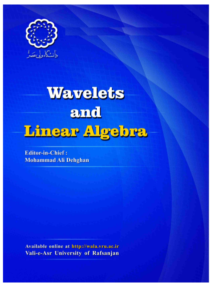
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۹۳-۱۰۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

رده‌ای از جبرهای عملگری تولید شده توسط خودتوان‌ها

هوگر قهرمانی[آ]، بهروز فدائی[آ,*]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۳ شهریور ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۲ اسفند ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: رجبعلی کامیابی‌گل

کلمات کلیدی:
خودتوان، جبر لانه‌ای، تولید شده توسط خودتوان‌ها.

چکیده

جبر A تولید شده توسط خودتوان‌ها نامیده می‌شود هرگاه جبر تولید شده توسط خودتوان‌هایش برابر A باشد. دراین مقاله نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{N}$ لانه‌ای متناهی در فضای هیلبرت مختلط H باشد، آن‌گاه جبر لانه‌ای $Alg\mathcal{N}$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود. سپس کاربردهایی از این نتیجه را بیان خواهیم کرد، به ویژه برهان ساده‌تری برای اینکه جبر لانه‌ای متناهی $Alg\mathcal{N}$، جبر با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است، ارائه می‌دهیم.

* نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: h.ghahramani@uok.ac.ir; hoger.ghahramani@yahoo.com (هوگر قهرمانی)، behroozfadaee@yahoo.com; b.fadaee@sci.uok.ac.ir (بهروز فدائی).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.136383.1304

۱. مقدمه

فرض کنیم A یک جبر (روی $\mathbb{C}$) باشد. عضو $p \in A$ خودتوان نامیده می‌شود، هرگاه $p = p^2$. مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های A را با $\mathcal{P}_A$ و زیرجبر تولید شده توسط $\mathcal{P}_A$ را با $\mathcal{R}$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $A = \mathcal{R}$ می‌گوییم جبر A توسط خودتوان‌هایش تولید شده است. جبرهای تولید شده توسط خودتوان‌ها دارای خواص جالب و قابل توجهی هستند که از جهات مختلف می‌توان در مطالعه‌ی ساختار آن‌ها به کار گرفت. به همین سبب برخی از ریاضیدانان به این مسأله پرداخته‌اند که کدام جبرها توسط خودتوان‌هایشان تولید می‌شوند؟ در [۱]، بریسار[1] نشان داده است که اگر جبر A یکدار و ساده و شامل یک خودتوان غیربدیهی p $(p \neq 0, 1)$ باشد، آنگاه A توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود؛ همچنین نشان داده است که اگر جبر یکدار A شامل خودتوان غیربدیهی p باشد به طوری که ایدآل‌های تولید شده توسط p و $1 - p$ برابر A باشند، آنگاهA توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود. همچنین بریسار در [۱] نشان داده است که جبر ماتریس‌های $n \times n$، $M_n(A)$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود. از طرف دیگر برخی از جبرهای عملگری که مولد خطی خودتوان‌های خود هستند، مطالعه شده‌اند. لازم به ذکر است که هر جبر که مولد خطی خودتوان‌های خود باشد، توسط خودتوان‌های خود (به عنوان جبر) تولید می‌شود. در [۱۱] اثبات شده است که اگر H فضای هیلبرت نامتناهی البعد روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه$B(H)$ جبر همه‌ی عملگرهای کراندار روی H، برابر مولد خطی خودتوان‌هایش است، در واقع اثبات شده است که هر $T \in B(H)$ برابر مجموع پنج عضو خودتوان در $B(H)$ است. همچنین در [۱۱] نشان داده شده است که اگر A یک w^*-جبر اکیداً نامتناهی[2] باشد، آنگاه هر عضو A برابر مجموع متناهی از خودتوان‌هاست. در [۱۰] برخی C^*-جبرهای ساده که مولد خطی خودتوان‌هایش هستند، معرفی شده‌اند. حال با ایده از مطالب ذکر شده به بررسی این سوال می‌پردازیم که چه جبرهای عملگری توسط خودتوان‌ها تولید می‌شوند؟

در این مقاله به جواب این مسأله برای رده‌ای از جبرهای عملگری به اسم جبرهای لانه‌ای[3] روی فضاهای هیلبرت می‌پردازیم. در واقع نشان خواهیم داد که جبرهای لانه‌ای روی فضاهای هیلبرت که در آن‌ها لانه متناهی است، توسط خودتوان‌ها تولید می‌شوند و به عنوان نتیجه‌ای از آن نشان می‌دهیم که برخی از زیرجبرهای خاص $M_n(\mathbb{C})$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شوند.

[1] Brešar
[2] properly infinite
[3] nest algebras

جبر A با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده[۴] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر فضای برداری X و هر نگاشت دوخطی $\phi : A \times A \to X$ که در شرط $\phi(a,b) = 0$ به ازای $ab = 0$ صدق می‌کند، نتیجه شود که به ازای هر $a,b,c \in A$، $\phi(ab,c) = \phi(a,bc)$ و اگر A یکدار باشد؛ این شرط معادل است با اینکه

$$\phi(a,b) = \phi(ab,1), \qquad (a,b \in A).$$

این خاصیت برای جبرها نخستین بار توسط بریسار و همکارانش در [۴] معرفی شد که در واقع به عنوان ابزاری برای مطالعه نگاشت‌هایی مانند همریختی یا مشتق در حاصل‌ضرب‌های صفر به کار می‌رود (به [۲، ۹] و منابع داخل آن‌ها مراجعه شود). از آن به بعد مطالعات زیادی روی این خاصیت و اینکه چه جبرهایی دارای این خاصیت هستند، صورت گرفت؛ به [۲، ۶، ۷] مراجعه شود. در اینجا به عنوان نمونه به بیان این نتیجه می‌پردازیم که در [۸] نشان داده شد که هر جبر لانه‌ای متناهی یک جبر با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است. حال در این مقاله به عنوان کاربردی از نتیجه اصلی به برهان دیگری از این نتیجه می‌پردازیم که هر جبر لانه‌ای متناهی روی یک فضای هیلبرت مختلط با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است، سپس به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب به تعیین ساختار برخی از نگاشت‌های دوخطی خاص روی این جبرهای لانه‌ای می‌پردازیم که این نگاشت‌های دوخطی می‌تواند برای مطالعه‌ی نگاشت‌های جردن (همریختی‌های جردن یا مشتق‌های جردن) تعیین شده در حاصل‌ضرب‌های $ab = ba = 0$ مورد استفاده قرار گیرند.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به بیان مقدماتی از جبرهای لانه‌ای که مورد نیاز است، می‌پردازیم. در بخش سوم نتایج اصلی را بیان می‌کنیم.

در این مقاله همه‌ی جبرها و فضاهای برداری را روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم و ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ را با M_n و ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ را با T_n نمایش می‌دهیم.

---

[4] zero product determined

۲. جبرهای لانه‌ای

در این بخش به معرفی جبرهای لانه‌ای و برخی از نتایج مربوط که مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

فرض کنیم H فضایی هیلبرت باشد. جبر همه‌ی عملگرهای خطی کراندار روی H را با $B(H)$ نشان می‌دهیم. یک خانواده $\mathcal{N}$ از زیرفضاهای H را زنجیر گویند هرگاه تحت رابطه شمول یک مجموعه مرتب کامل باشد، به عبارتی برای هر $N_۱, N_۲ \in \mathcal{N}$ داشته باشیم $N_۱ \subseteq N_۲$ یا $N_۲ \subseteq N_۱$. یک لانه $\mathcal{N}$ در فضای هیلبرت H یک زنجیر از زیرفضاهای بسته (تحت توپولوژی حاصل از نرم) H است به طوری که تحت اشتراک دلخواه (با $\wedge$ نشان داده می‌شود) و تحت مولد خطی بسته هر گردایه‌ی دلخواه از اعضای خود (با $\vee$ نشان داده می‌شود) بسته باشد و همچنین شامل زیرفضاهای $\{۰\}$ و H باشد.

جبرلانه‌ای متناظر با لانه‌ی $\mathcal{N}$ روی فضای هیلبرت H که با $Alg\mathcal{N}$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Alg\mathcal{N} = \{T \in B(H) | T(N) \subseteq N, \forall N \in \mathcal{N}\}.$$

جبر لانه‌ای $Alg\mathcal{N}$ یک جبر عملگری روی H است که تحت توپولوژی عملگری ضعیف در $B(H)$ بسته است و این جبر تحت عمل الحاقی بسته نیست.

جبرهای لانه‌ای اولین بار توسط رینگروس[5] [۱۲] در سال ۱۹۶۵ به عنوان تعمیمی از جبر ماتریس‌های بالامثلثی T_n معرفی شد و ویژگی بارز این جبرها آن است که تحت توپولوژی عملگری ضعیف بسته هستند و در عین حال جبر وان-نیومن نیستند. بعد از معرفی جبرهای لانه‌ای مطالعات وسیعی روی این جبرها صورت گرفته است (کتاب [۵] و مراجع آن را ببینید). در ادامه برخی از نکات و ویژگی‌های مربوط به این جبرها را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{N}$ لانه‌ای در فضای هیلبرت H باشد و $Alg\mathcal{N}$ جبر لانه‌ای متناظر با $\mathcal{N}$ باشد. هرگاه $\mathcal{N} \neq \{\{۰\}, H\}$، می‌گوییم لانه $\mathcal{N}$ غیربدیهی است و هر زیر فضای بسته$N \in \mathcal{N}$ را که $N \neq \{۰\}$ و $N \neq H$ یک عضو غیربدیهی $\mathcal{N}$ می‌نامیم. واضح است که اگر $\mathcal{N}$ لانه بدیهی باشد، آنگاه$Alg\mathcal{N} =$ $B(H)$. اگر$\mathcal{N}$ مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه $Alg\mathcal{N}$ یک جبر لانه‌ای متناهی نامیده می‌شود و اگر H متناهی-بعد باشد، آنگاه$Alg\mathcal{N}$ جبر لانه‌ای متناهی-بعد نامیده می‌شود. به ازای هر زیرفضای بسته N در

---

[5] Ringrose

H،P_N نشان دهنده‌ی عملگر تصویر متعامد به روی N است وI نشان دهنده‌ی عملگر همانی در $B(H)$ است.

نکته ۱.۲ . فرض کنید $\mathcal{N}$ لانه‌ای غیربدیهی در فضای هیلبرت H باشد و $N \in \mathcal{N}\setminus\{\{0\},H\}$ عضو غیربدیهی از آن و P_N تصویر متعامد روی N باشد. در این صورت با توجه به تعریف $Alg\mathcal{N}$ داریم:

$$(I-P_N)(Alg\mathcal{N})P_N=\{0\}.$$

بنابراین تجزیه پیرس جبر $Alg\mathcal{N}$ به صورت زیر است:

$$Alg\mathcal{N}=P_N(Alg\mathcal{N})P_N\oplus P_N(Alg\mathcal{N})(I-P_N)\oplus\ (I-P_N)(Alg\mathcal{N})(I-P_N).$$

هر یک از زیرفضاهای فوق بسته هستند و این جمع به عنوان جمع مستقیم فضاهای باناخ است. همچنین $P_N(Alg\mathcal{N})P_N$ و $(I-P_N)(Alg\mathcal{N})(I-P_N)$ زیرجبرهای بسته از$Alg\mathcal{N}$ هستند.

نتیجه زیر در مورد تجزیه پیرس جبرهای لانه‌ای شناخته شده است، اماجهت کامل‌تر شدن مطلب آن را به عنوان یک گزاره همراه با برهان می‌آوریم که ما برهانی مقدماتی برای آن ارائه می‌دهیم.

گزاره ۲.۲. *فرض کنید $\mathcal{N}$ لانه‌ای غیربدیهی در فضای هیلبرت H و $N\in\mathcal{N}$ عضوی غیربدیهی از آن باشد. قرار می‌دهیم*

$$\mathcal{M}_1=P_N(\mathcal{N}),\qquad \mathcal{M}_2=(I-P_N)(\mathcal{N}).$$

در این صورت

آ. $\mathcal{M}_1$و $\mathcal{M}_2$ به ترتیب لانه‌هایی روی فضاهای هیلبرت N و $N^\perp=(I-P_N)(H)$ هستند.

ب. یکریختی‌های جبری زیر را خواهیم داشت:

$$Alg\mathcal{M}_1\cong P_N(Alg\mathcal{N})P_N,\qquad Alg\mathcal{M}_2\cong(I-P_N)(Alg\mathcal{N})(I-P_N).$$

پ.

$$Alg\mathcal{N}=Alg\mathcal{M}_1\oplus P_N(Alg\mathcal{N})(I-P_N)\oplus Alg\mathcal{M}_2.$$

اثبات. آ- با توجه به تعریف $\mathcal{M}_1$و $\mathcal{M}_2$ و اینکه $P_{N^\perp} = I - P_N$ نتیجه می‌شود

$$\mathcal{M}_1 = \{P_N(L) | L \in \mathcal{N}\}, \qquad \mathcal{M}_2 = \{P_{N^\perp}(L) | L \in \mathcal{N}\}$$

چون P_N و $P_{N^\perp}$ تصویرهای متعامد هستند، اعضای $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ به ترتیب زیرفضاهای بسته در N و $N^\perp$ هستند. با توجه به اینکه $\mathcal{N}$ زنجیر است به سادگی مشاهده می‌شود که $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ هم زنجیر هستند.

فرض کنیم $\{P_N(L_i)\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از اعضای $\mathcal{M}_1$ باشد. با توجه به اینکه اگر $N \subseteq L$ $(L \in \mathcal{N})$، آنگاه $P_N(L) = N$، می‌توان فرض کرد به ازای هر $i \in I$، $L_i \subseteq N$. بنابراین داریم

$$\bigwedge_{i\in I} P_N(L_i) = \bigwedge_{i\in I} L_i \subseteq N$$

لذا

$$\bigwedge_{i\in I} P_N(L_i) = P_N(\bigwedge_{i\in I} L_i) \in \mathcal{M}_1$$

و

$$\bigvee_{i\in I} P_N(L_i) = \bigvee_{i\in I} L_i \subseteq N$$

پس

$$\bigvee_{i\in I} P_N(L_i) = P_N(\bigvee_{i\in I} L_i) \in \mathcal{M}_1$$

همچنین $P_N(H) = N \in \mathcal{M}_1$ و $P_N(\{0\}) = \{0\} \in \mathcal{M}_1$. در نتیجه $\mathcal{M}_1$ لانه‌ای در فضای هیلبرت N است.

فرض کنیم $\{P_N(L_i)\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از اعضای $\mathcal{M}_2$ باشد. با توجه به اینکه اگر $L \subseteq N$ $(L \in \mathcal{N})$، آنگاه $P_{N^\perp}(L) = \{0\}$، می‌توان فرض کرد به ازای هر $i \in I$، $N \subseteq L_i$. حال با توجه به این نکته که به

ازای هر $i \in I$، $N^{\perp} \cap L_i = P_{N^{\perp}}(L_i)$ به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i) &= \bigwedge_{i\in I} (N^{\perp} \cap L_i) \\ &= N^{\perp} \cap (\bigwedge_{i\in I} L_i) \\ &= P_{N^{\perp}}(\bigwedge_{i\in I} L_i) \in \mathcal{M}_۲ \end{aligned}$$

همچنین $P_{N^{\perp}}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right) = \bigcup_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i)$ و لذا

$$P_{N^{\perp}}\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)\right) = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i)\right)$$

(منظور از span فضای مولد خطی است). از طرفی با توجه به کرانداری $P_{N^{\perp}}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P_{N^{\perp}}\left(\overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)}\right) &\subseteq \overline{P_{N^{\perp}}\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)\right)} \\ &= \overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i)\right)} \end{aligned}$$

یا اینکه $P_{N^{\perp}}\left(\bigvee_{i\in I} L_i\right) \subseteq \bigvee_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i)$.

از طرف دیگر چون P_N تصویر متعامد است نتیجه می‌شود که $P_{N^{\perp}}\left(\bigvee_{i\in I} L_i\right)$ بسته است. لذا

$$P_{N^{\perp}}\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)\right) \subseteq P_{N^{\perp}}\left(\overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} P_{N^{\perp}}(L_i)\right) \subseteq P_{N^{\perp}}\left(\overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} L_i\right)}\right)$$

$$\underset{i\in I}{\vee} P_{N^{\perp}}(L_i) \subseteq P_{N^{\perp}}\left(\underset{i\in I}{\vee} L_i\right)$$

پس

$$\underset{i\in I}{\vee} P_{N^{\perp}}(L_i) = P_{N^{\perp}}\left(\underset{i\in I}{\vee} L_i\right) \in \mathcal{M}_۲.$$

واضح است که $P_{N^{\perp}}(N) = \{۰\} \in \mathcal{M}_۲$ و $P_{N^{\perp}}(H) = N^{\perp} \in \mathcal{M}_۲$. از این‌رو $\mathcal{M}_۲$ لانه‌ای روی فضای هیلبرت $N^{\perp}$ است.

ب- نگاشت‌های خطی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\theta : Alg\mathcal{M}_۱ \to P_N Alg\mathcal{N} P_N; \quad \theta(T) = \begin{pmatrix} T & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\gamma : Alg\mathcal{M}_۲ \to P_{N^{\perp}} Alg\mathcal{N} P_{N^{\perp}}; \quad \gamma(S) = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & S \end{pmatrix}.$$

نشان می‌دهیم که

$$(T \in Alg\mathcal{M}_۱)\, \theta(T) \in Alg\mathcal{N}$$

و

$$(S \in Alg\mathcal{M}_۲)\, \gamma(S) \in Alg\mathcal{N}$$

و لذا θ و γ خوش‌تعریف هستند. فرض کنیم $P_N(L) \in \mathcal{M}_۱$ که $L \in \mathcal{N}$ و همچنین $x \in L$ به صورت $x = n + n^{\perp}$ است که $n^{\perp} \in N^{\perp}$ و $n \in N$. اگر $L \subseteq N$، آن‌گاه $P_N(L) = L$ و لذا $T(L) \subseteq L$. در این صورت $x = n$ و از این‌رو خواهیم داشت

$$\theta(T)(x) = \begin{pmatrix} T & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x) \\ ۰ \end{pmatrix} \in L$$

پس در این حالت $\theta(T)(L) \subseteq L$. اگر $N \subseteq L$ ، آن‌گاه

$$\theta(T)(x) = \begin{pmatrix} T & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(n) \\ \circ \end{pmatrix} \in N \subseteq L$$

بنابراین در این حالت هم $\theta(T)(L) \subseteq L$. پس $\theta(T) \in Alg\mathcal{N}$ که $T \in Alg\mathcal{M}_۱$. در نتیجه

$$\theta(T) = P_N \theta(T) P_N \in P_N Alg\mathcal{N} P_N$$

حال فرض کنیم $P_{N^{\perp}}(L) \in \mathcal{M}_۲$ که $L \in \mathcal{N}$. همچنین فرض کنیم $x \in L$ به طوری که $x = n + n^{\perp}$ ($n^{\perp} \in N^{\perp}, n \in N$). در این صورت اگر $L \subseteq N$، آن‌گاه $x = n \in N$ و

$$\gamma(S)(x) = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} \in L$$

لذا $\gamma(S)(L) \subseteq L$.

اگر $N \subseteq L$، آنگاه $S(P_{N^{\perp}}(L)) \subseteq P_{N^{\perp}}(L) = L \cap N^{\perp} \subseteq L$. پس

$$\gamma(S)(x) = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ S(n^{\perp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ S(P_{N^{\perp}}(x)) \end{pmatrix} \in L$$

از این‌رو $\gamma(S)(L) \subseteq L$. لذا $\gamma(S) \in Alg\mathcal{N}$ که در آن $S \in Alg\mathcal{M}_۲$ و در نتیجه

$$\gamma(S) = P_{N^{\perp}} \gamma(S) P_{N^{\perp}} \in P_{N^{\perp}} Alg\mathcal{N} P_{N^{\perp}}$$

بنابراین θ و γ خوش‌تعریف هستند.

به سادگی بررسی می‌شود که θ و γ نگاشت‌های یک‌متری هستند که همریختی جبری هم هستند. کافیست پوشا بودن بررسی شود. به ازای هر $P_N T P_N \in P_N Alg\mathcal{N} P_N$ داریم $P_N T P_N|_N \in Alg\mathcal{M}_۱$

و لذا $\theta(P_N T P_N|_N) = P_N T P_N$ و به صورت مشابه به ازای هر $P_{N^\perp} S P_{N^\perp} \in P_{N^\perp} Alg\mathcal{N} P_{N^\perp}$ داریم $\gamma\left(P_{N^\perp} S P_{N^\perp}|_{N^\perp}\right) = P_{N^\perp} S P_{N^\perp}$ که $P_{N^\perp} S P_{N^\perp}|_{N^\perp} \in Alg\mathcal{M}_۲$. لذا یکریختی‌های جبری مورد نظر به دست می‌آیند. □

۳. نتایج اصلی

در این بخش به بیان نتایج اصلی می‌پردازیم. ابتدا لم زیر را داریم که برای نتیجه اصلی مورد نیاز است.

لم ۱.۳. *فرض کنید H فضایی هیلبرت باشد. در این صورت $B(H)$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود.*

اثبات. اگر H دارای بعد متناهی n باشد، آنگاه $B(H) \cong M_n$ است که بنابر نتیجه [۱] توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود. فرض کنید H با بعد نامتناهی باشد در این صورت بنابر [۱۱] هر عملگر $T \in B(H)$ را می‌توان به صورت مجموع پنج عملگر خودتوان نوشت، لذا در این حالت هم $B(H)$ برابر مولد خطی خودتوان‌هایش است و لذا توسط خودتوان‌هایش به عنوان جبر تولید می‌شود. □

حال به بیان نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم.

قضیه ۲.۳. *هر جبر لانه‌ای متناهی توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{N} = \{\{۰\}, N_۱, \cdots, N_k, H\}$ لانه‌ای متناهی در فضای هیلبرت H باشد که تعداد اعضای غیربدیهی $\mathcal{N}$ برابر k است. با استقرای روی اعضای غیربدیهی$\mathcal{N}$ قضیه را اثبات می‌کنیم.

اگر $k = ۰$، آنگاه $\mathcal{N} = \{\{۰\}, H\}$ لانه بدیهی است و لذا در این حالت $Alg\mathcal{N} = B(H)$ که بنا بر لم ۱.۳ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود. فرض کنیم به ازای هر عدد صحیح نامنفی k قضیه درست باشد؛ یعنی هر لانه متناهی $\mathcal{N}$ با k عضو غیربدیهی روی هر فضای هیلبرت H، جبر لانه‌ای $Alg\mathcal{N}$ توسط خودتوان‌هایش تولید شود. حال لانه‌ای با $k + ۱$ عضو غیربدیهی به صورت

$$\mathcal{N} = \{\{۰\}, N_۱, \cdots, N_{k+۱}, H\}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم$\mathcal{A} = Alg\mathcal{N}$ و $P = P_N$. بنابر توجه ۱.۲ تجزیه پیرس $\mathcal{A}$ را به صورت

زیر خواهیم داشت

$$\mathcal{A} = P\mathcal{A}P \oplus P\mathcal{A}(I-P) \oplus (I-P)\mathcal{A}(I-P).$$

با توجه به گزاره ۲.۲ به دست می‌آید $P\mathcal{A}P \cong Alg\mathcal{M}_1$ و $(I-P)\mathcal{A}(I-P) \cong Alg\mathcal{M}_2$ که در آن $\mathcal{M}_1 = \{\{0\}, N_1\}$ و

$$\mathcal{M}_2 = P_{N_1^\perp}(\mathcal{N}) = \left\{\{0\}, P_{N_1^\perp}(N_2), \ldots, P_{N_1^\perp}(N_{k+1}), N_1{}^\perp\right\}$$

که $\mathcal{M}_1$ لانه‌ی بدیهی در N_1 و $\mathcal{M}_2$ لانه‌ای متناهی در $N_1{}^\perp$ است. بنابر لم (۱.۳) و فرض استقرا جبرهای لانه‌ای $Alg\mathcal{M}_1 = B(N_1)$ و $Alg\mathcal{M}_2$ توسط خودتوان‌ها تولید می‌شوند. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{A}$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود؛ یعنی $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ (که در آن همانطور که در مقدمه اشاره شده $\mathcal{R}$ زیرجبر تولید شده توسط خودتوان‌های $\mathcal{A}$ است) به ازای هر $T \in \mathcal{A}$ داریم:

$$(P + PT(I-P))^2 = P + PT(I-P)$$

از این‌رو $P + PT(I-P)$ خودتوان است و متعلق به $\mathcal{R}$ است. چون زیرجبر $\mathcal{R}$ شامل P است، نتیجه می‌شود که

$$PT(I-P) = (P + PT(I-P)) - P \in \mathcal{R}$$

به ازای هر $T \in \mathcal{A}$. لذا

$$P\mathcal{A}(I-P) \subseteq \mathcal{R}$$

حال از طرف دیگر $P\mathcal{A}P \cong Alg\mathcal{M}_1$ و $(I-P)\mathcal{A}(I-P) \cong Alg\mathcal{M}_2$ (بنابر تذکر ۱.۲ و گزاره ۲.۲) زیرجبرهایی از $\mathcal{A}$ هستند. اگر $\mathcal{R}'$ و $\mathcal{R}''$ به ترتیب زیرجبرهای تولید شده توسط خودتوان‌ها در $P\mathcal{A}P$ و $(I-P)\mathcal{A}(I-P)$ باشند، آن‌گاه با توجه به تعریف این زیرجبرها و در واقع اینکه $P\mathcal{A}P$ و $(I-P)\mathcal{A}(I-P)$ زیرجبرهای $\mathcal{A}$ هستند، دیده می‌شود که $\mathcal{R}', \mathcal{R}'' \subseteq \mathcal{R}$. اما با توجه به بحث قبل

$$\mathcal{R}' = P\mathcal{A}P, \qquad \mathcal{R}'' = (I-P)\mathcal{A}(I-P)$$

لذا

$$\mathcal{A} = P\mathcal{A}P \oplus P\mathcal{A}(I-P) \oplus (I-P)\mathcal{A}(I-P) \subseteq \mathcal{R}.$$

پس $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ یعنی $\mathcal{A}$ توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود و برهان کامل است. □

فرض کنید $\mathcal{T} = \mathcal{T}(n_1, ..., n_k) \subseteq M_n$ جبر ماتریس‌های بالامثلثی بلوکی باشد که $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ و

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

که در آن هر A_{ij} ماتریسی $n_i \times n_j$ است. در صورتی که $k = 1$ داریم $\mathcal{T} = M_n$ و اگر به ازای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $n_i = 1$، آنگاه $\mathcal{T} = T_n$.

توجه داریم جبر ماتریس‌های بالا مثلثی بلوکی یکریخت جبری با جبرهای لانه‌ای متناهی بعد است که در واقع جبری لانه‌ای متناهی است (برای دیدن این مطالب و همچنین مطالعات بیشتر در این زمینه خواننده می‌تواند به [۵] مراجعه کند). با توجه به این مطلب و قضیه ۲.۳ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳.۳. *هر جبر بالامثلثی بلوکی توسط خودتوان‌هایش تولید می‌شود.*

در واقع این نتیجه تعمیمی از نتیجه [۴] برای جبر M_n است.

بریسار در [۳] اثبات کرده است که هر جبر تولید شده توسط خودتوان‌هایش جبر با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است. حال با توجه به این مطلب و قضیه ۲.۳، نتیجه زیر به دست می‌آید که این نتیجه به عنوان قضیه اصلی در [۸] با روشی متفاوت اثبات شده است و در اینجا برهانی ساده‌تر برای آن به دست آمده است.

نتیجه ۴.۳. *هر جبر لانه‌ای متناهی روی فضایی هیلبرت مختلط با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است.*

در گزاره زیر به بررسی ساختار نوعی از نگاشت‌های دوخطی روی جبرهای لانه‌ای متناهی می‌پردازیم که این نگاشت‌های دو خطی را می‌توان برای تعیین ساختار نگاشت‌های جردن (مانند همریختی جردن

یا مشتق جردن) تعیین شده در حاصل‌ضرب‌های به صورت $ab = ba = 0$ به کار برد. برای اطلاع از این نوع مسائل به [۲، ۹] و منابع ذکر شده آن‌ها ارجاع داده می‌شود.

گزاره ۵.۳. *فرض کنید $Alg\mathcal{N}$ جبر لانه‌ای متناهی روی فضای هیلبرت H باشد همچنین $\mathcal{X}$ فضایی برداری دلخواه و $\phi : Alg\mathcal{N} \times Alg\mathcal{N} \to \mathcal{X}$ نگاشتی دوخطی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند.*

$$TS = ST = 0 \Rightarrow \phi(T, S) = 0 \qquad (T, S \in Alg\mathcal{N})$$

آن‌گاه

$$\phi(T, S) + \phi(S, T) = \phi(TS, I) + \phi(I, ST)$$

و

$$\phi([T, S], I) = \phi(I, [T, S])$$

به ازای هر $T, S \in Alg\mathcal{N}$ که در آن $[T, S] = TS - ST$.

اثبات. فرض کنیم $T, S \in Alg\mathcal{N}$ دلخواه باشند به قسمی که $ST = 0$. در این صورت نگاشت دو خطی

$$\psi : Alg\mathcal{N} \times Alg\mathcal{N} \to \mathcal{X}$$

را با ضابطه $\psi(X, Y) = \phi(TX, YS)$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که $\psi(X, Y) = 0$ هرگاه $XY = 0$. حال چون $Alg\mathcal{N}$ جبر با حاصل‌ضرب صفر معیّن شده است از قضیه ۲.۳، به ازای هر $X, Y \in Alg\mathcal{N}$ نتیجه می‌شود که

$$\psi(X, Y) = \psi(XY, I).$$

پس به ازای هر $X, Y \in Alg\mathcal{N}$ که $ST = 0$ خواهیم داشت

$$\phi(TX, YS) = \phi(TXY, S).$$

حال اعضای دلخواه $X, Y \in Alg\mathcal{N}$ را ثابت می‌گیریم و نگاشت دوخطی $\varphi : Alg\mathcal{N} \times Alg\mathcal{N} \to \mathcal{X}$ را با ضابطه

$$\varphi(S, T) = \phi(TX, YS) - \phi(TXY, S)$$

تعریف می‌کنیم. بنابر نتیجه بالایی می‌بینیم که $\varphi(S, T) = 0$ هرگاه $ST = 0$. بنابراین به ازای هر $T, S \in Alg\mathcal{N}$ داریم $\varphi(S, T) = \varphi(ST, I)$. لذا به ازای هر $X, Y, T, S \in Alg\mathcal{N}$ به‌دست می‌آید

$$\phi(TX, YS) - \phi(TXY, S) = \phi(X, YST) - \phi(XY, ST).$$

قرار می‌دهیم $X = S = I$، در این صورت به ازای هر $T, Y \in Alg\mathcal{N}$ داریم

$$\phi(T, Y) + \phi(Y, T) = \phi(I, YT) + \phi(TY, I)$$

حال به ازای هر $X, Y \in Alg\mathcal{N}$ خواهیم داشت

$$\phi(X, Y) + \phi(Y, X) = \phi(XY, I) + \phi(I, YX)$$

و

$$\phi(Y, X) + \phi(X, Y) = \phi(YX, I) + \phi(I, XY).$$

با مقایسه این روابط به ازای هر $X, Y \in Alg\mathcal{N}$ نتیجه می‌شود

$$\phi([X, Y], I) = \phi(I, [X, Y]).$$

□

با توجه به اینکه هر جبر ماتریسی بالامثلثی بلوکی مختلط یک جبر لانه‌ای متناهی بعد است، واضح است که نتیجه ۴.۳ و گزاره ۵.۳ در مورد این جبرها نیز برقرار است.

مراجع

[1] M. Brešar, Characterizing homomorphisms, multipliers and derivations in rings with idempotents, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **137** (2007), 9–21.

[2] M. Breššar, Finite dimensional zero product determined algebras are generated by idempotents, *Expositiones Math.*, **34** (2016), 130–143.

[3] M. Breššar, Multiplication algebra and maps determined by zero products, *Linear and Multilinear Algebra*, **60** (2012), 763–768.

[4] M. Breššar, M. Graššišc and J. S. Ortega, Zero product determined matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, **430** (2009), 1486–1498.

[5] K.R. Davision and Nest Algebras, *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, vol. 191, Longman Scientic and Technical, Burnt mill Harlow, Essex, UK, 1988.

[6] H. Ghahramani, On rings determined by zero products, *J. Algebra and appl.*, **12** (2013), 1–15.

[7] H. Ghahramani, Zero product determined triangular algebras, *Linear Multilinear Algebra*, **61** (2013), 741–757.

[8] H. Ghahramani, Zero product determined some nest algebras, *Linear Algebra Appl.*, **438** (2013), 303–314.

[9] H. Ghahramani, On derivations and Jordan derivations through zero products, *Operator and Matrices*, **8** (2014), 759–771.

[10] L.W. Marcoux, Projections, commutators and Lie ideals in $C^\star$-algebras, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **110** (2010), 31–55.

[11] C. Pearcy and D. Topping, Sum of small numbers of idempotent, *Michigan Math. J.*, **14** (1967), 453–465.

[12] J.R. Ringrose, On some algebras of operators, *Proc. London Math. Soc.*, **15** (1965), 61–83.