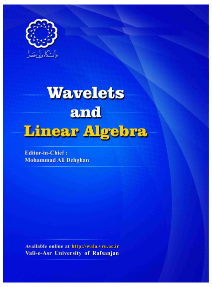
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۵۵-۱۷۸



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

مثلثی‌سازی بلوکی و جبرهای حقیقی سادهٔ ماتریس‌های عددی

مرضیه طالشی[آ]، بامداد ر. یاحقی[*آ]

[آ]گروه ریاضی و کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، استان گلستان، ایران

با درود و مهر، پیشکش مهدی جان رجبعلی‌پور و به یاد بتول و دینای نازنینش

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۵ فروردین ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۳۱ تیر ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:
اعداد حقیقی، مختلط و کواترنیونی، ماتریس‌های عددی، جبرهای حقیقی (ساده)، مثلثی‌سازی بلوکی، نیم‌گروه‌ها.

چکیده

منظور از یک ماتریس عددی ماتریسی با درایه‌های حقیقی، مختلط، یا کواترنیونی است. در این مقاله همزاد قضیهٔ آشنای مثلثی‌سازی بلوکی را برای جبرهای حقیقی ماتریس‌های عددی ارائه و ثابت می‌کنیم. از این رهگذر، نتایجی چند از این قضیه در ارتباط با جبرهای حقیقی ساده و همچنین نیم‌گروه‌های ساده با طیف حقیقی را ثابت می‌کنیم.

۱. پیش‌درآمد

این مقاله از دو بخش تشکیل شده است. بخش مقدماتی نخست، درآمدی کوتاه بر ماتریس‌ها، با تاکید بر ماتریس‌های عددی، و بیشتر در حد استوار ساختن تعریف‌ها و نمادهای آشنای مورد نیاز در این مقاله است. برای شرحی کامل از مفاهیم و قضیه‌های مورد نیاز این مقاله خوانندهٔ علاقه‌مند را به منابع [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۹]، و [۱۰] رجوع می‌دهیم. در بخش دوم قضیهٔ مثلثی‌سازی بلوکی برای جبرهای حقیقی ماتریس‌های عددی ارائه خواهد شد و، از این راهگذار، گزاره‌هایی چند در ارتباط با جبرهای حقیقی و نیم‌گروه‌های سادهٔ ماتریس‌های عددی بیان خواهند شد.

۲. درآمد

در سراسر این مقاله، مگر اینکه خلاف آن گفته شود، $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$، D نشانگر یک حلقهٔ تقسیم و F نشانگر یک زیرمیدان مرکز آن است. چنان‌که مرسوم است $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، و $\mathbb{H}$، به ترتیب، نشانگر میدانهای اعداد حقیقی و مختلط و حلقهٔ تقسیم اعداد کواترنیونی هستند. یادآور می‌شویم که حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها به طور صوری به صورت زیر تعریف شده

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ i^۲ = j^۲ = k^۲ = ijk = -۱\}$$

و به افتخار همیلتون با $\mathbb{H}$ نشان داده می‌شود. به $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ مجموعه‌ای عددی و به ازای $m, n \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های در $\mathbb{F}$، که با $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم، را مجموعهٔ ماتریس‌های عددی $m \times n$ می‌گوییم. مطلبی کاملا سرراست است که $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ تحت جمع معمولی ماتریس‌ها تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد. وقتی می‌نویسیم ماتریس (بلوکی) $(A)_{n\times n}$ و همچنین $A = (a_{ij})_{n\times n}$ منظور ماتریس A است، که $n \times n$ بوده و درایهٔ ij آن a_{ij} است، که البته این درایه در جُستار ماتریس‌های بلوکی $n \times n$ خود می‌تواند ماتریس باشد. بنا به تعریف

$$\mathbb{F}^n := M_{n\times ۱}(\mathbb{F}), \quad \mathbb{F}_n := M_{۱\times n}(\mathbb{F}).$$

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: marzietaleshi@yahoo.com (مرضیه طالشی)، bamdad5@hotmail.com (بامداد یاحقی).
http://doi.org/10.22072/wala.2021.527624.1325

مجموعه‌های $\mathbb{F}^n$ و $\mathbb{F}_n$ به همراه جمع برداری و ضرب اسکالر، به ترتیب، تشکیل فضاهای برداری راست و چپ n-بعدی روی $\mathbb{F}$ می‌دهند. اگر $m = n$، مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌ها در $\mathbb{F}$ را با $M_n(\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ $M_n(\mathbb{F})$ تحت عمل‌های جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقهٔ یکدار می‌دهد. منظور از $GL_n(\mathbb{F})$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر در $M_n(\mathbb{F})$ است. گاه‌گاه، برای تاکید عضوهای همانی عمل‌های جمع و ضرب $M_n(\mathbb{F})$ را، به ترتیب، با $\circ_n := (\circ)_{n\times n}$ و $I_n := (\delta_{ij})_{n\times n}$ نشان می‌دهیم، که در آن δ_{ij} نشانگر δی کرونکر است.

روشن است که تعاریف و نمادهای استاندارد بالا برای ماتریس‌های با درایه‌ها در یک حلقهٔ تقسیم D نیز برقرارند.

به ازای فضای برداری راست V روی D، مجموعهٔ عملگرهای خطی راست $T : V \to V$ را با $\mathcal{L}(V)$ نشان می‌دهیم، که تحت جمع عملگری یک گروه آبلی است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{B} = (\beta_i)_{i=۱}^n$ یک پایهٔ مرتب برای فضای برداری راست V روی D باشد. به ازای هر $v \in V$ اسکالرهای یکتای $x_۱, \ldots, x_n \in D$ موجودند به طوری که $v = \beta_۱ x_۱ + \cdots + \beta_n x_n$. به $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T \in D^n$ مختصات v نسبت به پایهٔ $\mathfrak{B}$ گوییم و آن را با نماد $[v]_{\mathfrak{B}}$ نشان می‌دهیم. همچنین، به ازای هر $T \in \mathcal{L}(V)$، ماتریس یکتای $A \in M_n(D)$ موجود است به طوری که به ازای هر $v \in D^n$،

$$[Tv]_{\mathfrak{B}} = A[v]_{\mathfrak{B}}.$$

ماتریس A را ماتریس نمایش T نسبت به پایهٔ $\mathfrak{B}$ گوییم و آن را با $[T]_{\mathfrak{B}}$ نشان می‌دهیم. در واقع ستون j-ام ماتریس نمایش T نسبت به پایهٔ $\mathfrak{B}$ برابر با $[T\beta_j]_{\mathfrak{B}}$ است.

توجه کنید هر ماتریس $A \in M_n(D)$ به طور طبیعی یک تبدیل خطی T_A، تعریف‌شده توسط $T_A x = Ax$ ($x \in D^n$)، روی فضای برداری راست D^n القا می‌کند. نمایش ماتریسی این تبدیل خطی نسبت به پایهٔ استاندارد D^n، یعنی پایهٔ مرتب $(e_i)_{i=۱}^n$ متشکل از بردارهای $e_i = (\delta_{i۱}, \ldots, \delta_{in})^T \in D^n$، همان ماتریس A است. هماره، منظور از δ_{ij} دلتای کرونکر است.

در بخش بعد به مفاهیم آشنای زیر نیاز داریم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{V}$ یک فضای برداری راست روی حلقهٔ تقسیم D و $\mathcal{N}$ یک زیرفضای $\mathcal{V}$ باشد. در این صورت فضای خارج قسمتی $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{N}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{V}/\mathcal{N} = \{[x] = x + \mathcal{N} : x \in \mathcal{V}\}.$$

می‌توان دید که $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{N}}$ به همراه جمع و ضرب اسکالر زیر، که خوش‌تعریف‌اند،

$$[x] + [y] := [x + y], \quad [x]\lambda := [x\lambda], \quad (x, y \in V, \ \ \lambda \in D)$$

تشکیل یک فضای برداری روی D می‌دهد.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $\mathcal{V}$ یک فضای برداری راست روی حلقهٔ تقسیم D باشد و همچنین $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. در این صورت $\lambda \in D$ را یک مقدار ویژهٔ راست T گوییم هرگاه بردار ناصفر $x \in \mathcal{V}$ موجود باشد به طوری که $Tx = x\lambda$، که در این صورت بردار x را یک بردار ویژهٔ (راست) متناظر به λ گوییم. به طور مشابه، $\lambda \in D$ را یک مقدار ویژهٔ راست ماتریس $A \in M_n(D)$ گوییم هرگاه $\lambda \in D$ یک مقدار ویژهٔ راست $T_A \in \mathcal{L}(D^n)$ باشد، که در آن T_A، تعریف‌شده توسط $T_A x = Ax$ $(x \in D^n)$، تبدیل خطی راستِ القاشده توسط ماتریس $A \in M_n(D)$ است. به مجموعهٔ همهٔ مقادیر ویژهٔ راست $A \in M_n(D)$ طیف A گفته می‌شود و با نماد $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم دلخواه و همچنین $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ خانواده‌هایی از ماتریس‌ها در $M_n(D)$ باشند. خانوادهٔ $\mathcal{A}$ را مشابه با خانوادهٔ $\mathcal{B}$ گوییم، و با نماد $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس $P \in GL_n(D)$ موجود باشد به طوری که

$$\mathcal{A} = P^{-1}\mathcal{B}P = \{P^{-1}BP : B \in \mathcal{B}\}.$$

به طور طبیعی، ماتریس $A \in M_n(D)$ را مشابه با ماتریس $B \in M_n(D)$ گوییم، و با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم، هرگاه $\{A\} \sim \{B\}$. به آسانی می‌توان نشان داد که رابطهٔ تشابه خانواده‌های ماتریس‌ها،

یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(M_n(D))$، مجموعهٔ توانی $M_n(D)$، است؛ همچنین رابطهٔ تشابه ماتریس‌ها در $M_n(D)$، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $M_n(D)$ است.

همچنین در ادامه به چند تعریف آشنای دیگر نیازمندیم.

تعریف ۵.۲. مجموعهٔ $\mathcal{S} \subseteq M_n(D)$ را یک نیم‌گروه [۱] ضربی (به اختصار نیم‌گروه) در $M_n(D)$ گوییم هر گاه تحت عمل ضرب ماتریسی بسته باشد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیرحلقهٔ $M_n(D)$ باشد. در این صورت حلقهٔ $\mathcal{A}$ را یک F-جبر گوییم هر گاه نسبت به ضرب اسکالر در اعضای F بسته باشد. همچنین به ازای نیم‌گروه ضربی $\mathcal{S}$ در $M_n(D)$، F-جبر تولید شده توسط $\mathcal{S}$ را با $\mathrm{Alg}_F\mathcal{S}$ نشان می‌دهیم و بنابر تعریف

$$\mathrm{Alg}_F\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=۱}^{k} c_i S_i : k \in \mathbb{N}, c_i \in F, S_i \in \mathcal{S}, ۱ \leq i \leq k \right\}.$$

به ویژه، $\mathbb{R}$-جبرهای ماتریس‌های عددی را گاه‌گاه جبرهای حقیقی می‌نامیم.

تعریف ۷.۲. ماتریس $A \in M_n(D)$ را F-جبری گوییم هر گاه چندجمله‌ای $p \in F[x]$ موجود باشد به طوری که $p(A) = ۰$.

تعریف ۸.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ماتریس‌ها در $M_n(D)$ باشد. زیرفضای $\mathcal{M}$ از D^n را تحت $\mathcal{F}$ پایا[۲] گوییم هر گاه به ازای هر $A \in \mathcal{F}$ و $m \in \mathcal{M}$، $Am \in \mathcal{M}$. به روشنی $\{۰\}$ و D^n زیرفضاهای پایای بدیهی $M_n(D)$ هستند. مجموعهٔ زیرفضاهای پایا تحت $\mathcal{F}$ را با $\mathrm{Lat}(\mathcal{F})$ نشان می‌دهیم.

---
[1] semigroup
[2] invariant

تعریف ۹.۲. یک خانواده $\mathcal{F}$ از ماتریس‌ها در $M_n(D)$ را تحویل‌پذیر[3] گوییم هر گاه $\mathcal{F} = \{0\}$ یا $\mathcal{F}$ دارای زیرفضای پایای غیربدیهی باشد. خانواده $\mathcal{F}$ را تحویل‌ناپذیر[4] گوییم هر گاه تحویل‌پذیر نباشد. خانواده $\mathcal{F}$ را به طور مطلق تحویل‌ناپذیر[5] گوییم هرگاه $\mathcal{F}$ در $M_n(\Delta)$ به ازای هر توسیع D مانند Δ، یعنی هر حلقهٔ تقسیم $D \subseteq \Delta$، که مرکز آن توسیع میدان مرکز D است، تحویل‌ناپذیر باشد.

یادآور می‌شویم که $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، را می‌توان با استفاده از نشانندهٔ[6] زیر به عنوان زیرمجموعهٔ $M_2(\mathbb{R})$ در نظر گرفت

$$e : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R}), \quad e(a+bi) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

به این نمایش، نمایش استاندارد $\mathbb{C}$ در $M_2(\mathbb{R})$ گفته می‌شود. همچنین $\mathbb{H}$، حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها، را می‌توان از طریق نشانندهٔ

$$e' : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C}), \quad e'(z+wj) := \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

به عنوان زیرمجموعه‌ای از $M_2(\mathbb{C})$ و با نشانندهٔ

$$e'' : \mathbb{H} \to M_4(\mathbb{R}), \quad e''(a+bi+cj+dk) := \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ای از $M_4(\mathbb{R})$ در نظر گرفت که به آن‌ها نمایش‌های استاندارد $\mathbb{H}$، به

[3] reducible
[4] irreducible
[5] absolutely irreducible
[6] embedding

ترتیب، در $M_۲(\mathbb{C})$ و $M_۴(\mathbb{R})$ گوییم. همچنین با استفاده از نشانندهٔ

$$e_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{۲n}(\mathbb{R}), \quad e_n([x_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [e(x_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

می‌توان جبر حقیقی $M_n(\mathbb{C})$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $M_{۲n}(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. به طور مشابه، با نشاننده‌های

$$e'_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{۲n}(\mathbb{C}), \quad e'_n([y_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [e'(y_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

و

$$e''_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{۴n}(\mathbb{R}), \quad e''_n([y_{i,j}]_{i,j=۱}^n) := [e''(y_{i,j})]_{i,j=۱}^n,$$

جبر حقیقی $M_n(\mathbb{H})$ را می‌توان، به ترتیب، به عنوان زیرمجموعه‌ای از $M_{۲n}(\mathbb{C})$ و $M_{۴n}(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. در این مقاله وقتی می‌نویسیم $M_n(\mathbb{H}) \subseteq M_{۴n}(\mathbb{R})$، منظور ما در واقع $M_n(e''(\mathbb{H})) \subseteq M_{۴n}(\mathbb{R})$ است. به طور مشابه می‌توان بقیهٔ موارد را بیان کرد.

گزارهٔ زیر، که در [۱] بیان شده است و برهان آن را برای کامل بودن ارائهٔ مطلب در اینجا نیز می‌آوریم، نشان می‌دهد که نشاننده‌های e، e'، و e'' نمایش‌هایی تحویل‌ناپذیرند.

گزاره ۲.۱۰. *فرض کنید نشاننده‌های e، e'، و e''، به ترتیب، نمایش‌های مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$، و $\mathbb{H}$ در $M_۲(\mathbb{R})$، $M_۲(\mathbb{C})$، و $M_۴(\mathbb{R})$ باشند. در این صورت $e(\mathbb{C})$ در $M_۲(\mathbb{R})$، $e'(\mathbb{H})$ در $M_۲(\mathbb{C})$، و $e''(\mathbb{H})$ در $M_۴(\mathbb{R})$، $\mathbb{R}$-جبرهایی تحویل‌ناپذیرند.*

اثبات. از آنجا که ماتریس $e(i) = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ فاقد مقدار ویژهٔ حقیقی است، در $M_۲(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است. لذا $e(\mathbb{C}) \subset M_۲(\mathbb{R})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است. برای اثبات قسمت دوم کافی است نشان دهیم که $\{e'(۱), e'(i), e'(j), e'(k)\}$ روی مجموعهٔ $\mathbb{C}$ مستقل خطی است. برای این منظور، فرض کنید

$$a_۱e'(۱) + a_۲e'(i) + a_۳e'(j) + a_۴e'(k) = ۰,$$

که در آن $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$. لذا

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = 0.$$

بنابراین $a_1 + ia_2 = a_1 - ia_2 = 0$ و همچنین $a_3 + ia_4 = -a_3 + ia_4 = 0$. در نتیجه، $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. لذا قسمت دوم حکم ثابت می‌شود. برای اثبات قسمت سوم حکم کافی است نشان دهیم $e''(\mathbb{H})x_0 = \mathbb{R}^4$ به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. برای این منظور $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ را به دلخواه اختیار کنید. می‌توان نشان داد که $\mathfrak{B} = \{e''(1), e''(i), e''(j), e''(k)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}$-جبر $e''(\mathbb{H})$ در $M_4(\mathbb{R})$ است. قرار دهید

$$\mathfrak{B}_1 = \{e''(1)x_0, e''(i)x_0, e''(j)x_0, e''(k)x_0\}.$$

ادعا می‌کنیم که $\mathfrak{B}_1$ یک پایه برای $\mathbb{R}^4$ است. کافی است استقلال خطی $\mathfrak{B}_1$ در $\mathbb{R}^4$ را نشان دهیم. برای این منظور فرض کنید

$$a_1e''(1)x_0 + a_2e''(i)x_0 + a_3e''(j)x_0 + a_4e''(k)x_0 = 0,$$

که در آن $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. لذا

$$a_1e''(1)x_0 + a_2e''(i)x_0 + a_3e''(j)x_0 + a_4e''(k)x_0 = e''(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)x_0 = 0,$$

از آنجا که $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ و این که هر عضو ناصفر در $\mathbb{H}$ وارون‌پذیر است،

$$e''(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) = 0$$

و لذا $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k = 0$، که این ادعا را ثابت می‌کند. بنابراین $e''(\mathbb{H}) \subset M_4(\mathbb{R})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر است. لذا حکم ثابت می‌شود. □

اکنون زیرجبرهای حقیقی استاندارد $M_n(\mathbb{F})$ را تعریف می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که این زیرجبرها تحویل‌ناپذیرند.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. منظور از یک زیرجبر حقیقی استاندارد $M_n(\mathbb{H})$، یکی از جبرهای زیر است

$$i)\ M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{H}), \quad ii)\ M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{H}), \quad iii)\ M_n(\mathbb{H}) \subseteq M_n(\mathbb{H}),$$

و منظور از یک زیرجبر حقیقی استاندارد $M_n(\mathbb{C})$، یکی از جبرهای زیر است

$$i)\ M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C}), \quad ii)\ M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C}), \quad iii)\ M_{\frac{n}{۲}}(\mathbb{H}) \subseteq M_n(\mathbb{C}),$$

که در حالت سوم البته $۲|n$. همچنین منظور از یک زیرجبر حقیقی استاندارد $M_n(\mathbb{R})$، یکی از جبرهای زیر است

$$i)\ M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R}), \quad ii)\ M_{\frac{n}{۲}}(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{R}), \quad iii)\ M_{\frac{n}{۴}}(\mathbb{H}) \subseteq M_n(\mathbb{R}),$$

که در حالت‌های دوم و سوم، به ترتیب، $۲|n$ و $۴|n$.

انگیزهٔ تعریف ما از زیرجبرهای استاندارد $M_n(\mathbb{F})$ از [۱۳، قضیه ۲.۱] می‌آید، که در زیر آن را به اختصار می‌آوریم.

قضیه ۱۲.۲. *با تقریب تشابه تنها زیرجبرهای حقیقی و تحویل‌ناپذیر $M_n(\mathbb{F})$ زیرجبرهای حقیقی استاندارد آن هستند.*

اثبات. به [۱۳، قضیه ۲.۱] و برهان آن رجوع کنید. □

هر چند که لم زیر نتیجه‌ای آنی از قضیهٔ بالاست، ولی برای کامل بودن ارائهٔ مطلب برهانی مستقیم از آن را اینجا می‌آوریم.

لم ۱۳.۲. *فرض کنید* $n \in \mathbb{N}$ *و* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. *در این صورت زیرجبرهای حقیقی استاندارد* $M_n(\mathbb{F})$ *در* $M_n(\mathbb{F})$ *تحویل‌ناپذیرند.*

اثبات. به روشنی اگر $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ و $\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2$، آنگاه $M_n(\mathbb{F}_1)$ در $M_n(\mathbb{F}_2)$ تحویل‌ناپذیر است. باقی می‌ماند نشان دهیم که $M_n(\mathbb{C})$ در $M_{2n}(\mathbb{R})$، $M_n(\mathbb{H})$ در $M_{4n}(\mathbb{R})$، و $M_n(\mathbb{H})$ در $M_{2n}(\mathbb{C})$ تحویل‌ناپذیرند.

ابتدا نشان می‌دهیم که جبر حقیقی $M_n(\mathbb{C})$ در $M_{2n}(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است. برای این منظور فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ به طوری که $x \neq 0$. کافی است نشان دهیم که یک ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ موجود است به طوری که $Ax = y$. قرار دهید

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

که در آن $x_i, y_i \in \mathbb{R}^2$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$ و همچنین x_i ها همگی صفر نیستند. با توجه به گزارهٔ ۱۰.۲ از آنجا که جبر حقیقی $\mathbb{C}$ در $M_2(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است، از فرض $x \neq 0$ نتیجه می‌گیریم که به ازای یک $1 \leq j \leq n$، $x_j \neq 0$، و لذا به ازای هر $y_i \in \mathbb{R}^2$، که $1 \leq i \leq n$، یک $a_{ij} \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $a_{ij}x_j = y_i$. فرض کنید $A_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ نشانگر ماتریس بلوکی باشد، که درایهٔ ij ام آن a_{ij} و بقیهٔ درایه‌های آن صفر هستند. قرار دهید

$$A := \sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

روشن است که $A \in M_n(\mathbb{C})$، و اینکه

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x = y.$$

بنابراین $M_n(\mathbb{C})$ در $M_{2n}(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $M_n(\mathbb{H})$ در $M_{4n}(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است. می‌ماند نشان دهیم که $M_n(\mathbb{H})$ در $M_{2n}(\mathbb{C})$ تحویل‌ناپذیر است. برای این منظور فرض کنید A_{ij}، B_{ij}، C_{ij} و D_{ij}، نمایش ماتریس‌های بلوکی $n\times n$ باشند به طوری که درایهٔ ij ام آن‌ها به ترتیب، $e'(1)$، $e'(i)$، $e'(j)$ و $e'(k)$ و بقیهٔ درایه‌های آنها صفر باشند و e' نیز نشانندهٔ $\mathbb{H}$ در $M_2(\mathbb{C})$ باشد. کافی است نشان دهیم که به ازای هر $1\leq i,j\leq n$، مجموعهٔ

$$\{A_{ij},B_{ij},C_{ij},D_{ij}\}_{i,j=1}^{n},$$

که متشکل از $4n^2$ ماتریس است، روی $\mathbb{C}$ مستقل خطی است. برای این منظور فرض کنید به ازای اعداد مختلط دلخواه $\alpha_{mp},\beta_{mp},\gamma_{mp},\lambda_{mp}\in\mathbb{C}$، که در آن $1\leq m,p\leq n$، داریم

$$\sum_{m,p=1}^{n}(\alpha_{mp}A_{mp}+\beta_{mp}B_{mp}+\gamma_{mp}C_{mp}+\lambda_{mp}D_{mp})=0.$$

در این صورت به ازای هر $1\leq m,p\leq n$،

$$\alpha_{mp}+i\beta_{mp}=0,\quad \alpha_{mp}-i\beta_{mp}=0$$

و

$$\gamma_{mp}+i\lambda_{mp}=0,\quad -\gamma_{mp}+i\lambda_{mp}=0.$$

از آنجا،

$$\alpha_{mp}=\beta_{mp}=\gamma_{mp}=\lambda_{mp}=0,$$

به ازای هر $1\leq m,p\leq n$. بنابراین $M_n(\mathbb{H})$ یک $\mathbb{R}$-جبر تحویل‌ناپذیر در $M_{2n}(\mathbb{C})$ است. □

۳. مثلثی‌سازی بلوکی جبرهای حقیقی ماتریس‌های عددی

مثلثی‌سازی بلوکی حدسی بود که توسط هانس اشنایدر[۷] برای جبرهای ماتریسی با درایه‌ها از یک میدان بسته جبری زده شد. این حدس برای جبرهای ماتریسی با درایه‌ها از یک میدان دلخواه توسط جان واترز[۸] در مقاله‌ای تحت عنوان «مثلثی‌سازی جبرهای ماتریسی» در [۱۱، قضیه ۱] ارائه و ثابت گردید. برای روایت‌های مختلفی از قضیهٔ مثلثی‌سازی بلوکی خواننده را به [۷، قضیه ۴.۲.۶]، [۹، قضیه ۱.۵.۰]، و [۱۴، نتیجه ۲.۵] بازگشت می‌دهیم. در این بخش قضیهٔ مثلثی‌سازی بلوکی را برای جبرهای حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ ارائه می‌کنیم. در آغاز به چند مفهوم آشنا نیاز داریم.

تعریف ۱.۳. جبر حقیقی $\mathcal{A}$ از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{F})$ را ساده[۹] گوییم هر گاه تنها ایده‌آل‌های آن $\{\circ\}$ و $M_n(\mathbb{F})$ باشند.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $t, n \in \mathbb{N}$ که $t \leq n$ و $n_i \in \mathbb{N}$ $(۱ \leq i \leq t)$ به طوری که $n = n_۱ + \cdots + n_t$. در این صورت به $(n_۱, \ldots, n_t)$ یک افراز عدد n می‌گوییم. روشن است که به ازای هر افراز $(n_۱, \ldots, n_t)$ از n، هر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{F})$ را می‌توان به طور طبیعی به صورت ماتریس بلوکی $A = (A_{ij})_{t\times t}$ در نظر گرفت، که در آن

$$A_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F}), \quad (۱ \leq i, j \leq t).$$

ماتریس بلوکی $A = (A_{ij})_{t\times t}$ نسبت به افراز $(n_۱, \ldots, n_t)$ از n را بالامثلثی بلوکی گوییم هر گاه

$$A_{ij} = \circ \in M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$$

به ازای هر $i > j$. در این صورت به ازای هر $A \in M_n(\mathbb{F})$، نماد $\mathbf{e}_{ii}(A) = A_{ii}$ را برای درایهٔ ii بلوکی قطری A به کار می‌بریم. همچنین A را یک ماتریس قطری بلوکی گوییم هر گاه

$$A_{ij} = \circ \in M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$$

[7]Hans Schneider
[8]John Watters
[9]simple

به ازای هر $i \neq j$، که در این حالت $A = \mathrm{diag}(A_{11}, \ldots, A_{tt})$. ماتریس بالامثلثی (بلوکی) A را یک ماتریس بالامثلثی (بلوکی) اکید گوییم هر گاه درایه‌های (بلوکی) قطری آن همگی صفر باشند. توجه کنید که به ازای هر افراز داده شدهٔ $(n_1, \ldots, n_t)$ از n، و به ازای هر $1 \leq i, j \leq t$، نگاشت $\mathbf{e}_{ij} : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$، تعریف شده توسط $\mathbf{e}_{ij}(A) = A_{ij}$، نگاشتی خطی و پوشاست و لذا متناظر به هر زیرمجموعهٔ $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ می‌توان $\mathbf{e}_{ij}(\mathcal{S}) \subseteq M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$ را در نظر گرفت. به ویژه، به ازای هر $1 \leq i \leq t$، می‌توان نگاشت $\mathbf{e}_{ii} : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F}) := M_{n_i}(\mathbb{F})$ را در نظر گرفت. توجه کنید که $\mathbf{e}_{ii}$ بسیار به ندرت یک همریختی جبرهای حقیقی است ولی تحدید $\mathbf{e}_{ii}$ به هر جبر حقیقی بالامثلثی بلوکی نسبت به افراز $(n_1, \ldots, n_t)$ از n در $M_n(\mathbb{F})$، علاوه بر خطی بودن، یک همریختی جبرهای حقیقی است.

اکنون به بیان قضیهٔ مثلثی‌سازی بلوکی می‌پردازیم.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{A}$ یک جبر حقیقی از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$ باشد. در این صورت یک ماتریس $P \in GL_n(\mathbb{H})$، و یک افراز $(n_1, \ldots, n_t)$ از n، که در آن $t \in \mathbb{N}$ و $t \leq n$، موجودند به طوری که به ازای هر $A \in \mathcal{A}$*

$$P^{-1}AP = (B_{ij})_{t\times t}, \qquad (B_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(\mathbb{H})),$$

و در آن $B_{ij} = 0$ به ازای هر $1 \leq j < i \leq t$. همچنین، به ازای هر $1 \leq i \leq t$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = \{0\}$، که در این صورت $n_i = 1$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ به ازای یک $\mathbb{F}_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. به علاوه، به ازای هر زوج (i, j) که $1 \leq i, j \leq t$ و $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) \neq \{0\}$ و $\mathbf{e}_{jj}(P^{-1}\mathcal{A}P) \neq \{0\}$، یا $n_i = n_j \geq 1$ و $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}_j$ و

$$\left\{\mathbf{e}_{ii}(B) = \mathbf{e}_{jj}(B) : \ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = M_{n_i}(\mathbb{F}_i),$$

و یا

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : \ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j).$$

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{B}_s$ پایه استاندارد $\mathbb{H}^n$، و

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t = \mathbb{H}^n \tag{۱.۳}$$

یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای پایای $\mathcal{A}$ باشد. پایه $\mathfrak{B}_1$ از V_1 را در نظر می‌گیریم و آن را به پایه $\mathfrak{B}_2$ از V_2 گسترش می‌دهیم. با ادامه این روند به پایه‌های $\mathfrak{B}_1 \subsetneq \mathfrak{B}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{B}_t$ به ترتیب برای V_1، V_2، ...، و $V_t = \mathbb{H}^n$ می‌رسیم. به ازای هر $1 \leq i \leq t$، قرار دهید $n_i := \dim\frac{V_i}{V_{i-1}}$. به روشنی $(n_1, \ldots, n_t)$ یک افراز از n است. همچنین، گیریم $P_1 := [I]_{\mathfrak{B}_s, \mathfrak{B}_t} \in GL_n(\mathbb{H})$ ماتریس نمایش عملگر همانی نسبت به پایه‌های $\mathfrak{B}_s$ و $\mathfrak{B}_t$ یا، به طور معادل، ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ استاندارد $\mathfrak{B}_s$ به پایهٔ $\mathfrak{B}_t$ باشد. در این صورت به ازای هر $A \in \mathcal{A}$، $P_1^{-1}AP_1 = (B_{ij})_{t\times t}$، که در آن $B_{ij} \in M_{n_i\times n_j}(\mathbb{H})$ $(1 \leq i, j \leq t)$ و $B_{ij} = 0$ هر گاه $1 \leq j < i \leq t$. حال به ازای هر $1 \leq i \leq t$ قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A}_i := \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}\mathcal{A}P_1) = \left\{\mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}AP_1) : A \in \mathcal{A}\right\} \subseteq M_{n_i}(\mathbb{H}).$$

در این صورت هر $\mathcal{A}_i$ یک جبر حقیقی است. بنا به ماکسیمال بودن زنجیر (۱.۳) به ازای هر $1 \leq i \leq t$، یا $\mathcal{A}_i = 0$، که در این حالت $n_i = 1$، و یا $\mathcal{A}_i$ یک جبر حقیقی تحویل‌ناپذیر در $M_{n_i}(\mathbb{H})$ است، که در این حالت بنا به [۱۳، قضیه ۱.۲]، داریم $\mathcal{A}_i \sim M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$، به ازای یک $\mathbb{F}_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$، یعنی ماتریس وارون‌پذیر $Q_i \in M_{n_i}(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که $Q_i^{-1}\mathcal{A}_iQ_i = M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$. در حالتی که $\mathcal{A}_i = 0$، قرار دهید $Q_i = 1 \in \mathbb{H}$. اکنون تعریف کنید

$$P_2 := \mathrm{diag}(Q_1, \ldots, Q_t).$$

با توجه به اینکه $P_2 = \mathrm{diag}(Q_1, \ldots, Q_t)$ ماتریسی قطری بلوکی است، به ازای هر $1 \leq i \leq t$، داریم

$$\mathbf{e}_{ii}(P_2^{-1}P_1^{-1}\mathcal{A}P_1P_2) = Q_i^{-1}\mathcal{A}_iQ_i \in \left\{\{0\}, M_{n_i}(\mathbb{F}_i)\right\},$$

و همچنین به ازای $P_3 := P_1P_2$، می‌توان نوشت

$$P_3^{-1}\mathcal{A}P_3 =$$

$$\Big\{(B_{ij})_{t\times t} \in M_n(\mathbb{H}) : B_{ij} \in M_{n_i\times n_j}(\mathbb{H})\ (1 \le i, j \le t),\ B_{ij} = 0\ (1 \le j < i \le t)\Big\}.$$

با توجه به این موضوع در صورت لزوم با اعمال این تشابه، یعنی جایگزینی P_3 با P_1، از ابتدا می‌توان بدون از دست دادن کلیت فرض کرد به ازای هر $1 \le i \le t$، که $\mathcal{A}_i \ne \{0\}$، داریم $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$. اکنون مجموعهٔ J پدید آمده از اندیس‌های $1 \le i \le t$ متناظر به بلوک‌های غیرصفر $P_1^{-1}\mathcal{A}P_1$ را در نظر می‌گیریم. گوییم $j \in J$ به $i \in J$ وابسته است هر گاه

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}AP_1) = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1}AP_1) = 0.$$

در غیر این صورت گوییم اندیس $j \in J$ از اندیس $i \in J$ مستقل است. فرض کنید j به i وابسته باشد. نگاشت $f_{ij} : \mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \longrightarrow \mathcal{A}_j = M_{n_j}(\mathbb{F}_j)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_{ij}\Big(\mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}AP_1)\Big) = \mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1}AP_1).$$

نشان می‌دهیم که این نگاشت خوش‌تعریف است. برای این منظور فرض کنید

$$\forall A, A' \in \mathcal{A}; \quad \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}AP_1) = \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}A'P_1) \ \Rightarrow \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}(A - A')P_1) = 0.$$

از آنجا که $A - A' \in \mathcal{A}$ و j به i وابسته است،

$$\mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1}(A - A')P_1) = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1}AP_1) = \mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1}A'P_1).$$

لذا نگاشت $f_{ij} : M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \longrightarrow M_{n_j}(\mathbb{F}_j)$ خوش‌تعریف است. همچنین f_{ij} یک همریختی جبرهای حقیقی است زیرا $P_1^{-1}\mathcal{A}P_1$ نسبت به افراز $(n_1, \dots, n_t)$ از n بالامثلثی بلوکی است. به روشنی f_{ij}

پوشاست. این امر ایجاب می‌کند که $f_{ij} \neq 0$، زیرا در غیر این صورت $f_{ij}\big(M_{n_i}(\mathbb{F}_i)\big) = M_{n_j}(\mathbb{F}_j) = \{0\}$، که نتیجه‌ای ناممکن است. پس $\ker f_{ij} \neq M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$. حال، از آنجا که $M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ یک جبر ساده است و $\ker f_{ij}$ یک ایده‌آل آن است، و $\ker f_{ij} \neq M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$، به ناگزیر $\ker f_{ij} = \{0\}$. در نتیجه نگاشت f_{ij} یک‌به‌یک است، و از آنجا درمی‌یابیم که اندیس i نیز به j وابسته است، و لذا وابستگی اندیس‌ها، و از آنجا استقلال اندیس‌ها، روی مجموعهٔ J یک رابطهٔ متقارن است. اینکه وابستگی اندیس‌های روی J انعکاسی و ترایایی است، پاک روشن است. بنابراین، وابستگی اندیس‌ها روی مجموعهٔ J یک رابطهٔ هم‌ارزی القا می‌کند، که آن را با $\sim_J$ می‌دهیم. تقارن این رابطه به ویژه ایجاب می‌کند که نگاشت $f_{ji} : M_{n_j}(\mathbb{F}_j) \longrightarrow M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ یک همریختی جبرهای حقیقی است. ولی به روشنی $f_{ij} \circ f_{ji} = I_{M_{n_j}(\mathbb{F}_j)}$ و $f_{ji} \circ f_{ij} = I_{M_{n_i}(\mathbb{F}_i)}$. به عبارت دیگر، f_{ij} یک یکریختی جبرهای حقیقی است و در نتیجه $n_i = n_j$ و $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}_j := \mathbb{F}$ زیرا $\mathbb{F}_i, \mathbb{F}_j \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. پس $M_{n_i}(\mathbb{F}_i) = M_{n_j}(\mathbb{F}_j) = M_{n_i}(\mathbb{F})$. اکنون قضیهٔ اسکولم-نوتر[۱۰] [۳]، صفحهٔ ۳۹]، نشان می‌دهد که یکریختی

$$f_{ij} : M_{n_i}(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n_j}(\mathbb{F}),$$

از یک یکریختی درونی $M_{n_i}(\mathbb{F})$ به دست می‌آید. یعنی، یک ماتریس وارون‌پذیر $R_{ij} \in M_{n_i}(\mathbb{H})$ موجود است به طوری که

$$\mathbf{e}_{jj}(P_1^{-1} A P_1) = R_{ij}^{-1}\Big(\mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1} A P_1)\Big) R_{ij}, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{۲.۳}$$

اکنون بنگرید که رابطهٔ وابستگی اندیس‌ها روی مجموعهٔ J یک رابطهٔ هم‌ارزی است. سپس فرض کنید $\{[j_1], \ldots, [j_p]\}$، که در آن $j_k \in J$ و $1 \leq k \leq p \leq |J| \leq t$، مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ هم‌ارزی $\sim_J$ باشد. قرار دهید $R = \mathrm{diag}(R_1, \ldots, R_t)$، که در آن $R_i = I_{n_i}$ هر گاه $\mathcal{A}_i = 0$ یا $i \in \{j_1, \ldots, j_p\}$، و $R_i = R_{ji}^{-1}$ اگر $i \in J \setminus \{j_1, \ldots, j_p\}$ و $i \sim_J j$ به ازای یک اندیس یگانهٔ $j \in \{j_1, \ldots, j_p\}$. نشان می‌دهیم $P^{-1}\mathcal{A}P$ که در آن $P := P_1 R$ حکم قضیه را برآورده می‌کند. با توجه به اینکه $R = \mathrm{diag}(R_1, \ldots, R_t)$ نسبت به افراز $(n_1, \ldots, n_t)$ از n ماتریسی قطری بلوکی

---

[10] Skolem-Noether theorem

است، ساخت ماتریس R، و اینکه $P^{-1}\mathcal{A}P = R^{-1}P_1^{-1}\mathcal{A}P_1R$، به روشنی به ازای هر $1 \leq i \leq t$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}\mathcal{A}P_1) = \{0\}$، که در این صورت $n_i = 1$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}\mathcal{A}P_1) = M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$. حال به ازای هر $i, j \in J$، یا این اندیس‌ها وابسته‌اند، یعنی، $i \sim_J j$، که در این صورت با توجه به ساخت ماتریس R و روابط (۲.۳)، داریم $n_i = n_j \geq 1$، $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}_j$، و به علاوه

$$\left\{\mathbf{e}_{ii}(B) = \mathbf{e}_{jj}(B) :\ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = \mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = \mathbf{e}_{ii}(P_1^{-1}\mathcal{A}P_1) = M_{n_i}(\mathbb{F}_i),$$

و یا اینکه $i \nsim_J j$. در این حالت بدیهی است که

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), \mathbf{e}_{jj}(B)\right) :\ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} \subseteq \mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) \times \mathbf{e}_{jj}(P^{-1}\mathcal{A}P) = M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j).$$

چون j و i وابسته نیستند، درمی‌یابیم که به ازای ماتریس‌هایی $B_1, B_2 \in P^{-1}\mathcal{A}P$، داریم

$$\mathbf{e}_{ii}(B_1) = 0_{n_i},\ \mathbf{e}_{jj}(B_1) \neq 0_{n_j}, \quad \mathbf{e}_{jj}(B_2) = 0_{n_j},\ \mathbf{e}_{ii}(B_2) \neq 0_{n_i}.$$

در نتیجه $\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), 0_{n_j}\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\}$ و $\left\{\left(0_{n_i}, \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\}$، به ترتیب، ایده‌آل‌های ناصفری در جبرهای حقیقی سادهٔ $M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times \left\{0_{n_j}\right\}$ و $\left\{0_{n_i}\right\} \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j)$ هستند زیرا، به ترتیب، شامل عضوهای ناصفر $\left(\mathbf{e}_{ii}(B_2), 0_{n_j}\right)$ و $\left(0_{n_i}, \mathbf{e}_{jj}(B_1)\right)$ می‌باشند. بنابراین

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), 0_{n_j}\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times \left\{0_{n_j}\right\}$$

و

$$\left\{\left(0_{n_i}, \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = \left\{0_{n_i}\right\} \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j).$$

اکنون، برابرهای بالا به همراه شمول‌های زیر

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), 0_{n_j}\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} + \left\{\left(0_{n_i}, \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} \subseteq$$

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j),$$

برابری دلخواه، یعنی

$$\left\{\left(\mathbf{e}_{ii}(B), \mathbf{e}_{jj}(B)\right) : B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = M_{n_i}(\mathbb{F}_i) \times M_{n_j}(\mathbb{F}_j)$$

را به دست می‌دهند. این برهان را کامل می‌کند. □

به طور مشابه می‌توان همزاد قضیهٔ ۳.۳ را برای جبرهای حقیقی ماتریسی در $M_n(\mathbb{R})$ و همچنین در $M_n(\mathbb{C})$ بیان کرد.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$ -جبر از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{K})$ باشد، که در آن $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. در این صورت یک ماتریس $P \in GL_n(\mathbb{K})$ و یک افراز $(n_1, \ldots, n_t)$ از n، که در آن $t \in \mathbb{N}$ و $t \leq n$، موجودند به طوری که به ازای هر $A \in \mathcal{A}$*

$$B := P^{-1}AP = (B_{ij})_{t\times t}, \qquad (B_{ij} \in M_{n_i\times n_j}(\mathbb{K})),$$

که در آن $B_{ij} = 0$ به ازای هر $1 \leq j < i \leq t$. همچنین، به ازای هر $1 \leq i \leq t$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) = \{0\}$، که در این صورت $n_i = 1$، یا $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P)$ یک زیرجبر استاندارد $M_{n_i}(\mathbb{K})$ است. به علاوه، به ازای هر زوج (i, j) که $1 \leq i, j \leq t$ و $\mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) \neq \{0\}$ و $\mathbf{e}_{jj}(P^{-1}\mathcal{A}P) \neq \{0\}$، یا $n_i = n_j \geq 1$ و

$$\left\{\mathbf{e}_{ii}(B) = \mathbf{e}_{jj}(B) : \ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = \mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P),$$

و یا

$$\left\{(\mathbf{e}_{ii}(B), \mathbf{e}_{jj}(B)) : \ B \in P^{-1}\mathcal{A}P\right\} = \mathbf{e}_{ii}(P^{-1}\mathcal{A}P) \times \mathbf{e}_{jj}(P^{-1}\mathcal{A}P).$$

اثبات. برهان، که به جهت اختصار حذف شده است، مشابه قضیهٔ ۳.۳ می‌باشد. □

۴. جبرهای حقیقی ماتریسی ساده

ویلیام برنساید در [۲، صفحهٔ ۴۳۳] در قضیه‌ای که موسوم به قضیهٔ برنساید است، ثابت کرد که یک گروه از ماتریس‌های مختلط تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر شامل یک پایهٔ فضای برداری برای $M_n(\mathbb{C})$ باشد. در واقع این قضیه برای نیم‌گروه‌های ماتریس‌های مختلط نیز برقرار است. همزاد قضیهٔ برنساید را می‌توان بر حسب جبرهای ماتریسی نیز بیان کرد به این صورت که به ازای میدان بسته جبری داده شدهٔ F، تنها زیرجبر تحویل‌ناپذیر $M_n(F)$ خودش است، [۹، قضیهٔ ۲.۲.۰۱] . در [۱۳] نویسنده روایت‌های حقیقی و کواترنیونی قضیهٔ برنساید را بیان و اثبات کرده است. برای روایت‌های دیگری از قضیهٔ برنساید به [۸]، [۱۲]، [۱۴]، و [۱۵] رجوع کنید. در این بخش به بیان و اثبات همزاد این قضیه برای جبرهای حقیقی ساده از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{F})$ می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا تعریف آشنای زیر را داریم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $r, k, n \in \mathbb{N}$ به طوری که $n = rk$ و $S \subseteq M_k(\mathbb{F})$. در این صورت تورم[۱۱] r-لایهٔ $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^{(r)}$ نشان می‌دهیم و بنا به تعریف

$$\mathcal{S}^{(r)} := \left\{S^{(r)} = \operatorname{diag}(S, \ldots, S) \in M_n(\mathbb{F}) : \quad S \in \mathcal{S}\right\}.$$

قضیه ۲.۴. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{A}$ یک جبر حقیقی ساده از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$ باشد که شامل ماتریس همانی است، و $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت $r|n$ و افزون بر این*

$$\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F})^{(r)},$$

که در آن $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر حقیقی ساده از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{H})$ و $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. بنا به قضیهٔ ۳.۳، به ازای یک $k \leq n$ و یک افراز $(n_1, \ldots, n_k)$ از n، و یک

[۱۱] inflation

$P \in GL_n(\mathbb{H})$، می‌توان به عضوهای جبر حقیقی $P^{-۱}\mathcal{A}P$ به شکل ماتریس‌های بالامثلثی بلوکی نسبت به افراز $(n_۱, \ldots, n_k)$ از n نگریست. از آنجا که $I \in \mathcal{A}$، بلوک‌های قطری $P^{-۱}\mathcal{A}P$ نسبت به افراز بالا همگی ناصفر و لذا تحویل‌ناپذیرند و همچنین تمامی اندیس‌های بلوک‌های قطری به هم وابسته‌اند، زیرا $\mathcal{A}$ ساده است، درمی‌یابیم $n_۱ = \cdots = n_k$، و اینکه $\mathcal{A}_i = M_{n_۱}(\mathbb{F})$ به ازای هر $۱ \leq i \leq k$، که در آن $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ و

$$\mathcal{A}_i := \mathbf{e}_{ii}(P^{-۱}\mathcal{A}P) = \Big\{\mathbf{e}_{ii}(P^{-۱}AP) : \quad A \in \mathcal{A}\Big\}.$$

لذا $k = r$، و در نتیجه $n = rn_۱$. حال نگاشت g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} &g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_i^{(r)} = M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F})^{(r)} \subseteq M_n(\mathbb{H}); \\ &g(A) = \mathrm{diag}\Big(\mathbf{e}_{۱۱}(P^{-۱}AP), \ldots, \mathbf{e}_{rr}(P^{-۱}AP)\Big). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه عضوهای جبر حقیقی $P^{-۱}\mathcal{A}P$ به شکل ماتریس‌های بالامثلثی بلوکی نسبت به افراز $(n_۱, \ldots, n_k)$ از n هستند و اینکه

$$\mathbf{e}_{ii}(P^{-۱}AP) = \mathbf{e}_{۱۱}(P^{-۱}AP), \ ۱ \leq i \leq r,$$

نگاشت $g : \mathcal{A} \longrightarrow M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F})^{(r)}$، خوش‌تعریف است و در واقع یک هم‌ریختی ناصفر است. حال از ساده بودن $\mathbb{R}$-جبر $\mathcal{A}$ و از قضیهٔ اسکولم-نوتر [۳، صفحهٔ ۳۹] نتیجه می‌شود $\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F})^{(r)}$. این برهان را کامل می‌کند. □

قضیهٔ زیر همزاد قضیهٔ پیشین برای جبرهای حقیقی ساده در $M_n(\mathbb{C})$ و $M_n(\mathbb{R})$ است.

قضیه ۳.۴. *(i) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{A}$ یک جبر حقیقی ساده از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{C})$ باشد، که شامل ماتریس همانی است، و همچنین $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت $r|n$ و*

$$\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{K})^{(r)},$$

که درآن $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*، و یا* $r|n$ *و* $۲|r$ *و*

$$\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{H})^{(\frac{r}{۲})}.$$

(ii) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ *و* $\mathcal{A}$ *یک جبر حقیقی ساده از ماتریس‌ها در* $M_n(\mathbb{R})$ *باشد، که شامل ماتریس همانی است، و همچنین* $r \in \mathbb{N}$ *کوچکترین رتبهٔ ناصفر در* $\mathcal{A}$ *باشد. در این صورت یکی از احکام زیر برقرارند*

(آ)

$$r|n, \quad \mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})^{(r)};$$

(ب)

$$۲|r,\ r|n, \quad \mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{C})^{(\frac{r}{۲})};$$

(پ)

$$۴|r,\ r|n, \quad \mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{H})^{(\frac{r}{۴})}.$$

اثبات. برهان، که برای نگاه‌داشت اختصار حذف می‌شود، مانند برهان قضیهٔ ۲.۴ است غیر از اینکه از قضیهٔ ۴.۳ استفاده می‌شود. □

قضیه ۴.۴. *فرض کنید* $n \in \mathbb{N}$ *و* $\mathcal{A}$ *یک جبر حقیقی ساده در* $M_n(\mathbb{F})$ *باشد، که شامل ماتریس همانی است. در این صورت*

$$\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{F}'),$$

به ازای یک $\mathbb{F}' \leq \mathbb{F}$ *که* $\mathbb{F}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{A}$ *شامل یک ماتریس با رتبهٔ یک باشد. به ویژه، هر چنین زیرجبر حقیقی سادهٔ* $M_n(\mathbb{F})$ *مطلقاً تحویل‌ناپذیر است، یعنی روی هر توسیع* $\mathbb{F}$ *تحویل‌ناپذیر است.*

اثبات. برهان نتیجه‌ای آنی و سرراست از قضیه‌های ۲.۴ و ۳.۴ است. □

۵. نیم‌گروه‌های ماتریسی ساده

تعریف ۱.۵. نیم‌گروه $\mathcal{S}$ از ماتریس‌ها در $M_n(\mathbb{F})$ را ساده گوییم هرگاه $\mathbb{R}$-جبر تولید شده توسط $\mathcal{S}$ یعنی $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ ساده باشد.

قضیه ۲.۵. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{S}$ یک نیم‌گروه ساده از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر و با طیف حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ باشد به طوری‌که $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$، جبر حقیقی تولیدشده توسط $\mathcal{S}$ در $M_n(\mathbb{F})$، شامل ماتریس همانی باشد. در این صورت*

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})^{(r)},$$

که در آن $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ است که، می‌دانیم، n را می‌شمارد. به ویژه، برای هر چنین نیم‌گروه ساده از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر و با طیف حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ داریم

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \sim M_n(\mathbb{R}),$$

اگر و تنها اگر $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ شامل یک ماتریس با رتبهٔ یک باشد، که در این صورت $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ به طور مطلق تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{S}$ یک نیم‌گروه ساده از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر و با طیف حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ باشد به طوری که $\mathcal{A} := \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$، جبر حقیقی تولیدشده توسط $\mathcal{S}$ در $M_n(\mathbb{F})$، شامل ماتریس همانی باشد. گیریم $r \in \mathbb{N}$ کوچکترین رتبهٔ ناصفر در جبر حقیقی سادهٔ $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت بنا به قضیه‌های ۲.۴ و ۳.۴، $r|n$ و

$$\mathcal{A} \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F}')^{(\frac{r}{i})},$$

که در آن $i \in \{۱, ۲, ۴\}$، $i|r$، و $\mathbb{F}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. در این صورت هر یک از این بلوک‌های یکسانِ قطری در واقع زیرجبری حقیقی و استاندارد از $M_n(\mathbb{F})$ است. از این رو، با توجه به لم ۱۳.۲ در $M_n(\mathbb{F})$ تحویل‌ناپذیر است و نیز توسط نیم‌گروهی تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر با طیف حقیقی

تولید می‌شود. اکنون، بنا به [۱۳، قضیه ۶.۲] هر درایهٔ بلوکی قطری $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F}')^{(r)}$، یعنی، $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{F}')$، با $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})$ مشابه است. این به روشنی ایجاب می‌کند $\mathbb{F}' = \mathbb{R}$، زیرا $\mathbb{F}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$، و از آنجا $i = ۱$. این برهان را کامل می‌کند. □

قضیه ۳.۵. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{S}$ یک نیم‌گروه ساده و بستهٔ توپولوژیکی و $\mathbb{R}$-همگن از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر و با طیف حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ باشد، یعنی، $\mathcal{S} = \overline{\mathbb{R}\mathcal{S}}$ و $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت $\mathcal{S}$ شامل یک ماتریس وارون‌ناپذیر ناصفر است.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ جبر حقیقی ساده تولیدشده توسط نیم‌گروه $\mathbb{R}$-همگنِ $\mathcal{S}$ پدید آمده از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر و با طیف حقیقی در $M_n(\mathbb{F})$ باشد. به برهان خلف فرض کنید هر عضو ناصفر $\mathcal{S}$ وارون‌پذیر باشد. در نتیجه $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ ساده و شامل ماتریس همانی است. از این رو از قضیهٔ ۲.۵ درمی‌یابیم که $r|n$ و

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \sim M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})^{(r)},$$

که در آن r کوچکترین رتبهٔ ناصفر عضوهای $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ است، که می‌دانیم n را می‌شمارد. لذا نیم‌گروه بستهٔ توپولوژیکی و $\mathbb{R}$-همگنِ $\mathcal{S}$ مشابه با تورمی r-لایه از یک نیم‌گروه $\mathcal{S}'$ متشکل از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})$ است. به روشنی نیم‌گروه $\mathcal{S}'$ در $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})$ نیز بستهٔ توپولوژیکی و $\mathbb{R}$-همگن است. از آنجا که $\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}') = M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})$، به ویژه نیم‌گروه $\mathcal{S}'$ در $M_{\frac{n}{r}}(\mathbb{R})$ تحویل‌ناپذیر است. حال بنا به [۱۳، قضیهٔ ۲.۲] نیم‌گروه $\mathcal{S}'$، و لذا نیم گروه $\mathcal{S}$، شامل یک ماتریس وارون‌ناپذیر ناصفر است، که در تناقض با فرض خلف است. این برهان را به پایان می‌رساند. □

مراجع

[۱] الهه نجفی، بامداد یاحقی، مقدمه‌ای مختصر بر ماتریس‌ها و جبرخطی کواترنیونی و گروه‌های کران‌دار ماتریس‌های کواترنیونی، *مجله جبرخطی و موجک*، ۴(۱) (۱۳۹۶)، ۷۱–۸۷.

[2] W. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, *Proc. London Math. Soc.*, **s2-3**(1) (1905), 430–434.

[3] P.K. Draxl, *Skew Field*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1983.

[4] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[5] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] I. Kaplansky, *Fields and Rings*, University of Chicago Press, Illinois, 1969.

[7] H. Momenaee Kermani, *Triangularizability over Fields and Division Rings*, Ph.D. Thesis, University of Kerman, Kerman, Iran, 2005.

[8] M. Radjabalipour, P. Rosenthal and B. R. Yahaghi, Burnside's theorem for matrix rings over division rings, *Linear Algebra Applications*, **383** (2004), 29–44.

[9] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[10] L. Rodman, *Topics in Quaternion Linear Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2014.

[11] J.F. Watters, Block triangularization of algebras of matrices, *Linear Algebra Appl.*, **32** (1980), 3–7.

[12] B.R.Yahaghi, Theorems of Burnside and Wedderburn Revisited, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **44** (2018), 915–925.

[13] B.R.Yahaghi, Burnside type theorems in real and quaternion settings, *arXiv: 1710.03849v2*, 2017.

[14] B.R.Yahaghi, On F-algebras of algebraic matrices over a subfield F of the center of a division ring, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 599–613.

[15] B.R.Yahaghi, *Reducibility Results on Operator Semigroups*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, Halifax Canada, 2002.