{۲} f, f\right\rangle \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^{۲}\left\|f\right\|^{۲},$$

لذا طیف R در بازه $[-\alpha, \alpha]$ قرار می‌گیرد که در آن $\alpha = \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^{۲}$.

بنابراین

$$\left\|u-h_i\right\| \leq \left\|Q_i(R)\right\|\left\|u-u_{\circ}\right\| \leq \max_{|x|\leq\alpha}\left|Q_i(x)\right|\left\|u-u_{\circ}\right\|. \quad (۳.۳)$$

اکنون به‌منظور مینیمم‌کردن این خطا، باید به دنبال حل مسأله مینیمم‌سازی زیر باشیم:

$$\min_{Q\in\mathbb{Q}_i}\max_{|x|\leq\rho}\left|Q(x)\right|, \quad (۴.۳)$$

که در آن

$$\mathbb{Q}_i := \left\{Q(x) \ : \ \deg Q \leq i, \ Q(۱) = ۱\right\}.$$

جواب این مسأله را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های چبیشف بیان کرد [۱]. در واقع چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت دنباله بازگشتی زیر بیان می‌شوند:

$$c_{\circ}(x) = ۱, \qquad c_{۱}(x) = x,$$

و برای $n \geq ۲$،

$$c_i(x) = ۲xc_{i-۱}(x) - c_{i-۲}(x). \quad (۵.۳)$$

همچنین نشان داده می‌شود [۱، ۵] که

$$c_i(x)=\begin{cases}\cos\left(i cos^{-۱}(x)\right), & |x|\le ۱\\ \cosh\left(i\cosh^{-۱}(x)\right)=\frac{۱}{۲}\left[(x+\sqrt{x^۲-۱})^i+(x+\sqrt{x^۲-۱})^{-i}\right], & |x|>۱\end{cases} \qquad (۶.۳)$$

لم زیر بیانگر آن است که چگونه این چندجمله‌ای‌ها جواب مسأله مینیمم‌سازی (۴.۳) را در اختیار ما قرار می‌دهد.

لم ۲.۳. *[۵] برای* $۱\le b\le a$، *فرض کنید* $P_i(x)=\frac{c_i\left(\frac{۲x-a-b}{b-a}\right)}{c_i\left(\frac{۲-a-b}{b-a}\right)}$. *در این صورت برای هر* $Q\in\mathbb{Q}_i$

$$\max_{a\le x\le b}\left|P_i(x)\right|\le\max_{a\le x\le b}\left|Q(x)\right|,$$

به‌علاوه

$$\max_{a\le x\le b}\left|P_i(x)\right|=\frac{۱}{c_i\left(\frac{۲-a-b}{b-a}\right)}.$$

نتیجه ۳.۳. *چندجمله‌ای* $\frac{c_i(\frac{x}{\alpha})}{c_i(\frac{۱}{\alpha})}$، *اندازه خطای* $u-h_i$ *را مینیمم می‌کند.*

اثبات. برای اثبات کافی است در لم قبل قرار دهیم $a=-\alpha$ و $b=\alpha$. در نتیجه چندجمله‌ای

$$P_i(x)=\frac{c_i\left(\frac{۲x+\alpha-\alpha}{\alpha+\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{۲+\alpha-\alpha}{\alpha+\alpha}\right)}=\frac{c_i\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)}, \qquad (۷.۳)$$

خطای مورد نظر را مینیمم خواهد کرد. □

اکنون به‌منظور به‌دست آوردن الگوریتمی مناسب بر اساس این چندجمله‌ای‌ها، ابتدا ثابت می‌کنیم یک رابطه بازگشتی به‌صورت زیر برای جواب‌های تقریبی h_i برقرار است.

گزاره ۴.۳. *برای هر ۲ ≤ i، جواب تقریبی h_i با کمترین خطای ممکن در رابطه زیر صادق است:*

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{4}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \; (f - h_{i-1}) \right] + h_{i-2},$$

که در آن $\beta_i = \frac{\frac{2}{\alpha} c_{i-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$.

اثبات. ترکیب رابطه‌های (۵.۳) و (۷.۳) برای ۲ ≤ i نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_i(x) = c_i\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= \frac{2x}{\alpha} c_{i-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) - c_{i-2}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ &= \frac{2x}{\alpha} c_{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_{i-1}(x) - c_{i-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_{i-2}(x). \end{aligned}$$

با قراردادن R به‌جای x در این رابطه نتیجه می‌شود:

$$c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_i(R) = \frac{2R}{\alpha} c_{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_{i-1}(R) - c_{i-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right) P_{i-2}(R).$$

حال با اعمال طرفین تساوی بر $(u - u_0)$ و با توجه به رابطه (۲.۳) داریم:

$$c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)(u - h_i) = \frac{2}{\alpha} c_{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) R(u - h_{i-1}) - c_{i-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)(u - h_{i-2}),$$

و با قراردادن $R = \left(I_H - \frac{2}{A+B} S\right)^2$ داریم:

$$c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) u - c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) h_i = \frac{2}{\alpha} c_{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(I_H - \frac{2}{A+B} S\right)^2 (u - h_{i-1}) - c_{i-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)(u - h_{i-2}),$$

یا به‌طور معادل

$$\begin{aligned} c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)u - c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)h_i' &= \frac{۲}{\rho}c_{i-۱}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)u \\ &+\frac{۲}{\alpha}c_{i-۱}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)\left[-h_{i-۱} - \left(\frac{۴}{A+B}S - \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u-h_{i-۱})\right] \\ &-c_{i-۲}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)u + c_{i-۲}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)h_{i-۲}. \end{aligned}$$

سرانجام با استفاده از رابطه (۷.۳) برای $i \geq ۲$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)h_i = \frac{۲}{\alpha}c_{i-۱}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)\left(h_{i-۱} + \left(\frac{۴}{A+B}S - \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u-h_{i-۱})\right) - c_{i-۲}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)h_{i-۲}.$$

بنابراین

$$h_i = \frac{۲}{\alpha}\frac{c_{i-۱}(\frac{۱}{\alpha})}{c_i(\frac{۱}{\alpha})}\left[h_{i-۱} + \left(\frac{۴}{A+B}S - \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u-h_{i-۱})\right] - \frac{c_{i-۲}(\frac{۱}{\alpha})}{c_i(\frac{۱}{\alpha})}h_{i-۲}. \qquad (۸.۳)$$

از طرفی بنا به رابطه (۷.۳) و با توجه به تعریف β_i داریم:

$$۱ - \beta_i = ۱ - \frac{۲}{\alpha}\frac{c_{i-۱}(\frac{۱}{\alpha})}{c_i(\frac{۱}{\alpha})} = -\frac{c_{i-۲}(\frac{۱}{\alpha})}{c_i(\frac{۱}{\alpha})}.$$

در این حالت می‌توان رابطه (۸.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$h_i = \beta_i\left[h_{i-۱} + \left(\frac{۴}{A+B}S - \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u-h_{i-۱}\right] + (۱-\beta_i)h_{i-۲},$$

یا به‌طور معادل

$$h_i = \beta_i\left[h_{i-۱} - h_{i-۲} + \left(\frac{۴}{A+B}S - \frac{۴}{(A+B)^۲}S^۲\right)(u-h_{i-۱})\right] + h_{i-۲}.$$

اکنون ترکیب این رابطه با $Su = f$ نتیجه می دهد:

$$h_i = \beta_i\left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{4}{A+B}\left(I - \frac{1}{(A+B)^2}S\right)(f - Sh_{i-1})\right] + h_{i-2},$$

و بدین ترتیب اثبات گزاره کامل می‌شود. □

در این جا با کمی محاسبات ساده می‌توان دید:

$$\beta_i = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\beta_{i-1}\right)^{-1},$$

و در نتیجه می‌توان فرمول بازگشتی ساده‌تر زیر را برای محاسبه جواب تقریبی h_i به‌دست آورد:

$$h_i = \beta_i\left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{4}{A+B}\left(I - \frac{1}{(A+B)^2}S\right)(f - Sh_{i-1})\right] + h_{i-2}, \tag{9.3}$$

که در آن

$$h_0 = 0, \quad h_1 = \frac{4}{A+B}\left(I - \frac{1}{(A+B)^2}S\right)f, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_i = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\beta_{i-1}\right)^{-1}.$$

قضیه زیر همگرایی این دنباله از جواب‌های تقریبی به جواب دقیق معادله $Su = f$ را ثابت می‌کند.

قضیه ۵.۳. *اگر $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب با کران‌های پایین و بالای A, B همراه با عملگر قاب S بوده و u جواب دقیق معادله $Su = f$ باشد، آن‌گاه دنباله $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ تعریف شده به‌صورت (۹.۳) در رابطه زیر صادق است:*

$$\left\|u - h_i\right\| \leq \frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}\frac{\|f\|}{A},$$

که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{A^2+B^2} - \sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2} + \sqrt{2AB}}$.

اثبات. با استفاده از لم (۲.۳) و رابطه (۳.۳) داریم:

$$\left\|u-h_i\right\| \leq \frac{۱}{c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)}\left\|u-h_۰\right\| = \frac{۱}{c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)}\left\|u\right\| \leq \frac{۱}{c_i\left(\frac{۱}{\alpha}\right)}\frac{\|f\|}{A},$$

که در آن آخرین نامساوی با توجه به رابطه (۱.۱) به‌دست آمده است. از طرف دیگر، چون $\frac{۱}{\alpha} > ۱$ لذا بنا به رابطه (۶.۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} c_i\left(\frac{۱}{\rho}\right) &= c_i\left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{۲}\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left[\left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{۲} + \sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{۴} - ۱}\right)^{i} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{۲} + \sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{۴} - ۱}\right)^{-i}\right] \\ &= \cdots = \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} + \sqrt{۲AB}}{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} - \sqrt{۲AB}}\right)^{i} + \left(\frac{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} + \sqrt{۲AB}}{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} - \sqrt{۲AB}}\right)^{-i}\right] \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sigma^{i}} + \sigma^{i}\right) = \frac{۱+\sigma^{۲i}}{۲\sigma^{i}}, \end{aligned}$$

که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} - \sqrt{۲AB}}{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}} + \sqrt{۲AB}}$.

این تساوی همراه با رابطه (۱۰.۳)، اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

ازآنجاکه $\sigma < \alpha$، این قضیه نشان می‌دهد نرخ همگرایی دنباله $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ کمتر از نرخ همگرایی دنباله $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ می‌باشد. همچنین این نرخ همگرایی از نرخ همگرایی دنباله $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ حاصل از تسریع همگرایی

الگوریتم قاب ارائه شده در [۲، ۳] کمتر است.

مراجع

[1] C.C. Cheny, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw Hill, NY., 1996.

[2] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser, Boston, 2003.

[3] K.H. Gröchenig, Acceleration of the frame algorithm, *IEEE Trans. Signal Process.*, **41**(12) (1993), 3331–3340.

[4] H. Jamali and E. Afroomand, Applications of frames in Chebyshev and conjugate gradiant methods, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **43**(5) (2017), 1265–1279.

[5] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell Publishing Company, 1969.