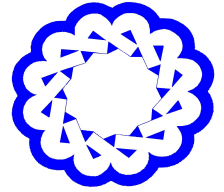


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

بررسی K -قاب‌های پیوسته درهم‌تنیده در فضاها ی هیلبرت غلامرضا رحیم‌لو*، وحید صدری آ

گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، قاب‌های پیوسته درهم‌تنیده برای عملگرها یا به اختصار، K -قاب‌های پیوسته درهم‌تنیده معرفی و مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. در ابتدا یک نتیجه مفید برای تولید این قاب‌ها معرفی می‌کنیم و سپس آنها را با تأثیر یک عملگر کراندار مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدلیل کاربرد اساسی و مفید انواع قاب‌ها در بازگرداندن برخی اطلاعات حذف شده در مباحث مربوط به انتقال داده‌ها، انتهای مقاله را اختصاص به شرایط استقرار قاب تحت حذف عده‌ای از اعضای فضای اندازه قرار داده و خواهیم دید که این موضوع با K -قاب‌های گسسته می‌تواند در ارتباط باشد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۱۹ آبان ۱۳۹۹

پذیرفته شده: ۳۱ تیر ۱۴۰۰

دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت
۱۴۰۱

ادیتور رابط: رجبعلی کامیابی‌گل

کلمات کلیدی:

قاب پیوسته، K -قاب

پیوسته، قاب درهم‌تنیده.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: grahimlou@gmail.com (غلامرضا رحیم‌لو)، vahidsadri57@gmail.com (وحید صدری).

<http://doi.org/10.22072/wala.2021.139495.1309>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

۱. مقدمه

در بین مفاهیم موجود در مبحث فضاهاى بردارى، به جرات مى‌توان گفت که پایه‌هاى هر فضاى بردارى، که مشخصه هر فضا مى‌باشد، از کاربردى‌ترین مباحث آن به‌شمار مى‌رود. با این حال، در حالت کلی، همواره نمى‌توان پایه‌هاى یک فضا و به‌خصوص، پایه‌هاى متعامد یکه آن را مشخص نمود و از سوى دیگر، بررسی استقلال خطى یک مجموعه نیز مشکلات مربوط به خود را دارد. قاب‌ها که توسط دوفین^۱ و شیفر^۲ ([۹])، ضمن مطالعه در زمینه سري‌هاى فوریه غیرهارمونیک معرفی شدند، ابزاری هستند که توانستند بر مشکلات ذکر شده فایق آمده و همچنین امکان تولید اعضاى فضا را (حتی نه به‌صورت منحصر به‌فرد) ایجاد نمایند. این موضوع به‌طور عمده در فضاهاى هیلبرت (جدایی پذیر) و C^* -مدول‌ها مورد مطالعه قرار مى‌گیرند و قدر مسلم، بحث‌هاى مربوط به فضاهاى هیلبرت کاربردى‌تر مى‌باشند؛ که مى‌توان به مباحث نظریه فیلتر بانک، پردازش سیگنال و تصویر، شبکه‌هاى بی‌سیم، فیزیک کوانتوم، رمز نگاری و انتقال داده‌ها اشاره نمود. حتی در چند مورد، برخی از محققین، قاب‌ها را در فضاهاى باناخ نیز مورد بررسی قرار داده‌اند.

اما اهمیت ویژه قاب‌ها، مربوط به انواع تعمیم‌هاى آن مى‌باشند که به‌طور عمده در هفت حوزه قرار دارند:

- ۱) قاب‌هاى پیوسته ([۱، ۱۰])، که برای فضاهاى اندازه معرفی شدند.
- ۲) قاب‌هاى تعمیم‌یافته یا g -قاب‌ها ([۲۰])، برای عملگرهاى کراندار بین فضاهاى هیلبرت مى‌باشند.
- ۳) قابهاى ترکیب^۳ ([۷])، برای زیر فضاهاى بسته یک فضاى هیلبرت مى‌باشند و البته، مى‌توانند حالت خاصی از g -قاب‌ها قرار گیرند.
- ۴) قاب‌ها برای عملگرها یا K -قاب‌ها ([۱۳])، ضمن مطالعه روی دستگاه‌هاى اتمى نسبت به عملگر کراندار K معرفی شدند.
- ۵) قاب‌هاى کنترل‌شده ([۵])، که برای بهبود کارایی عددی الگوریتم‌هاى تعاملی^۴ برای وارونه‌سازی عملگر قاب معرفی شدند.

¹R. J. Duffin

²A. C. Schaeffer

³fusion frames

⁴interactive algorithms

۶) قاب‌های درهم تنیده^۵ ([۶]) که ضمن پاسخ به سؤالی در پردازش سیگنال بررسی شدند.
 ۷) ادغام موارد فوق با هم‌دیگر، (مانند [۲، ۳، ۱۰، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲]).
 در این مقاله، ما تلفیق قاب‌های پیوسته، K -قاب‌ها و قاب‌های درهم تنیده در فضاها ی هیلبرت را که باختصار، K -قاب‌های پیوسته درهم تنیده می‌نامیم، مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بعد از معرفی این قاب‌ها، یک شرط لازم و کافی برای تولید آنها معرفی می‌کنیم. سپس، با اثردادن عملگری کراندار بر این قاب‌ها و تحمیل برخی شرایط، سعی در حفظ قاب موجود می‌کنیم و در برخی موارد، خواهیم دید که مجبور به کوچکتر کردن فضای اصلی می‌باشیم. در نهایت، با حذف تعدادی از فضای اندازه، شرایط ایجاد آن قاب‌ها را برای فضای اندازه جدید مطرح کرده و ارتباط آن را با حالت گسسته معرفی خواهیم کرد.
 در سرتاسر این مقاله، H فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، μ اندازه مثبت و (X, μ) یک فضای اندازه σ -متناهی و $\mathcal{B}(H)$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از H به توی H می‌باشند.
 ابتدای کار را مروری بر چند نتیجه مهم از عملگرها اختصاص داده‌ایم. فرض کنید $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ عملگری کراندار از فضای هیلبرت H_1 به توی فضای هیلبرت H_2 باشد. شبه معکوس راست عملگر U را با نماد $U^\dagger \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ نشان داده و برای هر $x \in \mathcal{R}(U)$ دارای خاصیت زیر است: $UU^\dagger x = x$.
 در لم زیر، اطلاعات مورد نیاز این عملگر را گردآوری کرده‌ایم.

لم ۱.۱. [۸] اگر $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ آنگاه نتایج زیر برقرار هستند:

$$1. (U^\dagger)^* = (U^*)^\dagger.$$

$$2. \ker U^\dagger = \mathcal{R}(U)^\perp \text{ و همچنین } \ker U^\perp = \mathcal{R}(U^\dagger).$$

$$3. UU^\dagger \text{ تصویر متعامد یکه از } H_2 \text{ به روی } \mathcal{R}(U) \text{ می‌باشد.}$$

$$4. U^\dagger U \text{ تصویر متعامد یکه از } H_1 \text{ به روی } \mathcal{R}(U^\dagger) \text{ می‌باشد.}$$

⁵weaving frames

۲. قاب‌های پیوسته

نگاشت $F : X \rightarrow H$ را به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر $h \in H$ ، نگاشت

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ x &\longrightarrow \langle h, F(x) \rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۲. (K -قاب پیوسته) فرض کنیم $F : X \rightarrow H$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر بوده و $K \in \mathcal{B}(H)$ باشد. گوئیم F یک K -قاب پیوسته برای H است اگر اعداد $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که برای هر $h \in H$ داشته باشیم

$$A\|K^*h\|^2 \leq \int_X |\langle h, F(x) \rangle|^2 d\mu(x) \leq B\|h\|^2. \quad (1.2)$$

ثابت‌های A و B را کران‌های قاب می‌نامیم. هرگاه $K = Id_H$ آنگاه F تبدیل به قاب پیوسته (معمولی) می‌شود. F را K -قاب تنگ^۶ گوئیم هرگاه

$$\int_X |\langle h, F(x) \rangle|^2 d\mu(x) = A\|K^*h\|^2.$$

اگر $A = 1$ ، آنگاه K -قاب پیوسته F ، پارسوال نامیده می‌شود. اگر فقط طرف راست نامساوی (۱.۲) برقرار باشد، F را نگاشت بسل پیوسته می‌نامیم. بالاخره، اگر μ اندازه شمارشی و $X = \mathbb{N}$ ، آنگاه K -قاب پیوسته تبدیل به K -قاب گسسته می‌شود (برای خواص این قاب‌ها، نگاه کنید به [۱۳، ۱۴]).

مثال ۲.۲. فرض کنیم $H = \ell^2(\mathbb{N})$ ، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. اگر $a > 0$ عددی ثابت باشد،

^۶tight frame

تعریف می‌کنیم

$$K : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}),$$

$$K\delta_i = \delta_{i+1}$$

و

$$F : X \longrightarrow H,$$

$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^2(\mathbb{N})$ است. با توجه به این که

$$K^*\delta_1 = 0, \quad K^*\delta_i = \delta_i, \quad i \geq 2,$$

پس برای هر $h \in H$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle h, F(x) \rangle|^2 d\mu(x) = a^2 \|h\|^2 \geq a^2 \|K^*h\|^2,$$

بنابراین F یک K -قاب برای H با کران‌های $A = B = a^2$ می‌شود.

طبق روال همه انواع K -قابها، عملگرهای ترکیب و آنالیز مشابه قاب‌های معمولی هستند و برای K -قاب‌های پیوسته، این دو عملگر، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شوند (برای جزئیات بیشتر، نگاه کنید به [۱۱]):

$$T_F : \mathcal{L}^2(X) \longrightarrow H,$$

$$\langle T_F(G), h \rangle = \int_X G(x) \langle F(x), h \rangle d\mu,$$

و

$$T_F^* : H \longrightarrow \mathcal{L}^2(X),$$

$$T_F^*(h) = \langle h, F \rangle,$$

که در آنها

$$\mathcal{L}^2(X) = \left\{ F : X \rightarrow \mathbb{C} : \|F\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_X \|F(x)\|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

این فضا، با تعریف ضرب داخلی زیر

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_X \langle F(x), G(x) \rangle d\mu(x),$$

تبدیل به فضای هیلبرت می‌شود. در نتیجه، عملگر قاب پیوسته را، برای هر $h \in H$ ، به صورت زیر میتوان بدست آورد.

$$S_F(h) := T_F T_F^*(h) = \int_X \langle h, F \rangle F d\mu,$$

و نیز

$$\langle S_F h, h \rangle = \|T_F^*(h)\|^2 = \int_X |\langle h, F(x) \rangle|^2 d\mu.$$

می‌توان ثابت کرد که اگر F نگاشت بسل پیوسته باشد، آنگاه معکوس پذیر بودن S_F معادل با پوشا بودن T_F می‌باشد و همچنین S_F عملگری مثبت، کراندار و معکوس پذیر است ([۱۱]). اما همه خواص قاب‌های معمولی، به K -قابها منتقل نمی‌شوند. مثلاً، عملگر قاب در K -قابها همواره معکوس پذیر نمی‌باشد؛ در واقع، اگر K با برد بسته باشد، آنگاه S_F روی \mathcal{R}_K معکوس پذیر بوده و برای هر $h \in \mathcal{R}_K$ داریم ([۲۳])

$$B^{-1} \|h\|^2 \leq \langle (S_F|_{\mathcal{R}_K})^{-1} h, h \rangle \leq A^{-1} \|K^\dagger\|^2 \|h\|^2.$$

قضیه زیر، امکان تولید K -قاب‌های پیوسته را از روی یک قاب پیوسته ایجاد می‌کند.

لم ۳.۲. [۱۵] فرض کنید $F : X \longrightarrow H$ یک قاب پیوسته برای H باشد. آنگاه KF ، که در آن

$K \in \mathcal{B}(H)$ ، یک K -قاب پیوسته برای H می‌شود.

مثال ۴.۲. [۸] فرض کنید $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ پذیرفتنی باشد، یعنی:

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\gamma)|}{\gamma} d\gamma < \infty.$$

نگاشت F را برای هر $x \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$F : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

$$F(a, b)(x) = (T_b D_a)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

که در آن T_b و D_a عملگرهای روی $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ بوده و برابرند با

$$T_b : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad D_a : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

$$(T_b f)(x) = f(x-b), \quad (D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

بنا به گزاره ۱.۱.۱۱ و نتیجه ۲.۱.۱۱ از [۸] داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, F(a, b) \rangle \langle F(a, b), g \rangle \frac{dadb}{a^2} = C_\psi(f, g), \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

پس F یک قاب پیوسته برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ وابسته به فضای اندازه $(\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}, \mu)$ می‌باشد که در آن $\mu = \frac{dadb}{a^2}$ است. حال، طبق لم ۳.۲، اگر $K \in \mathcal{B}(H)$ عملگر کراندار دلخواهی باشد، آنگاه نگاشت KF یک K -قاب برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می‌شود.

۳. K -قاب‌های پیوسته درهم تنیده

در این بخش، ابتدا K -قاب‌های درهم تنیده را تعریف کرده و سپس برخی نتایج درباره نحوه تولید این قاب‌ها را بررسی می‌کنیم. در سرتاسر این مقاله، نماد $[m]$ به معنی $\{1, 2, \dots, m\}$ برای هر عدد

طبیعی m می‌باشد و همچنین، منظور از افزایش‌های فضای X به‌منزله افزایش از X توسط زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از هم جدای آن خواهد بود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} := \{F_i\}_{i \in [m]}$ خانواده‌ای از K -قاب‌های پیوسته برای H وابسته به اندازه μ باشند. گوییم \mathcal{F} در هم تنیده است هرگاه ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر افزایش $\{\sigma_i\}_{i \in [m]}$ از X ، خانواده $\cup_{i \in [m]} \{F_i\}$ یک K -قاب پیوسته برای H با کران‌های A, B باشد.

با توجه به گزاره ۴.۳ در [۲۱]، یافتن کران بالا برای قاب‌های پیوسته به‌سادگی میسر می‌شود؛ در واقع

اگر

$$\{F_i\}_{i \in [m]}$$

دنباله‌ای از نگاشت‌های بسط پیوسته برای H با کران‌های B_i باشند، آنگاه برای هر افزایش $\{\sigma_i\}_{i \in [m]}$ از X ، خانواده $\cup_{i \in [m]} \{F_i\}$ یک دنباله بسط پیوسته برای H با کران $\sum_{i \in [m]} B_i$ می‌شود.

در قضیه زیر، یک شرط لازم و کافی برای تولید K -قاب‌های پیوسته در هم تنیده معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $F, G : X \rightarrow H$ دو K -قاب پیوسته برای H باشند. شرایط زیر باهم معادل هستند:

۱. F و G دو K -قاب پیوسته در هم تنیده هستند.

۲. عدد $0 < \alpha$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر σ از X ، عملگر کراندار

$$\Gamma_\sigma : \mathcal{L}_\sigma^\vee(X) \longrightarrow H,$$

$$\langle \Gamma_\sigma \varphi, h \rangle = \int_\sigma \varphi(x) \langle F(x), h \rangle d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \varphi(x) \langle G(x), h \rangle d\mu(x),$$

وجود دارد که $\alpha KK^* \leq \Gamma_\sigma \Gamma_\sigma^*$ و در آن،

$$\mathcal{L}_\sigma^\vee(X) = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}^\vee(X), \quad \varphi = F|_\sigma \cup G|_{\sigma^c} \right\}.$$

اثبات. (۱) \Leftrightarrow (۲). فرض کنیم A کران پایین برای دو قاب F و G باشند. قرار می‌دهیم $A := \alpha$ و

نیز برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\sigma \subset X$ فرض می‌کنیم $\Gamma_\sigma = T_\sigma$ ، که در آن، عملگر ترکیب برای

قاب $F|_{\sigma} \cup G|_{\sigma^c}$ می‌باشد. حال، برای هر $\varphi \in \mathcal{L}_{\sigma}^2(X)$ و $h \in H$ داریم

$$\langle \Gamma_{\sigma} \varphi, h \rangle = \langle T_{\sigma} \varphi, h \rangle = \int_{\sigma} \varphi(x) \langle F(x), h \rangle d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \varphi(x) \langle G(x), h \rangle d\mu(x),$$

و علاوه بر آن،

$$\alpha \|K^* h\|^2 \leq \|T_{\sigma}^* h\|^2 = \|\Gamma_{\sigma}^* h\|^2,$$

که نتیجه می‌دهد $\alpha K K^* \leq \Gamma_{\sigma} \Gamma_{\sigma}^*$.

(۲) \Leftrightarrow (۱). می‌دانیم که کران بالا بدیهی است. فرض کنیم $\sigma \subset X$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر،

$\varphi \in \mathcal{L}_{\sigma}^2(X)$ و $h \in H$ دلخواه باشند. داریم

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{\sigma}^* h, \varphi \rangle &= \overline{\langle \Gamma_{\sigma} \varphi, h \rangle} \\ &= \int_{\sigma} \langle h, F(x) \rangle \overline{\varphi(x)} d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \langle h, G(x) \rangle \overline{\varphi(x)} d\mu(x) \\ &= \langle \langle h, F \rangle|_{\sigma} \cup \langle h, G \rangle|_{\sigma^c}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Gamma_{\sigma}^* h = \langle h, F \rangle|_{\sigma} \cup \langle h, G \rangle|_{\sigma^c}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \alpha \|K^* h\|^2 &= \langle \alpha K K^* h, h \rangle \\ &\leq \langle \alpha \Gamma_{\sigma} \Gamma_{\sigma}^* h, h \rangle \\ &= \|\Gamma_{\sigma}^* h\|^2 \\ &= \int_{\sigma} |\langle h, F(x) \rangle|^2 d\mu(x) + \int_{\sigma^c} |\langle h, G(x) \rangle|^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

□

پس α کران پایین برای F و G می‌شود.

مثال ۳.۳. فرض کنیم $H = \ell^2(\mathbb{N})$ ، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. با فرض $a, b > 0$ ، تعریف می‌کنیم

$$K : H \rightarrow H,$$

$$K\delta_i = \delta_{i+1}$$

و

$$F, G : X \rightarrow H,$$

$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} b\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^2(\mathbb{N})$ است. با توجه مثال ۲.۲، F و G دو K -قاب برای H با کران‌های برابر، به ترتیب، a^2 و b^2 می‌شوند. با فرض $\sigma \subset \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_{\sigma} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow H,$$

$$\Gamma_{\sigma}\varphi = \left\{ \int_i^{i+1} a\varphi(x) dx \right\}_{i \in \sigma} \cup \left\{ \int_i^{i+1} b\varphi(x) dx \right\}_{i \in \sigma^c}.$$

برای هر $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ داریم

$$\|\Gamma_{\sigma}\varphi\|^2 = a^2 \sum_{i \in \sigma} \int_i^{i+1} |\varphi(x)|^2 + b^2 \sum_{i \in \sigma^c} \int_i^{i+1} |\varphi(x)|^2 \leq \max\{a^2, b^2\} \|\varphi\|_2^2$$

که نشان می‌دهد Γ_σ کراندار است. با محاسبه‌ای سراسر است، برای هر $h \in H$ داریم

$$\|\Gamma_\sigma^* h\|^2 \geq \min\{a^2, b^2\} \|h\|^2 \geq \min\{a^2, b^2\} \|K^* h\|^2.$$

پس شرایط قضیه ۲.۳ برقرار شده و در نتیجه، F و G یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H می‌شوند.

در نتایج بعدی، هدف تولید K -قاب‌های پیوسته با استفاده از عملگری خطی و کراندار میباشد.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $\{F_i : X \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ عملگری با برد بسته باشد طوری که $KU^\dagger = U^\dagger K$. آنگاه $\{UF_i\}_{i \in [m]}$ نیز یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(U)$ با کران‌های $A\|U^\dagger\|^{-2}$ و $B\|U\|^2$ می‌شود.

اثبات. فرض کنید $i \in [m]$ دلخواه باشد و قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \phi : X &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \phi(x) &= \langle h, F_i(x) \rangle \quad (h \in H). \end{aligned}$$

در نتیجه، نگاشت ϕ برای هر h اندازه‌پذیر است. پس نگاشت

$$x \rightarrow \langle U^* h, F_i(x) \rangle$$

نیز اندازه‌پذیر شده و در نهایت، UF_i به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر می‌شود.

اگر U^\dagger را معکوس راست U بگیریم، آنگاه برای هر $h \in \mathcal{R}(U)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^2 &= A\|K^*(U^\dagger)^*U^*h\|^2 \\ &= A\|(U^\dagger)^*K^*U^*h\|^2 \\ &\leq A\|U^\dagger\|^2\|K^*U^*h\|^2 \\ &\leq \|U^\dagger\|^2 \sum_{i \in [m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= \|U^\dagger\|^2 \sum_{i \in [m]} \int_X |\langle h, UF_i(x) \rangle|^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

□

کران بالا نیز بدیهی است.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم K عملگری با برد بسته بوده، $\{F_i : X \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ به طوری که $\mathcal{R}(U^*) \subseteq \mathcal{R}(K)$. آنگاه $\{UF_i\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H است اگر و تنها اگر عدد $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $h \in H$ داشته باشیم

$$\|U^*h\| \geq \delta\|K^*h\|.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید که $\{UF_i\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران پایین A باشد. برای هر $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^2 &\leq \sum_{i \in [m]} \int_X |\langle Uh, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= \sum_{i \in [m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &\leq B\|U^*h\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین $\|U^*h\| \geq \sqrt{\frac{A}{B}} \|K^*h\|$ برای حالت عکس، برای $h \in H$ دلخواه داریم

$$\|U^*h\| = \|(K^\dagger)^* K^* U^*h\| \leq \|K^\dagger\| \|K^* U^*h\|.$$

اکنون فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i \in [m]} \subset X$ افزای دلخواه باشد و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A\delta^2 \|K^\dagger\|^{-2} \|K^*h\|^2 &\leq A \|K^\dagger\|^{-2} \|U^*h\|^2 \\ &\leq A \|K^* U^*h\|^2 \\ &\leq \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, U F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &\leq B \|U\|^2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

پس $\{U F_i\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های $A\delta^2 \|K^\dagger\|^{-2}$ و $B\|U\|^2$ می‌شود.

□

قضیه ۶.۳. فرض کنید $\{F_i\}_{i \in [m]}$ خانواده‌ای از K -قاب‌های پیوسته برای H باشند. احکام زیر باهم معادل‌اند:

۱. $\{F_i\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H است.

۲. برای هر $U \in \mathcal{B}(H)$ ، خانواده $\{U F_i\}_{i \in [m]}$ یک UK -قاب پیوسته درهم تنیده برای H است.

اثبات. (۱) \Leftrightarrow (۲). فرض کنیم A و B کران‌های $\{F_i\}_{i \in [m]}$ باشند. برای هر افزای $\{\sigma_i\}_{i \in [m]} \subset X$ و $h \in H$ داریم

$$\sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, U F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) = \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \leq B \|U\|^2 \|h\|^2.$$

به‌طریق مشابه، برای کران پایین می‌توان نوشت

$$\sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, UF_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) = \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \geq A \|(UK)^*h\|^2.$$

□ برای حالت عکس، کافی است تا U را عملگر همانی روی H گرفته و حکم بدیهی می‌شود.

در نتایج بعدی، قصد داریم با حذف زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از فضای اندازه X ، قاب درهم تنیده جدیدی تولید کنیم.

قضیه ۷.۳. فرض کنیم K عملگری با برد بسته و $\{F_i : X \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B باشد. اگر $Y \subset X$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر بوده و

$$C := \sum_{i \in [m]} \int_Y \|F_i(x)\|^2 d\mu(x) < A \|K^\dagger\|^{-2},$$

آنگاه، $\{F_i : X \setminus Y \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ با کران‌های $(A - C \|K^\dagger\|^2)$ و B می‌شود.

اثبات. کران بالا بدیهی است. فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i \in [m]} \subset X \setminus Y$ افزای دلخواه باشد، پس بدیهی است که

$$\{\tau_i\}_{i \in [m]} := \{\sigma_i\}_{i \in [m]} \cup Y$$

یک افزای برای X خواهد شد. برای هر $h \in \mathcal{R}(K)$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) &= \sum_{i \in [m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) - \sum_{i \in [m]} \int_Y |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &\geq A \|K^*h\|^2 - \|h\|^2 \sum_{i \in [m]} \int_Y \|F_i(x)\|^2 d\mu(x) \\ &\geq (A - C \|K^\dagger\|^2) \|K^*h\|^2. \end{aligned}$$

□

قضیه ۸.۳. فرض کنیم K عملگری با برد بسته باشد، هر زیرمجموعه تک‌عضوی X اندازه‌پذیر با اندازه ناصفر بوده و همچنین $\{F_i : X \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب تنگ پیوسته درهم تنیده برای H با کران A باشد. اگر به‌ازای $x_0 \in X$ ، مجموعه $\{F_i(x_0)\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب گسسته برای $\mathcal{R}(K)$ با کران بالای B صادق در خاصیت $\|K^\dagger\|^2 \mu(\{x_0\}) < A$ باشد، آنگاه $\{F_i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ خواهد شد.

اثبات. فرض کنیم B کران بالای قاب $\{F_i(x_0)\}_{i \in [m]}$ باشد. اگر $\{\sigma_i\}_{i \in [m]}$ افزایی از $X \setminus \{x_0\}$ باشد، آنگاه $\{\tau_i\}_{i \in [m]} := \{\sigma_i\}_{i \in [m]} \cup \{x_0\}$ یک افزای برای X می‌شود. حال برای هر $h \in \mathcal{R}(K)$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) &= \sum_{i \in [m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) - \sum_{i \in [m]} \mu(\{x_0\}) |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 \\ &\geq A \|K^* h\|^2 - B \mu(\{x_0\}) \|h\|^2 \\ &\geq (A - B \mu(\{x_0\})) \|K^\dagger\|^2 \|K^* h\|^2. \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با توجه به

$$\sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \leq \sum_{i \in [m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \leq A \|K\|^2 \|h\|^2$$

□

حکم کامل می‌شود.

با اعمال تغییری جزئی، می‌توانیم عکس قضیه ۸.۳ را به‌صورت زیر نتیجه بگیریم.

قضیه ۹.۳. فرض کنیم K عملگری با برد بسته باشد، هر زیرمجموعه تک‌عضوی X اندازه‌پذیر با اندازه ناصفر بوده و همچنین $\{F_i : X \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب تنگ پیوسته درهم تنیده برای H با کران A باشد. اگر برای عضوی چون $x_0 \in X$ ، خانواده $\{F_i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ با کران بالای B' باشد به‌طوری‌که $\|K^\dagger\|^2 < A - B'$ ، آنگاه $\{F_i(x_0)\}_{i \in [m]}$ یک K -قاب گسسته برای $\mathcal{R}(K)$ می‌شود.

اثبات. فرض کنید C و B' کران‌های قاب $\{F_i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow H\}_{i \in [m]}$ باشد. با همان فرضیات اثبات قضیه ۸.۳، داریم

$$\begin{aligned} C\|K^*h\|^2 &\leq \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= \sum_{i \in [m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) - \sum_{i \in [m]} \mu(\{x_0\}) |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2 \\ &= A\|K^*h\|^2 - \sum_{i \in [m]} \mu(\{x_0\}) |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$0 < C \leq A - \frac{\mu(\{x_0\})}{\|K\|^2 \|h\|^2} \sum_{i \in [m]} |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2,$$

و یا

$$\sum_{i \in [m]} |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2 \leq \frac{A\|K\|^2}{\mu(\{x_0\})} \|h\|^2.$$

یعنی $\{F_i(x_0)\}_{i \in [m]}$ یک دنباله بسل برای $\mathcal{R}(K)$ شده و شرط کران بالا برقرار می‌شود. از سوی دیگر، با توجه به

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^2 - \sum_{i \in [m]} \mu(\{x_0\}) |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2 &= \sum_{i \in [m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) - \sum_{i \in [m]} \mu(\{x_0\}) |\langle h, F_i(x_0) \rangle|^2 \\ &= \sum_{i \in [m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x) \rangle|^2 d\mu(x) \\ &\leq B' \|h\|^2 \\ &\leq B' \|K^\dagger\|^2 \|K^*h\|^2 \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{(A - B' \|K^\dagger\|^2)}{\mu(\{x_\circ\})} \|K^* h\|^2 \leq \sum_{i \in [m]} |\langle h, F_i(x_\circ) \rangle|^2.$$

□

حکم کامل می‌شود.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از پیشنهادهای مفید و ارزشمند داوران محترم مجله، که باعث بهبود و ارتقاء سطح کیفی مقاله شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- [1] S.T. Ali, J.P. Antoine and J.P. Gazeau, Continuous frames in Hilbert spaces, *Annals. of Physics*, **222** (1993), 1–37.
- [2] E. Alizadeh and V. Sadri, On Continuous weaving G-frames in Hilbert spaces, *Wavelets and Linear Algebra*, **7**(1) (2020), 23–36.
- [3] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamal, Characterization and Construction of K -Fusion Frames and Their Duals in Hilbert Spaces, *Results in Math.*, **73**(47) (2018), Doi:10.1007/s00025-018-0781-1.
- [4] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamal, Some constructions of K -frames and their duals, *Rocky Mt. J. Math.*, **47**(6) (2017), 1749–1764.
- [5] P. Balazs, J.P. Antoine and A. Grybo's, Weighted and controlled frames: mutual relationship and first numerical properties, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **8**(1), (2010), 109–132.
- [6] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenic, M.C. Lammers and R.G. Lynch, Weaving frames, *Operators and Matrices*, **10**(4) (2016), 1093–1116.
- [7] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of Subspaces, *Contemp. Math.*, **345** (2004), 87–114.
- [8] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, *Birkhäuser*, 2016.
- [9] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**(1) (1952), 341–366.

- [10] M.H. Faroughi and R. Ahmadi, *Some Properties of C-Frames of Subspaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., **1**(3) (2008), 155–168.
- [11] M.H. Faroughi and E. Osgooei, *C-Frames and C-Bessel Mappings*, Bull. Iranian Math. Soc., **38**(1) (2012), 203–222.
- [12] H.G. Feichtinger and T. Werther, *Atomic Systems for Subspaces*, Proceedings SampTA. Orlando, FL., (2001), 163–165.
- [13] L. Găvruta, *Frames for Operators*, Appl. Comp. Harm. Annal., **32** (2012), 139–144.
- [14] D. Hua and Y. Huang, *Controlled K -g-frames in Hilbert spaces*, Results. Math., **72** (2017), 1227–1238.
- [15] Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, *Some properties of Continuous K -frames in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **15**(1) (2019), 169–187.
- [16] Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, *Continuous k -frames and their dual in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **17**(3) (2020), 145–160.
- [17] V. Sadri, Gh. Rahimlou and R. Ahmadi, *Continuous weaving fusion frames in Hilbert spaces*, Int. J. Wavelets Multi. Info. Proc., **18**(5) (2020), 1–17.
- [18] V. Sadri, Gh. Rahimlou, R. Ahmadi and R. Zarghami Farfar, *Construction of K -g-fusion frames and their dual in Hilbert spaces*, Bull. Transilvania Un. Braşov, Series III, **13**(62) (2020), 17–32.
- [19] V. Sadri, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, *Continuous k -fusion frames in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **17**(1) (2020), 39–55.
- [20] W. Sun, *G-Frames and G-Riesz bases*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2006), 437–452.
- [21] L.K. Vashisht and Deepshikha, *On continuous weaving frames*, Adv. Pure Appl. Math., **8**(1) (2017), 15–31.
- [22] L.K. Vashisht, S. Garg, Deepshikha and P.K. Das, *On generalized weaving frames in Hilbert spaces*, Rocky Mountain J. Math., **48**(2) (2018), 661–685.
- [23] X. Xiao, Y. Zhu and L. Găvruta, *Some Properties of K -Frames in Hilbert Spaces*, Results. Math., **63** (2013), 1243–1255.