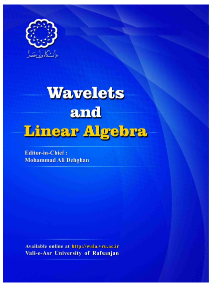
موجک‌ها و جبرخطی ۴(۳) (۱۳۹۷) ۱-۲۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی با یک رویکرد جدید

مصطفی اسلامی*[آ]، هادی رضازاده[ب]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران*

[ب] *دانشکده فناوری‌های مهندسی، دانشگاه دولتی تخصصی فناوری‌های نوین آمل، آمل، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۷ دی ۱۳۹۶
پذیرفته شده: ۶ تیر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: فاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:
مشتق کسری از مرتبه توزیعی، مقادیر ویژه، معادلات دیفرانسیل کسری.

چکیده

بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل بدون حل صریح آن از اهمیت ویژه‌ای برخودار است. تعاریف مختلفی در ارتباط با پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل موجود است که در اینجا از تعریف پایداری به مفهوم لیاپانوف استفاده خواهیم کرد. در این مقاله، ابتدا با به کارگیری خاصیت بسط مجانبی تابع میتگ-لفلر به بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی می‌پردازیم، سپس برای نشان دادن کارایی و تصدیق نتایج مطرح شده در بررسی پایداری این نوع معادلات، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل کسری چندگامی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. مقدمه

حسابان کسری نامی است برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح است. از آنجاکه قدمت این مفاهیم کسری به اواخر قرن هفدهم میلادی بر می‌گردد لذا بر شمردن این شاخه از ریاضیات به‌عنوان یک موضوع جدید مطلقاً اشتباه است. اگرچه این موضوع دارای سابقه‌ای بیش از ۳۰۰ سال می‌باشد، اما حدود ۵۰ سال پیش پس از نخستین کنفرانس بین المللی حسابان کسری که در دانشگاه نیوهاون[1] به همت پروفسور برترام راس[2] برگزار گردید [۱۴]، نوع نگاه‌ها به این موضوع که حسابان کسری در حوزه ریاضیات محض قرار دارد تغییر کرد و از آن زمان تاکنون به‌عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های مهندسی مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفت. به این علت که اولاً معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل خصوصیت غیرموضعی بودنشان در اکثر دامنه‌ها دقیقتر عمل می‌کنند، ثانیاً مشتقات کسری روی دامنه‌های ناهموار نیز قابل تعریف هستند. با توجه به اهمیت موضوع، تحقیقات متعددی در سال‌های اخیر در زمینه بررسی پایداری دستگاه‌هایی با مشتقات کسری ارائه گردید. به‌عنوان مثال، ماتیگنون[3] و دنگ[4] به ترتیب پایداری دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری و دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با تأخیر چندگانه را مطالعه کردند [۱۲، ۸]. ایده اولیه مشتقات کسری از مرتبه توزیعی توسط کپوتو مطرح شد [۶] و در ادامه توسط خود کپوتو[5] [۷]، باگلی و تورویک[6] توسعه یافت [۴، ۵]. سپس محققین دیگر اقدام به ارائه مدل‌های ریاضی که در ساختار آنها مشتقات کسری از مرتبه توزیعی استفاده می‌شد، نمودند. برای مثال دیتلم[7] با بیان یک روش عددی مبتنی بر دستگاه معادلات کسری، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مسائل مهندسی را مورد تحلیل و بررسی قرار داد [۹]. از آنجایی‌که پایداری چنین دستگاه‌هایی از اهمیت بالایی برخوردار است، برای اولین بار صابری نجفی و همکارانش در سال ۲۰۱۰ به بررسی پایداری دستگاه‌های دیفرانسیل خطی

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: Mostafa.eslami@umz.ac.ir (مصطفی اسلامی)، H.rezazadeh@ausmt.ac.ir (هادی رضازاده).
http://doi.org/10.22072/wala.2018.78897.1144

[1]New Haven university
[2]Bertram Ross
[3]Matignon
[4]Deng
[5]Caputo
[6]Bagley and Torvik
[7]Diethelm

کسری از مرتبه توزیعی با تابع چگالی نامنفی پرداختند [۱۳]. در ادامه امینی‌خواه و همکارانش دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کسری از مرتبه توزیعی و همچنین دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی با تأخیر چندگانه را معرفی و در مورد پایداری این معادلات نتایجی را ارائه نمودند [۲، ۳].

در این مقاله قصد داریم روش جدیدی را برای بررسی پایداری دستگاه معادلات کسری از مرتبه توزیعی ارائه دهیم. این روش شامل دو مرحله زیر است:

مرحله اول. با به‌کارگیری یک روش انتگرال‌گیری مناسب معادله کسری از مرتبه توزیعی، به معادله دیفرانسیل چندمرتبه‌ای کسری[8] تبدیل می‌شود.

مرحله دوم. معادله دیفرانسیل چندمرتبه‌ای کسری حاصل از مرحله اول را هم ارز با دستگاه معادلات کسری N بعدی می‌نماییم، سپس به بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری حاصل می‌پردازیم.

در ادامه این مقاله، در بخش دوم پس از معرفی تابع میتگ–لفلر[9] که نقشی مهم و اساسی در حساب کسری ایفا می‌کند، به ارائه معروف‌ترین مشتق کسری مطرح شده در حساب کسری یعنی، کپوتو می‌پردازیم، سپس مشتق کسری از مرتبه توزیعی را تعریف می‌نماییم. در بخش سوم با استفاده از انتگرال‌گیری عددی ذوزنقه‌ای به بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی خواهیم پرداخت.

۲. حساب دیفرانسیل کسری

در این بخش، بعضی از نمادها و تعاریف حساب دیفرانسیل کسری را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. همان طور که تابع نمایی نقش مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی بازی می‌کند، تابع میتگ–لفلر نیز نقشی بسیار مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری ایفا می‌کند. این تابع در سال ۱۹۰۲ توسط ریاضیدان سوئدی به نام جی. ام. میتگ–لفلر[10] مورد مطالعه قرار گرفت که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad \alpha>0,\qquad z\in\mathbb{C}, \tag{۱.۲}$$

[8] Multi-order fractional differential equation
[9] Mittag-Leffler
[10] J. M. Mittag-Leffler

در واقع تابع میتگ-لفلر تعمیمی از تابع نمایی می‌باشد.

تعریف ۲.۲. فرض کنید A یک ماتریس عددی $n\times n$ باشد. آنگاه تابع میتگ-لفلر ماتریسی را به‌صورت

$$E_\alpha(At^\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad \alpha>0, \tag{۲.۲}$$

نشان می‌دهند.

در ادامه لمی را بیان می‌کنیم که در مورد بسط تابع میتگ-لفلر اشاره دارد و ما را در بررسی پایداری دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری یاری خواهد رساند.

لم ۳.۲. *فرض می‌کنیم $0<\alpha<2$، در این‌صورت برای هر عدد صحیح $p\geq 1$ داریم:*

الف. هرگاه $|arg(z)|\leq\frac{\alpha\pi}{2}$ و $|z|\to\infty$ بسط تابع میتگ-لفلر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}z\,exp(z^{1/\alpha})-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\frac{1}{z^k}+O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right), \tag{۳.۲}$$

ب. هرگاه $|arg(z)|>\frac{\alpha\pi}{2}$ و $|z|\to\infty$ بسط تابع میتگ-لفلر به‌صورت زیر است:

$$E_\alpha(z)=-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\frac{1}{z^k}+O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right). \tag{۴.۲}$$

تعریف ۴.۲. انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه کسری $\alpha>0$، برای تابع $f(t)\in[a,b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$_aI_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad t\geq 0. \tag{۵.۲}$$

تعاریف مختلفی برای مشتقات کسری در ادبیات حسابان کسری موجود می‌باشد [۱۰]، که در ادامه ساده‌ترین و راحت‌ترین تعریف مورد استفاده در این حوزه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. مشتق کسری کپوتو، برای تابع $f(t)$ در سال ۱۹۶۷ توسط کپوتو معرفی شد، به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}_a I_t^{n-\alpha} f^{(n)}(t), \qquad (۶.۲) $$

که $n-1 < \alpha < n$.

برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت موضوع در ادامه فرض می‌کنیم که $a = 0$ و ${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t)$.

تبدیل لاپلاس مشتق کسری کپوتو به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$ \mathcal{L}\left\{ {}^C D_t^\alpha f(t) \right\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k}, \qquad (۷.۲) $$

که $n-1 < \alpha \le n$ و s پارامتر تبدیل لاپلاس است.

لم ۶.۲. *با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب دستگاه*

$$ {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad (۸.۲) $$

را می‌توان برحسب توابع میتگ-لفلر به‌صورت

$$ x(t) = x_0 E_\alpha(At^\alpha), \qquad (۹.۲) $$

بیان نمود که در آن $x \in \mathbb{R}^n$*، ماتریس* $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$، $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *به‌طوریکه* $0 < \alpha < 1$.

تعریف ۷.۲. دستگاه (۸.۲) را می‌گوییم پایدار است اگر و تنها اگر برای هر x_0 وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ به‌قسمی که $\|x(t)\| \le \varepsilon$ برای $t \ge 0$.

همچنین این دستگاه به‌طور مجانب پایدار[11] است اگر و تنها اگر $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

[11] Asymptotically stable

تعریف ۸.۲. عملگر مشتق کسری از مرتبه توزیعی نسبت به تابع چگالی نامنفی $b(\alpha)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$D^{b(\alpha)} = \int_{m-1}^{m} b(\alpha)\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}d\alpha, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{۱۰.۲}$$

که در واقع تعمیمی از عملگر مشتق کسری می‌باشد.

حال اگر از تعریف مشتق کسری کپوتو که در رابطه (۶.۲) بیان شد، برای محاسبه مشتق کسری داخل انتگرال استفاده نمائیم در این‌صورت مشتق کسری کپوتو از مرتبه توزیعی نسبت به تابع چگالی نامنفی $b(\alpha)$ برای تابع $f(t)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$${}^{C}D_t^{b(\alpha)} f(t) = \int_{m-1}^{m} b(\alpha)\, {}^{C}D_t^{\alpha} f(t)d\alpha, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{۱۱.۲}$$

که در واقع تعمیمی از عملگر مشتق کسری کپوتو می‌باشد.

۳. بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل از مرتبه توزیعی با مشتق کسری

هدف اصلی ما در این بخش از مقاله بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل از مرتبه توزیعی با مشتق کسری می‌باشد، که به‌راحتی می‌توان این نتایج را برای بررسی پایداری دستگاه‌های از مرتبه توزیعی با مشتق کسری گسترش داد.

معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی با مشتق کسری با شرایط اولیه به‌صورت

$$\begin{aligned} &{}^{C}D_t^{b(\alpha)}x(t) = f\big(x(t)\big), \quad t > 0, \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

می‌باشد که در آن $x(t) \in \mathbb{R}$، $f(t) \in \mathbb{R}$ تابع‌ای پیوسته و

$${}^{C}D_t^{b(\alpha)}x(t) = \int_0^1 b(\alpha)\, {}^{C}D_t^{\alpha}x(t)d\alpha, \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

مشتق کسری کپوتو از مرتبه توزیعی $x(t)$ نسبت به تابع چگالی نامنفی $b(\alpha)$ می‌باشد. اکنون با به‌کارگیری روش ذوزنقه‌ای مرکب با k قسمت مساوی روی بازه $[۰, ۱]$، معادله (۱.۳) به معادله چندمرتبه‌ای با مشتق کسری

$$\frac{۱}{k}\Big[\frac{b_۰}{۲}\,{}^{C}D_t^{\alpha_۰}x(t) + b_۱\,{}^{C}D_t^{\alpha_۱}x(t) + b_۲\,{}^{C}D_t^{\alpha_۲}x(t) + \cdots + b_{k-۱}\,{}^{C}D_t^{\alpha_{k-۱}}x(t) + \frac{b_k}{۲}\,{}^{C}D_t^{\alpha_k}x(t) \approx f(x(t)), \quad t > ۰, \tag{۲.۳}$$

با مقدار اولیه

$$x(۰) = x_۰, \tag{۳.۳}$$

تبدیل می‌شود که در آن $b(\alpha_i) = b_i$، $i = ۰, ۱, \ldots, k$. همچنین برای $i = ۰, ۱, \ldots, k$، مرتبه α_iها اعداد گویا هستند به‌طوریکه $۰ < \alpha_i < ۱$ و $\alpha_k > \alpha_{k-۱} > \alpha_{k-۲} > \cdots > \alpha_۱ > \alpha_۰$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم، برای $i = ۰, ۱, \ldots, k$ اعداد صحیح مثبت v_i و u_i وجود دارند به‌طوریکه

$$\alpha_i = v_i/u_i,$$

و v_i و u_i نسبت به هم اول باشند.

همچنین قرار می‌دهیم $\omega = ۱/M$ که در آن M کوچک‌ترین مضرب مشترک u_iها می‌باشد.

نکته ۱.۳. [۱۱] معادله (۲.۳) با مقدار اولیه (۳.۳) هم ارز با دستگاه معادلات کسری N-بعدی

$$
\begin{aligned}
&{}^{C}D_t^{\omega} x(t) = x_1(t),\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_1(t) = x_2(t),\\
&\qquad \vdots\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_{\alpha_0 M-1}(t) = x_{\alpha_0 M}(t),\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_{\alpha_0 M}(t) = x_{\alpha_0 M+1}(t),\\
&\qquad \vdots\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_{\alpha_1 M-1}(t) = x_{\alpha_1 M}(t),\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_{\alpha_1 M}(t) = x_{\alpha_1 M+1}(t),\\
&\qquad \vdots\\
&{}^{C}D_t^{\omega} x_{\alpha_k M-1}(t) \approx \frac{2}{b_k}\Big(k\, f\big(x(t)\big) - b_{k-1}\, x_{\alpha_{k-1} M}(t) - \cdots - b_1 x_{\alpha_1 M}(t) - \frac{b_0}{2} x_{\alpha_0 M}(t)\Big),
\end{aligned}
\tag{۴.۳}
$$

با شرایط اولیه

$$
x_i(0) = \begin{cases} x_0, & i = \alpha_k M - 1,\\[2ex] 0, & \text{.در غیر این‌صورت} \end{cases}
\tag{۵.۳}
$$

است. دستگاه معادلات (۴.۳) با شرایط اولیه وابسته به آنرا می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$
{}^{C}D_t^{\omega,\beta} X(t) = BX(t), \quad t > 0,
\tag{۶.۳}
$$

با شرایط اولیه

$$X(\circ) = [\circ, \circ, \ldots, \circ, x_\circ]^T,$$

که در آن

$$B = \begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & ۱ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & ۱ \\ d_{N۱} & d_{N۲} & d_{N۳} & d_{N۴} & \cdots & d_{NN} \end{pmatrix},$$

و

$$d_{Nj} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=\circ}, & j = ۱, \\ -b_{k-i}, \quad j = \alpha_i M, & i = ۱, ۲, \ldots, k-۱, \\ \circ, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

و $N = \alpha_k M$.

قضیه ۲.۳. *جواب صفر معادله (۱.۳)*
الف) به‌طور مجانب پایدار است هرگاه $\left|\arg(\lambda(B)\right| > \omega\pi/۲$*، که* λ *جواب معادله مشخصه*

$$\det(\lambda I - B) = \circ, \tag{۷.۳}$$

و I *ماتریس همانی* $N \times N$ *می‌باشد.*
ب) پایدار است نه به‌طور مجانب، هرگاه همه مقادیر ویژه‌ی B *در*

$$\left|\arg(\lambda(B)\right| \geq \omega\pi/۲,$$

صدق کنند و مقادیر ویژه صادق در $\left|\arg(\lambda(B)\right| = \omega\pi/۲$*، دارای تکرار هندسی*[12] *و جبری*[13] *یکسان باشند.*

ج) ناپایدار است هرگاه $\lambda_\circ$*ی (*$\lambda_\circ$ *مقدار ویژه* B *است) وجود داشته باشد به‌طوریکه*

$$|arg(\lambda_\circ)| < \omega\pi/۲.$$

اثبات. **الف)** براساس رابطه (۹.۲) داریم

$$x(t) = X(\circ)E_\omega(Bt^\omega).$$

همان‌طورکه می‌دانیم ماتریس وارون‌پذیری مانند P وجود دارد به‌طوریکه $P^{-۱}BP = J$، که در آن J فرم کانونی جردن ماتریس B است. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) اگر $J = diag(\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n)$، آنگاه

$$E_\omega(Bt^\omega) = P\left[E_\omega(Jt^\omega)\right]P^{-۱} = P\,diag\Big(E_\omega(\lambda_۱ t^\omega), \dots, E_\omega(\lambda_n t^\omega)\Big)\,P^{-۱}.$$

مطابق رابطه (۴.۲) هنگامیکه $t \to +\infty$ برای هر $۱ \le i \le n$ خواهیم داشت

$$E_\omega(\lambda_i t^\omega) = -\sum_{k=۱}^{p}\frac{۱}{\Gamma(۱-\omega k)}\frac{۱}{(\lambda_i t^\omega)^k} + O(\frac{۱}{|\lambda_i t^\omega|^{p+۱}}) \to \circ,$$

بنابراین

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\left\|E_\omega(Jt^\omega)\right\| = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\left\|diag\Big(E_\omega(\lambda_۱ t^\omega), \dots, E_\omega(\lambda_n t^\omega)\Big)\right\| = \circ.$$

---

[12] *Algebraic multiplicity*
[13] *Geometric multiplicity*

در نتیجه

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\left\|x(t)\right\| = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\left\|X(\circ)E_{\omega}(Bt^{\omega})\right\| = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\left\|P\Big[X(\circ)E_{\omega}(Jt^{\omega})\Big]P^{-۱}\right\| = \circ.$$

حالت دوم) فرض کنید $J = diag(J_{۱}, J_{۲}, \dots, J_{s})$ و J_i، $۱ \leq i \leq s$ به‌صورت

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & ۱ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \lambda_i & ۱ & \ddots & \vdots \\ \vdots & \circ & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & \lambda_i & ۱ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i},$$

باشد. در این‌صورت

$$E_{\omega}(Bt^{\omega}) = P\Big[E_{\omega}(Jt^{\omega})\Big]P^{-۱} = P\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{diag(J_{۱}^{k}, J_{۲}^{k}, \dots, J_{s}^{k})t^{\omega k}}{\Gamma(\omega k + ۱)}P^{-۱}$$

$$= Pdiag\Big(E_{\omega}(J_{۱}t^{\omega}), E_{\omega}(J_{۲}t^{\omega}), \dots, E_{\omega}(J_{s}t^{\omega})\Big)P^{-۱}.$$

ماتریس $E_{\omega}(J_i t^{\omega})$، $۱ \leq i \leq s$، را می‌توان به شرح ذیل محاسبه کرد:

$$T\Big(E_{\omega}(\lambda t^{\omega})\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_i},$$

که در آن عملگر T به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T=\begin{pmatrix} ۱ & \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{۱}{۲!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{۲} & \cdots & \frac{۱}{(n_i-۱)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n_i-۱} \\ & ۱ & \frac{\partial}{\partial\lambda} & \cdots & \frac{۱}{(n_i-۲)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n_i-۲} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & ۱ & \frac{\partial}{\partial\lambda} \\ & & & & ۱ \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}.$$

همه‌ی عناصر غیرصفر تابع ماتریسی $E_\omega(J_i t^\omega)$ به‌شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{۱}{(j-۱)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{j-۱}E_\omega(\lambda t^\omega)\right\}\Big|_{\lambda=\lambda_i}\qquad j=۱,۲,\dots,n_i,\quad ۱\leq i\leq s.$$

اگر $\left|\arg(\lambda_i)\right|>\omega\pi/۲$ و $t\to\infty$، در این‌صورت بنابر لم (۳.۲) داریم:

$$E_\omega(\lambda_i t^\alpha)=-\sum_{k=۱}^{p}\frac{۱}{\Gamma(۱-\omega k)}\frac{۱}{(\lambda_i t^\omega)^k}+O\left(\frac{۱}{|\lambda_i t^\omega|^{p+۱}}\right),$$

هنگامیکه $t\to\infty$ داریم $|E_\omega(\lambda_i t^\omega)|\to ۰$ و

$$\frac{۱}{(j-۱)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)^{j-۱}E_\omega(\lambda_i t^\omega)=\frac{۱}{(j-۱)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)^{j-۱}\left\{-\sum_{k=۱}^{p}\frac{۱}{\Gamma(۱-\omega k)}\frac{۱}{(\lambda_i t^\omega)^k}+O\left(\frac{۱}{|\lambda_i t^\omega|^{p+۱}}\right)\right\}$$

$$=-\sum_{k=۱}^{p}\frac{(-۱)^{j-۱}(k+j-۲)\dots(k+۱)k}{(j-۱)!\Gamma(۱-\omega k)}\frac{۱}{\lambda_i^{k+j-۱}t^{\alpha k}}+O\left(\frac{۱}{|\lambda_i|^{p+j}|t^\omega|^{p+۱}}\right)$$

$$=-\sum_{k=۱}^{p}\frac{(-۱)^{j-۱}(k+j-۲)!}{(j-۱)!(k-۱)!\Gamma(\gamma-\omega k)}\frac{۱}{\lambda_i^{k+j-۱}t^{\omega k}}+O\left(\frac{۱}{|\lambda_i|^{p+j}|t^\omega|^{p+۱}}\right),$$

هنگامیکه $t\to\infty$، برای هر $۱\leq j\leq n_i$ داریم:

$$\left|\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{j-1} E_{\omega}(\lambda_i t^{\omega})\right| \to 0.$$

بنابراین برای هر مقدار اولیه غیرصفر $X(0)$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\lim_{t\to+\infty}\|X(t)\| = \lim_{t\to+\infty}\left\|X(0)E_{\alpha}(At^{\omega})\right\| = 0.$$

ب) بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم مقدار ویژه بحرانی به نام λ_i وجود داشته باشد به‌طوریکه $\left|\arg(\lambda_i)\right| = \omega\pi/2$ و تکرار جبری و هندسی یکسان با یک داشته باشد. در این‌صورت از (۹.۲) جوابی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$x(t) = X(0)E_{\omega}(Bt^{\omega}) = X(0)Pdiag\Big(E_{\omega}(J_1 t^{\omega}), E_{\omega}(J_2 t^{\omega}), \dots, E_{\omega}(J_s t^{\omega})\Big)P^{-1},$$

که J_kها بلوک‌های جردن ماتریس از مرتبه n_k هستند به‌طوریکه $|arg(\lambda_k)| > \omega/2$ و

$$\sum_{k=1}^{i-1} n_k + \sum_{k=i+1}^{s} n_k + 1 = n, \qquad k = 1,\dots,i-1,i+1,\dots,s.$$

حال از رابطه ۳.۲ داریم:

$$E_{\omega}(\lambda_i t^{\omega}) = \frac{1}{\omega}\exp(t\lambda_i^{1/\omega}) - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\Gamma(1-\omega k)}\frac{1}{\lambda_i^k}\frac{1}{t^{\omega k}} + O\left(\frac{1}{|\lambda t^{\omega}|^{p+1}}\right).$$

فرض می‌کنیم $\lambda_i = \left(r(\cos\frac{\omega\pi}{2} + i\sin\frac{\omega\pi}{2})\right)$، که r قدر مطلق λ_i است. در این‌صورت

$$E_\omega(\lambda_i t^\omega) = \frac{۱}{\omega} \exp\left\{t\Big(r(\cos\tfrac{\omega\pi}{۲} + i\sin\tfrac{\omega\pi}{۲})\Big)^{۱/\omega}\right\}$$

$$- \sum_{k=۱}^{p} \frac{(r(\cos\frac{\omega\pi}{۲} + i\sin\frac{\omega\pi}{۲}))^{-k} t^{-\omega k}}{\Gamma(۱-\omega k)} + O\left(\left|r(\cos\frac{\omega\pi}{۲} + i\sin\frac{\omega\pi}{۲})\right|^{-p-۱} |t|^{-\omega p-\omega}\right)$$

$$= \frac{۱}{\omega} \exp\left\{r^{۱/\omega} t(\cos\tfrac{\pi}{۲} + i\sin\tfrac{\pi}{۲})\right\} - \sum_{k=۱}^{p} \frac{r^{-k} t^{-\omega k}(\cos\frac{-k\omega\pi}{۲} + i\sin\frac{-k\omega\pi}{۲})}{\Gamma(۱-\omega k)} + O\left(t^{-\omega p-\omega}\right) \quad (۸.۳)$$

$$= \frac{۱}{\omega} \exp\left\{i r^{۱/\omega} t\right\} - \sum_{k=۱}^{p} \frac{r^{-k} t^{-\omega k} r(\cos\frac{k\omega\pi}{۲} - i\sin\frac{k\omega\pi}{۲})}{\Gamma(۱-\omega k)} + O\left(t^{-\omega p-\omega}\right),$$

مقدار قدر مطلق اولین جمله سمت راست تساوی بالا برابر با $\frac{۱}{\omega}$ است در حالی که جملات باقیمانده وقتی $t \to \infty$، به صفر میل می‌کنند. از اثبات قسمت (الف) این قضیه، برای $E_\omega(J_k t^\omega)$
$k = ۱, \ldots, i-۱, i+۱, \ldots, r$، هنگامیکه $t \to \infty$، به صفر میل می‌کنند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که جواب صفر دستگاه (۱.۳) پایدار است و به‌طور مجانب پایدار نیست.

ج) ابتدا فرض می‌کنیم B ماتریس قطری باشد، لذا طبق رابطه (۳.۲)، وقتی $t \to +\infty$ داریم:

$$E_\omega(\lambda_\circ t^\omega) = \frac{۱}{\omega} \exp(t\lambda_\circ^{۱/\omega}) - \sum_{k=۱}^{p} \frac{۱}{\Gamma(۱-\omega k)} \frac{۱}{\lambda_\circ^k} \frac{۱}{t^{\omega k}} + O\left(\frac{۱}{|\lambda_\circ t^\omega|^{p+۱}}\right) \to +\infty,$$

همچنین

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|x(t)\right\| = \lim_{t\to+\infty} \left\|X(\circ) E_\omega(Bt^\omega)\right\| = +\infty.$$

حال فرض می‌کنیم $B = P\ J\ P^{-۱}$ شکل کانونی جردن ماتریس B باشد. از رابطه ۳.۲ داریم:

$$\frac{1}{(j-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\right)^{j-1}E_\omega(\lambda_0 t^\omega)\right\}=\frac{1}{(j-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\right)^{j-1}\right.$$

$$\left.\left(\tfrac{1}{\omega}exp(\lambda_0^{1/\omega}t)-\sum_{k=1}^{p}\tfrac{1}{\Gamma(1-\omega k)}\tfrac{1}{\lambda_0^k t\omega k}+O\left(\tfrac{1}{|\lambda_0 t\omega|p+1}\right)\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\lambda_0(j-1)!}\left\{\frac{(1-\omega)(1-2\omega)\dots(1-(2-j)\omega)}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)-(j-1)}t+\cdots\right.$$

$$\frac{\left(\frac{(j-1)j}{2}-(j-1)\omega-\frac{(j-1)(j-2)}{2}\omega\right)}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)j-2-(j-1)}t^{j-2}+$$

$$\left.\frac{1}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)j-1-(j-1)}t^{j-1}\right\}exp(\lambda_0^{1/\omega}t)$$

$$-\frac{1}{(j-1)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-j+2)}{\Gamma(1-\omega k)}\frac{1}{\lambda_0^{k+j-1}t^{\omega k}}+O\left(\frac{1}{|\lambda_0|^{p+j}t^{(p+1)\omega}}\right).$$

بنابراین، برای t به قدر کافی بزرگ خواهیم داشت:

$$\left|\frac{1}{(j-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\right)^{j-1}E_\omega(\lambda_0 t^\omega)\right\}\right| \geq \frac{1}{(j-1)!}\left\{\ \left|\frac{1}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)^{j-1}-(j-1)}t^{j-1}\right|\right.$$

$$-\left|\frac{\left(\frac{(j-1)j}{2}-(j-1)\omega-\frac{(j-1)(j-2)}{2}\omega\right)}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)^{j-2}-(j-1)}t^{j-2}\right|-\dots$$

$$\left.-\left|\frac{(1-\omega)(1-2\omega)\dots(1-(2-j)\omega)}{\omega^j}\lambda_0^{(1/\omega)-(j-1)}t\right|\right\}exp\left(|\lambda_0|^{1/\omega}cos\left(\frac{arg(\lambda_0)}{\omega}\right)t\right)$$

$$-\frac{1}{(j-1)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{|(-k)(-k-1)\dots(-k-j+1)|}{|\Gamma(1-\omega k)|}\frac{1}{\left|\lambda_0^{k+j}t^{\omega k-j+1}\right|}+O\left(\frac{1}{|\lambda_0|^{p+j}t^{(p+1)\omega}}\right)$$

$$=\frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{t^{j-1}}{\omega^j}|\lambda_0|^{(1/\omega)^{j-1}-(j-1)}-\frac{\left(\frac{(j-1)j}{2}-(j-1)\omega-\frac{(j-1)(j-2)}{2}\omega\right)}{\omega^j}t^{j-2}\right.$$

$$|\lambda_0|^{(1/\omega)^{j-2}-(j-1)}-\dots-\frac{(1-\omega)(1-2\omega)\dots(1-(2-j)\omega)}{\omega^j}t$$

$$\left.|\lambda_0|^{(1/\omega)-(j-1)}\right\}exp\left(|\lambda_0|^{1/\omega}cos\left(\frac{arg(\lambda_0)}{\omega}\right)t\right)$$

$$-\frac{1}{(j-1)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{|(-k)(-k-1)\dots(-k-j+1)|}{|\Gamma(1-\omega k)|}\frac{1}{\left|\lambda_0^{k+j}t^{\omega k-j+1}\right|}+O\left(\frac{1}{|\lambda_0|^{p+j}t^{(p+1)\omega}}\right).$$

از آنجاییکه $\left|\frac{\arg(\lambda_0)}{\alpha}\right| < \pi/2$، داریم $\cos(\frac{\arg(\lambda_0)}{\alpha}) > 0$. بنابراین از اولین جمله نامساوی اخیر نتیجه می‌شود که جواب صفر دستگاه (۱.۳) ناپایدار است. □

نکته ۳.۳. اگر $b(\alpha) = \sum_{j=۱}^{n} c_j\, \delta(\alpha - j\gamma)$ $(۰ < n\gamma \leq ۱)$ آن‌گاه معادله دیفرانسیل از مرتبه توزیعی با مشتق کسری (۱.۳) تبدیل به معادله دیفرانسیل چندمرتبه‌ای کسری (۲.۳) می‌شود لذا دیگر نیازی به استفاده از مرحله اول نیست، که در آن $\delta(t)$، تابع دلتای دیراک[۱۴] می‌باشد.

مثال ۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کسری از مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} {}^{C}D_t^{b_۱(\alpha)} x_۱(t) &= a\ x_۱(t) + b\ x_۲(t), \\ {}^{C}D_t^{b_۲(\alpha)} x_۲(t) &= c\ x_۱(t) + d\ x_۲(t), \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

با شرایط اولیه $\big(x_۱(۰), x_۲(۰)\big) = (x_{۱۰}, x_{۲۰})$ ، که $b_i(\alpha)$ برای $i = ۱, ۲$ تابع چگالی نامنفی از مرتبه $\alpha \in (۰, ۱]$ و a, b, c, d اعداد ثابت هستند. حال با فرض

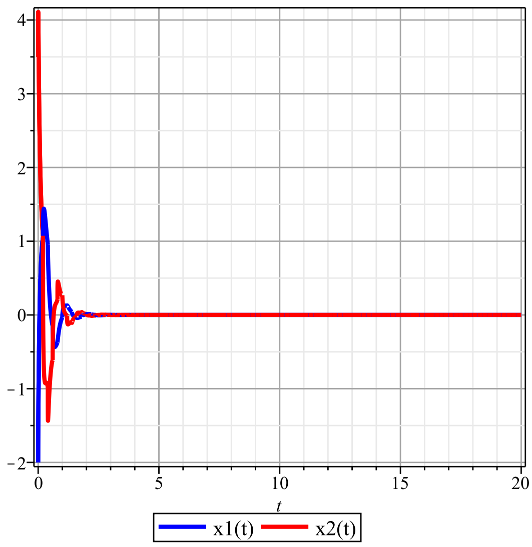
$$b_۱(\alpha) = \delta(\alpha - \tfrac{۱}{۲}),$$

$$b_۲(\alpha) = \delta(\alpha - \tfrac{۱}{۳}),$$

و با استفاده از ملاحظه (۱.۳) دستگاه (۹.۳) را به دستگاه مشتق کسری زیر تبدیل می‌نمائیم:

---

[14]Dirac Delta function



شکل ۱: نقطه تعادلی دستگاه (۹.۳) با شرایط اولیه (۲,۳٫۵-) به‌طور مجانب پایدار است.

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_t^{\frac{1}{6}} x_1(t) &= y_1(t), \\
{}^{C}D_t^{\frac{1}{6}} y_1(t) &= y_2(t), \\
{}^{C}D_t^{\frac{1}{6}} y_2(t) &= a\, x_1(t) + b\, x_2(t), \\
{}^{C}D_t^{\frac{1}{6}} x_2(t) &= y_3(t), \\
{}^{C}D_t^{\frac{1}{6}} y_3(t) &= c\, x_1(t) + d\, x_2(t),
\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

با شرایط اولیه $(0, 0, x_{10}, 0, x_{20})$، در این‌صورت دستگاه خطی کسری (۱۰.۳) تنها دارای یک نقطه تعادلی $(0, 0, 0, 0, 0)$ است. اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم از بررسی پایداری دستگاه (۱۰.۳) برای دستگاه (۹.۳) استفاده کنیم. بنابراین اگر $a = 1$، $b = 2$، $c = -1/5$، و $d = -2/2$ در نظر

بگیریم، آنگاه معادله مشخصه دستگاه (۱۰.۳) برای $\omega = \frac{1}{۶}$ برابر با

$$\det(\lambda I - J) = ۰, \tag{۱۱.۳}$$

است که در آن J ماتریس ژاکوبین دستگاه (۱۰.۳) حول نقطه تعادلش، به‌شکل

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱/۵ & ۰ & ۰ & -۲/۲ & ۰ \end{pmatrix},$$

می‌باشد. از آنجایی‌که تمام جواب‌های معادله (۱۱.۳)، در شرایط

$$\left|\arg(\lambda_i)\right| \geq \pi/۱۲,$$

برای $i = ۱, \ldots, ۵$ صدق می‌کنند بنابراین دستگاه (۹.۳) به‌طور مجانب پایدار است.
جواب تقریبی دستگاه با مشتق کسری از مرتبه توزیعی (۹.۳) با شرایط اولیه $(-۲, ۳/۵)$ در شکل (۱) با به‌کارگیری از روش تبدیل دیفرانسیل کسری چندگامی [۱] نشان داده شده است.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی را تبدیل به دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری کرده سپس با استفاده از خاصیت بسط مجانبی تابع میتگ-لفلر به بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری پرداختیم. در ادامه مثالی برای این نوع دستگاه‌ها ارائه داده‌ایم تا نتایج خودمان را تصدیق کنیم.

سپاس‌گزاری

این مقاله با استفاده از اعتبار ویژه پژوهشی دانشگاه مازندران انجام شده است.

مراجع

[1] E. Abuteen, S. Momani and A. Alawneh, Solving the fractional nonlinear Bloch system using the multi-step generalized differential transform method, *Comput. Math. Appl.*, **68**(12) (2014), 2124–2132.

[2] H. Aminikhah, A. Refahi Sheikhani, H. Rezazadeh, Stability analysis of distributed order fractional Chen system, Research Article, *The Scientific World Journal*, (2013).

[3] H. Aminikhah, A. Refahi Sheikhani and H. Rezazadeh, Stability analysis of linear distributed order fractional system with multiple time delays, *U.P.B. Sci. Bull., Series A,*, **77**(2) (2015), 207-–218.

[4] R.L. Bagley and P.J. Torvik, On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations-Part I, *Int. J. Appl. Math.*, **2**(7) (2000), 865–882.

[5] R.L. Bagley and P.J. Torvik, On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations-Part II, *Int. J. Appl. Math.*, **2** (2000), 965–988.

[6] M. Caputo, Elasticità e dissipazione. Zanichelli, 1969.

[7] M. Caputo, Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters, *Ann. Univ. Ferrara.*, **41**(1) (1995), 73–84.

[8] W. Deng, C. Li and J. Lü, Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, *Nonlinear Dyn.*, **48**(4) (2007), 409–416.

[9] K. Diethelm and N.J. Ford, Numerical analysis for distributed-order differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **225**(1) (2009), 96–104.

[10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science Limited, 2006.

[11] C. Li, F. Zhang, J. Kurths and F. Zeng, Equivalent system for a multiple-rational-order fractional differential system, *Philos. Trans. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci.*, **371** (2013), 1-30.

[12] D. Matignon, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, *In Computational engineering in systems applications*, **2** (1996), 963–968.

[13] H.S. Najafi, A.R. Sheikhani and A. Ansari, Stability analysis of distributed order fractional differential equations, Research Article, *Abstr. Appl. Anal.*, (2011).

[14] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, NewYork, 1974.