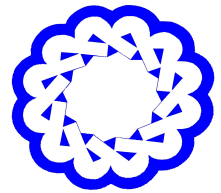


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

تعامد متساوی‌الساقین یکانی از نوع هرمیت-هادامارد در فضاها نرم‌دار مهدی دهقانی*

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، اصفهان، ایران

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم تعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمیت-هادامارد (تعامد HH-I) و نسخهٔ یکانی آن در فضاها نرم‌دار حقیقی، مشخصه‌سازی جدیدی برای فضاها ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم. در واقع، یک شرط لازم و کافی ضعیف‌تر از همگن بودن تعامد HH-I در فضای نرم‌دار حقیقی و حداقل ۳-بعدي X به‌دست می‌آوریم که تحت آن، نرم X از یک ضرب داخلی القا می‌شود. موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۱ فروردین ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۴ آذر ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: عباس سالمی

کلمات کلیدی:

فضای ضرب داخلی،

تعامد، تعامد

برکوف-جیمز، تعامد

متساوی‌الساقین از نوع

هرمیت-هادامارد.

۱. مقدمه

هندسه فضاهاى اقلیدسی بر دو مفهوم طول و زاویه استوار است که در بُعد ۳ و کمتر، شهود هندسی مناسبی از این دو در دست داریم. در فضاهاى اقلیدسی، تعریف هندسی ضرب داخلی دو بردار عبارت است از اندازه تصویر یکی از دو بردار بر روی دیگری که البته این تعریف به زاویه بین دو بردار وابسته است. در فضاهاى با بُعد بالاتر ابزارهاى جبری را برای مشخصه‌سازی ویژگی‌هاى هندسی فضا به‌کار می‌گیریم. در واقع، تعریف جبری ضرب داخلی در این فضاها ابزار مناسبی برای شناخت هندسه آنها در اختیار ما قرار می‌دهد. به‌ویژه، مفهوم تعامد ابزار قدرتمندی در آنالیز تابعی، نظریه تقریب، آنالیز فوریه، نظریه موجک‌ها، نظریه پردازش تصویر و سایر علوم وابسته به آنها است. همچنین این مفهوم، نقشی کلیدی در شناخت ویژگی‌هاى هندسی فضاهاى نرم‌دار ایفا می‌کند [۱۱، ۱۸].

همانطور که می‌دانیم در فضای ضرب داخلی $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ تنها یک رابطه تعامد وجود دارد که از ضرب داخلی حاصل می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد است اگر $\langle x, y \rangle = 0$ (در این صورت می‌نویسیم $x \perp y$). برخی ویژگی‌هاى اساسی تعامد در فضاهاى ضرب داخلی عبارتند از

(الف) ناتباهدگی: $x \perp x$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

(ب) همگنی (همگن بودن): اگر $x \perp y$ ، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\alpha x \perp \beta y$ ؛

(پ) تقارن (متقارن بودن): اگر $x \perp y$ ، آن‌گاه $y \perp x$ ؛

(ت) پیوستگی: فرض کنیم دنباله‌هاى $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X چنان باشند که $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$. در

این صورت اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \perp y_n$ ، آن‌گاه $x \perp y$ ؛

(ث) جمعی بودن: اگر $x \perp y$ و $x \perp z$ ، آن‌گاه $x \perp (y + z)$ ؛

(ج) ویژگی وجودی (وجودی بودن): برای هر دو بردار مستقل خطی $x, y \in X$ ، عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $x \perp (\alpha x + y)$. این ویژگی، وجود دو بردار ناصفر عمود برهم در هر زیرفضای دوبعدی از X را تضمین می‌کند.

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار روی میدان اعداد حقیقی (\mathbb{R}) (فضای نرم‌دار حقیقی) باشد. زمانی که نرم X از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، مفهوم تعامد روی X یکتا نیست. در طول قرن بیستم مفاهیم گوناگونی از تعامد در فضاهاى نرم‌دار به وسیله ریاضی‌دانان معرفی و مورد مطالعه قرار

گرفته است. مشهورترین آن‌ها تعامد برکوف-جیمز^۱ است. در سال ۱۹۳۵ برکوف^۲ [۹] اشاره‌ای به این تعامد در فضاهای نرم‌دار داشت. پس از آن جیمز^۳ [۲۰] با الهام از ایده‌های برکوف، این مفهوم جدید از تعامد در فضاهای نرم‌دار را گسترش داد و ویژگی‌های بیشتر و دقیق‌تری از آن ارائه کرد. او مشخصه‌سازی‌های فراوانی از ویژگی‌های هندسی فضاهای نرم‌دار، به ویژه، اکیداً محدب بودن و هموار بودن آن‌ها را به وسیله این تعامد به دست آورد (مطالعه^۴ [۱] پیشنهاد می‌شود). این تعامد به افتخار برکوف و جیمز تعامد برکوف-جیمز نامیده شده است.

• بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد برکوف-جیمز است، اگر

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

در این صورت می‌نویسیم $x \perp_B y$.

اگر دو بردار x و y در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^2 بر هم عمود باشند (یعنی $x \perp y$)، آن‌گاه طول بردارهای $x - y$ و $x + y$ برابرند. در واقع، بردارهای $x - y$ و $x + y$ قطرهای مستطیلی هستند که بردارهای x و y طول و عرض آن‌را تشکیل می‌دهند. جیمز [۲۱] با الهام از این ویژگی هندسی تعامد در فضاهای اقلیدسی، تعامد متساوی‌الساقین^۴ در فضاهای نرم‌دار را معرفی کرد.

• بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین است، اگر $\|x - y\| = \|x + y\|$. در

این صورت می‌نویسیم $x \perp_I y$.

برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر از تعامدهای ذکر شده و آشنایی با دیگر مفاهیم تعامد در فضاهای نرم‌دار، مطالعه^۵ مراجع [۲، ۴، ۵، ۷، ۸، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۵، ۲۷] به خواننده پیشنهاد می‌شود. نامساوی هرمیت-هادامارد^۵ برای تابع محدب $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه^۵ $f(x) = \|x\|^2$ عبارت است

¹Birkhoff-James

²Birkhoff

³James

⁴isosceles

⁵Hermite-Hadamard

از

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \int_0^1 \|(\lambda-t)x + ty\|^2 dt \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}.$$

به کمک این نامساوی در [۲۳] ثابت شده است که $\left(\int_0^1 \|(\lambda-t)x + ty\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} := \|(x, y)\|_2$ یک نرم روی $X \times X$ تعریف می‌کند. این نرم $HH-2$ نامیده شده است. برای مشاهده اطلاعات بیشتر در مورد $HH-p$ نرم‌ها ($1 \leq p < \infty$) مطالعه [۲۳] پیشنهاد می‌شود. در فضای نرم‌دار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ ، اگر $x, y \in X$ چنان باشند که $(\lambda-t)x \perp_I ty$ تقریباً همه‌جا روی بازه $[0, 1]$ ، آنگاه $\|(\lambda-t)x - ty\| = \|(\lambda-t)x + ty\|$ تقریباً همه‌جا روی $[0, 1]$ که این نتیجه می‌دهد

$$\int_0^1 \|(\lambda-t)x - ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(\lambda-t)x + ty\|^2 dt.$$

همچنین در فضای ضرب داخلی $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، به آسانی دیده می‌شود که

$$x \perp y \Leftrightarrow \int_0^1 \|(\lambda-t)x - ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(\lambda-t)x + ty\|^2 dt \quad (\forall x, y \in X).$$

با الهام از این واقعیت‌ها، نویسندگان در [۱۷] بر اساس $HH-2$ نرم‌ها، تعامد جدیدی در فضاهای نرم‌دار تعریف کرده‌اند که به تعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمت-هادامارد (تعامد $HH-I$) معروف شده است.

• در فضای نرم‌دار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمت-هادامارد است، اگر

$$\int_0^1 \|(\lambda-t)x - ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(\lambda-t)x + ty\|^2 dt.$$

در این صورت می‌نویسیم $y \perp_{HH-I} x$. برای آشنایی بیشتر با تعامدهای از نوع هرمیت-هادامارد

[۱۶، ۱۷، ۲۴] را ببینید.

همانطور که می‌دانیم فضاهای ضرب داخلی ویژگی‌های هندسی خاصی دارند که در فضاهای نرم‌داری که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، برقرار نیستند. از این‌رو، در قرن بیستم مشخصه‌سازی‌های بسیاری از فضاهایی که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا می‌شود، به‌دست آمده است. اولین و مشهورترین آن‌ها در سال ۱۹۳۵ توسط جُردن^۶ و فون نیومن^۷ به‌دست آمد. آن‌ها ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای این‌که نرم یک فضای نرم‌دار توسط یک ضرب داخلی القا شود، برقراری تساوی متوازی‌الاضلاع است [۲۲]. نتیجه مستقیم این حقیقت، این است که یک فضای نرم‌دار، فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر هر زیرفضای ۲-بعدی آن فضای ضرب داخلی باشد. روش‌های بسیاری برای مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی وجود دارد. یکی از مشهورترین این روش‌ها استفاده از مفهوم تعامد است. واضح است که در فضای ضرب داخلی $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ تعامدهای برکوف-جیمز، متساوی‌الساقین و HH-I با تعامد حاصل از ضرب داخلی معادل هستند. همچنین توجه به این نکته ضروری است که تعامدهای برکوف-جیمز و متساوی‌الساقین ویژگی‌های ناتباهیدگی، پیوستگی و وجودی بودن را دارند اما ممکن است برخی از ویژگی‌های تعامد حاصل از یک ضرب داخلی را نداشته باشند. در واقع، تعامد متساوی‌الساقین متقارن است اما تعامد برکوف-جیمز، در حالت کلی متقارن نیست. در حالی که تعامد برکوف-جیمز همگن است و تعامد متساوی‌الساقین، در حالت کلی همگن نیست. بر اساس این واقعیت‌ها، دی^۸ [۱۵] و جیمز [۱۹، ۲۰، ۲۱] مشخصه‌سازی‌هایی از فضاهای ضرب داخلی به‌دست آورده‌اند. به ویژه، آن‌ها ثابت کردند که فضای نرم‌دار X ، فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر تعامد متساوی‌الساقین در X همگن باشد. به‌علاوه، نتیجه زیر از [۲۱] حائز اهمیت است.

قضیه ۱.۱.۱. [۲۱، قضیه ۱] فرض کنیم X فضای نرم‌دار با بعد حداقل ۳ باشد. در این صورت X فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر تعامد برکوف-جیمز در X متقارن باشد.

برای مشاهده نتایج بیشتر در این زمینه مطالعه [۸] پیشنهاد می‌شود. امیر^۹ در این کتاب بسیاری از مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی که بر اساس تعامدهای متفاوت به‌دست آمده را گردآوری کرده

⁶Jordan

⁷von Neumann

⁸Day

⁹Amir

است. سینگر^{۱۰} در [۲۶] تعامد متساوی‌الساقین یکانی (تعامد سینگر) را معرفی کرد.

• بردارهای x و y در فضای نرم‌دار X متعامد متساوی‌الساقین یکانی هستند، اگر $\|x\| \|y\| = 0$ یا

$$\frac{x}{\|x\|} \perp_I \frac{y}{\|y\|} \text{ در این صورت می‌نویسیم } x \perp_{UI} y.$$

برای مشاهده نتایج مربوط به این تعامد مطالعه [۴، ۵] پیشنهاد می‌شود. در [۶، ۲۸] ویژگی‌های بیشتری از این تعامد و چند مشخصه‌سازی جدید برای فضاهای ضرب داخلی بر اساس آن به دست آمده است. به علاوه، نویسندگان در [۱۴، ۲۵] شکل کلی‌تری از این تعامد را معرفی کرده‌اند و بر اساس آن مشخصه‌سازی‌های جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی ارائه کرده‌اند. با الهام از تعریف سینگر، تعامد متساوی‌الساقین یکانی^{۱۱} از نوع هرمیت-هادامارد (تعامد UHH-I) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۰۱. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار حقیقی باشد. در این صورت گوییم بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین یکانی از نوع هرمیت-هادامارد است، اگر $\|x\| \|y\| = 0$ یا

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = \int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt.$$

به عبارت دیگر

$$x \perp_{UHH-I} y \Leftrightarrow \|x\| \|y\| = 0 \quad \vee \quad \frac{x}{\|x\|} \perp_{HH-I} \frac{y}{\|y\|}.$$

ویژگی‌های اساسی تعامد HH-I در [۱۷] به دست آمده است. به ویژه، در این مقاله ثابت شده است که تعامد HH-I در فضای نرم‌دار حقیقی X همگن است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. علاوه بر این، مشخصه‌سازی‌های بیشتری از فضاهای ضرب داخلی بر اساس رابطه تعامد HH-I و تعامد برکوف-جیمز در [۱۶] به دست آمده است. در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفاهیم تعامد HH-I و تعامد UHH-I، مشخصه‌سازی‌های جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی به دست آوریم. برای این منظور، ابتدا ویژگی‌های اساسی تعامد UHH-I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به ویژه، نشان می‌دهیم تعامد UHH-I ویژگی وجودی دارد. همچنین رابطه این تعامد با تعامدهای برکوف-جیمز، متساوی‌الساقین یکانی و

¹⁰Singer

¹¹Unitary isosceles orthogonality

HH-I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس، با فرض این‌که بعد فضای نرم‌دار حقیقی X حداقل ۳ باشد، یک شرط لازم و کافی جدید که از همگن بودنِ تعامد HH-I ضعیف‌تر است، برای این‌که نرم X از یک ضرب داخلی القا شود، به دست می‌آوریم.

۲. تعامد UHH-I و مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که فضاهای نرم‌دار حقیقی هستند. ابتدا ویژگی‌های تعامد UHH-I در فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را بررسی خواهیم کرد. توجه می‌کنیم که این تعامد ناتباهیده است. زیرا اگر $x \in X$ چنان باشد که $x \perp_{UHH-I} x$ و $x \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[\left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 - \left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 [((\lambda - t) + t)^2 - ((\lambda - t) - t)^2] dt \\ &= \int_0^1 4t(\lambda - t) dt = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

که امکان ندارد. همچنین با توجه به این‌که تعامد HH-I ویژگی پیوستگی دارد، نتیجه می‌گیریم که تعامد UHH-I نیز ویژگی پیوستگی دارد. در [۱۷] ثابت شده است که تعامد HH-I تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. این واقعیت را در قضیه بعد بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۱۷، قضیه ۶.۳] تعامد HH-I در فضای نرم‌دار X همگن است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد.

اما به سادگی دیده می‌شود که تعامد UHH-I در فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ همگن است. در حقیقت، اگر $x, y \in X$ بردارهایی باشند که $x \perp_{UHH-I} y$ و $\lambda > 0$ ، آنگاه $\frac{\lambda y}{\|\lambda y\|} \perp_{HH-I} \frac{x}{\|x\|}$ این یعنی $\lambda y \perp_{UHH-I} x$. از طرفی واضح است که اگر $x \perp_{UHH-I} y$ ، آنگاه $x \perp_{UHH-I} -y$. بنابراین برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت $\lambda y \perp_{UHH-I} x$.

ذکر این نکته ضروری است که تعامد HH-I و تعامد UHH-I تنها در فضاهای ضرب داخلی معادل هستند. به بیان دیگر، تعامدهای HH-I و UHH-I در فضای نرم‌دار X معادل هستند اگر و تنها اگر X

فضای ضرب داخلی باشد. برای روشن شدن این واقعیت، ابتدا فرض می‌کنیم $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$. در این صورت

$$\int_0^1 \|(1-t)x \pm ty\|^2 dt = \frac{1}{3}(\|x\|^2 + \|y\|^2 \pm \langle x, y \rangle) \quad (1.2)$$

و

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} \pm t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = \frac{1}{3} \left(2 \pm \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \quad (2.2)$$

و لذا به سادگی از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$x \perp_{HH-I} y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp_{UHH-I} y.$$

اکنون فرض کنیم تعامدهای $HH-I$ و $UHH-I$ در فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ معادل باشند. از آنجایی که تعامد $UHH-I$ در X همگن است، نتیجه می‌گیریم که تعامد $HH-I$ نیز در X همگن است. بنابراین از قضیه ۱.۲، نتیجه می‌شود که X یک فضای ضرب داخلی است. این حقیقت، تضمین می‌کند که این تعامدها در فضاهای نرم‌داری که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، معادل نیستند.

با توجه به این‌که تعامد متساوی‌الساقین نیز تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است (قضیه ۷.۴ از [۱۹] را ببینید)، به روشی مشابه ثابت می‌شود که تعامد $UHH-I$ و تعامد متساوی‌الساقین در فضای نرم‌دار X معادل هستند اگر تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد.

در قضیه ۳.۳ از [۱۷] ثابت شده است که تعامد $HH-I$ ویژگی وجودی دارد. با بهره‌گیری از ایده اثبات این مطلب، در لم بعد ثابت می‌کنیم که تعامد $UHH-I$ نیز ویژگی وجودی دارد.

لم ۲.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$ بردارهایی مستقل خطی باشند. در این صورت عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$.

اثبات. فرض کنیم $x, y \in X$ مستقل خطی باشند. نگاشت پیوسته $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\Phi(\lambda) = \int_0^1 \varphi(\lambda, t) dt$$

تعریف می‌کنیم که در آن

$$\varphi(\lambda, t) = \left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 - \left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2.$$

در این صورت برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $t \in (0, 1)$ داریم

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, t) &= \left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 - \left\| (\lambda - t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 \\ &= (\lambda - t)^2 \left[\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{t}{\lambda - t} \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{t}{\lambda - t} \frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 \right] \\ &= (\lambda - t)^2 \left[\left\| \left(\frac{\lambda}{\|x\|} + \frac{t}{\lambda - t} \frac{\lambda}{\|\lambda x + y\|} \right) x + \frac{t}{\lambda - t} \frac{y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\| \left(\frac{\lambda}{\|x\|} - \frac{t}{\lambda - t} \frac{\lambda}{\|\lambda x + y\|} \right) x - \frac{t}{\lambda - t} \frac{y}{\|\lambda x + y\|} \right\|^2 \right]. \end{aligned}$$

از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi(\lambda, t) \longrightarrow (\lambda - t)^2 \left[\left(1 + \frac{t}{\lambda - t} \right)^2 - \left(1 - \frac{t}{\lambda - t} \right)^2 \right] = 4t(\lambda - t) \quad (\lambda \rightarrow +\infty)$$

و

$$\varphi(\lambda, t) \longrightarrow (\lambda - t)^2 \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda - t} \right)^2 - \left(1 + \frac{t}{\lambda - t} \right)^2 \right] = -4t(\lambda - t) \quad (\lambda \rightarrow -\infty).$$

از سوی دیگر، به سادگی دیده می‌شود که به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $t \in (0, 1)$ داریم $|\varphi(\lambda, t)| \leq 4t$. در

نتیجه

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda) = \int_0^1 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda, t) dt = 4 \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{2}{3} > 0.$$

و

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Phi(\lambda) = \int_0^1 \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varphi(\lambda, t) dt = -4 \int_0^1 t(1-t) dt = -\frac{2}{3} < 0.$$

بنابراین، بنابه قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته، نتیجه می‌گیریم که $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\Phi(\alpha) = 0$. این یعنی $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$. □

نکته ۳.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد، $x, y \in X$ و

$$\diamond_1, \diamond_2 \in \{B, I, UI, HH - I, UHH - I\}.$$

در این صورت، منظور از نماد $\perp_{\diamond_1} \subseteq \perp_{\diamond_2}$ این است که اگر $x \perp_{\diamond_1} y$ ، آنگاه $x \perp_{\diamond_2} y$. همچنین گوییم روابط تعامد \perp_{\diamond_1} و \perp_{\diamond_2} در X مقایسه‌پذیر هستند، اگر $\perp_{\diamond_1} \subseteq \perp_{\diamond_2}$ یا $\perp_{\diamond_2} \subseteq \perp_{\diamond_1}$.

نکته ۴.۲. فضای نرم‌دار $X = \mathbb{R}^3$ به همراه نرم $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x = (1, 0, \frac{1}{4})$ و $y = (-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$. در این صورت به آسانی دیده می‌شود که

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{3}{2}$$

از این رو $x \perp_{UI} y$. از سوی دیگر، با انجام محاسبات ساده‌ای که به عهده خواننده واگذار می‌شود، داریم

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{t}{\frac{3}{4}}\right)^2 dt + \frac{1}{4} \int_{\frac{3}{4}}^1 (3t - 1)^2 dt = \frac{43}{64}$$

و

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{3t}{2}\right)^2 dt + \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (1+t)^2 dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(\frac{3t}{2} - 1\right)^2 dt$$

$$= \frac{173}{192}.$$

این یعنی $y \perp_{UHH-I} x$ که نتیجه می‌دهد در فضای نرم‌دار X ، $\perp_{UI} \not\subseteq \perp_{UHH-I}$. اکنون ثابت می‌کنیم در فضای نرم‌دار X ، $\perp_{UHH-I} \not\subseteq \perp_{UI}$. برای این منظور به برهان خلف، فرض کنیم در X داشته باشیم $\perp_{UHH-I} \subseteq \perp_{UI}$ و $x, y \in X$ چنان باشند که $x \perp_{UI} y$ و $x \not\perp_{UHH-I} y$. بنابه لم ۲.۲ عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$ از سوی دیگر، چون تعامد متساوی‌الساقین یکانی ویژگی یکتایی دارد (قضیه ۲ از [۲۸] را ببینید) و $\perp_{UHH-I} \subseteq \perp_{UI}$ ، پس تعامد $UHH-I$ نیز در X ویژگی یکتایی دارد و لذا α یکتاست و $x \perp_{UI} (\alpha x + y)$. بنابراین $\alpha = 0$ و در نتیجه $x \perp_{UHH-I} y$ که امکان‌پذیر نیست. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم $\perp_{UI} \not\subseteq \perp_{UHH-I}$ که این نیز در این فضای نرم‌دار معتبر نیست.

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد، $x \in X$ و $x \neq 0$ و $y \in X$. تابع‌های

$$\tau_-(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}, \quad \tau_+(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

به‌ترتیب، مشتق گاتوی چپ و راست تابع نرم در نقطه x و در جهت y نامیده می‌شوند. تابع نرم در نقطه x ، در جهت y گاتو-مشتق‌پذیر است اگر $\tau_-(x, y) = \tau_+(x, y)$ که این مقدار مشترک را با $\tau(x, y)$ نشان می‌دهیم و مشتق گاتوی تابع نرم در نقطه x ، در جهت y می‌نامیم. اگر تابع نرم در نقطه x در جهت هر $y \in X$ گاتو-مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع نرم در نقطه x گاتو-مشتق‌پذیر است. از جمله ویژگی‌های مهم تابع‌های τ_{\pm} می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:

(الف) $\tau_-(x, y) \leq \tau_+(x, y)$ و $|\tau_{\pm}(x, y)| \leq \|y\|$ ؛

(ب) $\tau_{\pm}(x, \alpha y) = \begin{cases} \alpha \tau_{\pm}(x, y) & \alpha > 0 \\ \alpha \tau_{\mp}(x, y) & \alpha \leq 0 \end{cases}$ ؛

(پ) $\tau_{\pm}(x, \alpha x + y) = \alpha \|x\| + \tau_{\pm}(x, y)$.

لم ۵.۲. [۱۰، لم ۷.۲] فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد. اگر اعداد حقیقی λ و μ وجود داشته باشند که $\lambda + \mu \neq 0$ و $\lambda\tau_-(x, y) + \mu\tau_+(x, y)$ تابعی پیوسته از $x, y \in X$ باشد، آنگاه تابع نرم روی X گاتو-مشتق پذیر است.

لم ۶.۲. [۲۰] فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت، به شرط این که نرم X گاتو-مشتق پذیر باشد، داریم $x \perp_B y$ اگر و تنها اگر $\tau(x, y) = 0$.

بر این نکته نیز باید تاکید کنیم که تعامد HH-I و تعامد برکوف-جیمز در فضاهای نرم‌داری که نرم آنها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، معادل نیستند. در واقع، به آسانی دیده می‌شود که در فضاهای ضرب داخلی تعامد UHH-I و تعامد برکوف-جیمز معادل هستند. اما اگر X یک فضای نرم‌دار با بعد حداقل ۳ باشد و تعامد UHH-I و تعامد برکوف جیمز در X معادل باشند، آنگاه تعامد برکوف-جیمز در X متقارن خواهد بود و لذا قضیه ۱.۱ نتیجه می‌دهد که X یک فضای ضرب داخلی است. به علاوه، مثال زیر نشان می‌دهد که این تعامدها در فضاهای نرم‌دار ۲-بعدهی که نرم آنها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، معادل نیستند.

مثال ۷.۲. فضای نرم‌دار $X = \mathbb{R}^2$ به همراه نرم $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x = (1, 0)$ و $y = (1, 1)$. در این صورت $x \perp_B y$ زیرا

$$\|x + \lambda y\| = |1 + \lambda| + |\lambda| \geq \|x\| = 1 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

در حالی که

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^2 dt = \frac{13}{27}$$

و

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{x}{\|x\|} + t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 dt = 1.$$

بنابراین $x \perp_{UHH-I} y$ همچنین به‌ازای $z = (2, 1)$ و $w = (1, -2)$ داریم

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{z}{\|z\|} - t \frac{w}{\|w\|} \right\|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2t}{3}\right)^2 dt + \frac{1}{9} \int_{\frac{1}{3}}^1 (4t-1)^2 dt = \frac{151}{35}$$

و

$$\int_0^1 \left\| (1-t) \frac{z}{\|z\|} + t \frac{w}{\|w\|} \right\|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2t}{3}\right)^2 dt + \frac{1}{9} \int_{\frac{1}{3}}^1 (1+2t)^2 dt = \frac{151}{35}.$$

بنابراین $z \perp_{UHH-I} w$ اما $z \not\perp_B w$ زیرا به‌ازای $\lambda = \frac{1}{3}$ داریم

$$\|z + \lambda w\| = |2 + \lambda| + |1 - 2\lambda| = \frac{5}{3} < \|z\| = 3.$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، تعامد متساوی‌الساقین تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. شرایط ضعیف‌تری نسبت به همگنی تعامد متساوی‌الساقین نیز برای مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی به‌دست آمده است. امیر [۸] ثابت کرد فضای نرم‌دار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر $\alpha \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$x \perp_I y \Rightarrow x \perp_I \alpha y \quad (\forall x, y \in X). \quad (3.2)$$

این مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی در [۱۲] توسط نویسندگان بهبود یافته است. همچنین می‌دانیم تعامد $HH-I$ تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. در [۱۶] نسخه‌ای از مشخصه‌سازی ارائه شده توسط امیر برای تعامد $HH-I$ به‌دست آمده است (قضیه ۱۵.۲ از [۱۶] را ببینید). آلونسو [۱۲] در رساله دکتري خودش مشخصه‌سازی ارائه شده توسط امیر را بهبود بخشید (گزاره ۲۷.۲ از [۳] را ببینید). در واقع، او ثابت کرد که فضای نرم‌دار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر $\delta > 0$

¹²Alonso

وجود داشته باشد به طوری که

$$x \perp_I y, |\lambda| < \delta \Rightarrow x \perp_I \lambda y \quad (\forall x, y \in \mathbb{S}_X)$$

که در آن $\mathbb{S}_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ کره واحد X است.

در پایان این بخش قصد داریم نسخه‌ای از مشخصه‌سازی ارائه شده توسط آلونسو را برای تعامد HH-I در فضاهای نرم‌دار حداقل ۳-بعدی به دست آوریم. به بیان دقیق‌تر، به عنوان نتیجه اصلی این بخش در قضیه بعد بر اساس تعامد HH-I یک شرط لازم و کافی دیگر برای این که نرم یک فضای نرم‌دار با بعد حداقل ۳ از یک ضرب داخلی القا شود، به دست می‌آوریم. توجه کنید که شرط لازم و کافی که در قضیه بعد به دست می‌آید از همگنی تعامد HH-I ضعیف‌تر است.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار با بعد حداقل ۳ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) برای هر $x, y \in \mathbb{S}_X$ ، عدد $\delta = \delta(x, y) > 0$ وجود دارد به طوری که

$$x \perp_{HH-I} y \Rightarrow x \perp_{HH-I} \lambda y \quad (\forall \lambda \in (0, \delta)).$$

(۲) فضای ضرب داخلی X است.

اثبات. واضح است که اگر X فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه تعامد HH-I با تعامد حاصل از ضرب داخلی معادل است و بنابراین (۱) برقرار است.

برای اثبات (۲) \Leftarrow (۱)، فرض کنیم $x, y \in \mathbb{S}_X$ و $x \perp_{HH-I} y$. پس $\delta = \delta(x, y) > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\lambda \in (0, \delta)$ ، $x \perp_{HH-I} \lambda y$. نگاشت $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\lambda) = \int_0^1 (\|(1-t)x + t\lambda y\|^2 - \|(1-t)x - t\lambda y\|^2) dt \quad (\lambda \in (0, \delta)).$$

در این صورت $F(\circ) = \circ$ و برای هر $\lambda \in (\circ, \delta)$ ، $F(\lambda) = \circ$ ، لذا

$$F'_+(\circ) = \lim_{\lambda \rightarrow \circ^+} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = \circ.$$

توجه می‌کنیم که

$$\frac{F(\lambda)}{\lambda} = \int_{\circ}^{\lambda} (F^+(\lambda, t) - F^-(\lambda, t)) dt$$

که در آن

$$F^+(\lambda, t) = \frac{\|(\lambda - t)x + t\lambda y\|^{\gamma} - \|(\lambda - t)x\|^{\gamma}}{\lambda}$$

و

$$F^-(\lambda, t) = \frac{\|(\lambda - t)x - t\lambda y\|^{\gamma} - \|(\lambda - t)x\|^{\gamma}}{\lambda}.$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} F^+(\lambda, t) &= \frac{\|(\lambda - t)x + \lambda t y\|^{\gamma} - \|(\lambda - t)x\|^{\gamma}}{\lambda} \\ &= \left(\frac{\|(\lambda - t)x + \lambda t y\| - \|(\lambda - t)x\|}{\lambda} \right) (\|(\lambda - t)x + \lambda t y\| + \|(\lambda - t)x\|). \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{\lambda \rightarrow \circ^+} F^+(\lambda, t) = \gamma t (\lambda - t)^{\gamma-1} \|x\| \tau_+(x, y) = \gamma t (\lambda - t)^{\gamma-1} \tau_+(x, y).$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}
 F^-(\lambda, t) &= \frac{\|(\lambda - t)x - \lambda ty\|^2 - \|(\lambda - t)x\|^2}{\lambda} \\
 &= \left(\frac{\|(\lambda - t)x - \lambda ty\| - \|(\lambda - t)x\|}{\lambda} \right) (\|(\lambda - t)x - \lambda ty\| + \|(\lambda - t)x\|).
 \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F^-(\lambda, t) = 2t(\lambda - t)\|x\|\tau_+(x, -y) = -2t(\lambda - t)\tau_-(x, y).$$

لذا از قضیه همگرایی مغلوب لبگ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
 \circ &= F'_+(\circ) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^1 (F^+(\lambda, t) - F^-(\lambda, t)) dt \\
 &= \int_0^1 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (F^+(\lambda, t) - F^-(\lambda, t)) dt \\
 &= (\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)) \int_0^1 2t(\lambda - t) dt \\
 &= \frac{1}{6} (\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)).
 \end{aligned}$$

بنابراین $\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y) = \circ$.فرض کنیم $x, y \in X$ دو بردار دلخواه و مستقل خطی باشند. اگر $\alpha = \alpha(x, y) \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$ (وجود α در لم ۲.۲ تضمین شده است)، آنگاه $\frac{\alpha x + y}{\|\alpha x + y\|} \perp_{HH-I} \frac{x}{\|x\|}$. پس بنابه

آنچه ثابت کردیم و با استفاده از ویژگی‌های تابعک‌های τ_{\pm} داریم

$$\begin{aligned} \circ &= \tau_+\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha x + y}{\|\alpha x + y\|}\right) + \tau_-\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha x + y}{\|\alpha x + y\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|x\| \|\alpha x + y\|} ((\alpha\|x\| + \tau_+(x, y)) + (\alpha\|x\| + \tau_-(x, y))) \\ &= \frac{1}{\|x\| \|\alpha x + y\|} (2\alpha\|x\| + \tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)). \end{aligned}$$

از این رو

$$\alpha = \alpha(x, y) = -\frac{\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)}{2\|x\|}.$$

بنابراین برای هر دو بردار مستقل خطی $x, y \in X$ ، عدد حقیقی یکتای $\alpha = \alpha(x, y)$ وجود دارد به طوری که

$$x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y) \Leftrightarrow \alpha = \alpha(x, y) = -\frac{\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)}{2\|x\|}.$$

اکنون فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی مستقل خطی در X باشند و بردارهای $x, y \in X$ چنان باشند که $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، عدد $\alpha_n := \alpha(x_n, y_n)$ وجود دارد که $x_n \perp_{UHH-I} (\alpha_n x_n + y_n)$ و در نتیجه بنابه (؟؟) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\alpha_n = \alpha(x_n, y_n) = -\frac{\tau_-(x_n, y_n) + \tau_+(x_n, y_n)}{2\|x_n\|}.$$

از آنجایی که $|\tau_{\pm}(x_n, y_n)| \leq \|y_n\|$ ، پس دنباله $\{\alpha_n\}$ کُشی و لذا کراندار است و در نتیجه زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{\alpha'_n\}$ دارد. فرض می‌کنیم $\alpha'_n \rightarrow \beta$. چون $\{\alpha_n\}$ کُشی است و زیردنباله‌ای همگرا به β دارد، پس $\alpha_n \rightarrow \beta$. از طرفی، چون $x_n \perp_{UHH-I} (\alpha_n x_n + y_n)$ و $x_n \rightarrow x$ ، $y_n \rightarrow y$ و $\alpha_n \rightarrow \beta$ ، بنابه ویژگی پیوستگی تعامد $UHH-I$ نتیجه می‌گیریم که $x \perp_{UHH-I} (\beta x + y)$ و لذا از (؟؟) نتیجه می‌شود

که $\beta = \alpha(x, y)$ بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \beta = \alpha(x, y).$$

این یعنی $\alpha(x, y)$ و در نتیجه $\tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)$ نسبت به هر دو مولفه x و y پیوسته است. بنابراین از لم ۵.۲ نتیجه می‌شود که تابع نرم روی X گاتو-مشتق‌پذیر است و لذا برای هر $x, y \in X$ ، $\tau(x, y) := \tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)$ بدین ترتیب با استفاده از لم ۶.۲ نتیجه می‌گیریم که برای هر $x, y \in X$

$$x \perp_{UHH-I} y \Leftrightarrow \tau(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp_B y.$$

اما می‌دانیم تعامد HH-I و در نتیجه تعامد UHH-I متقارن است. بنابراین تعامد برکوف-جیمز نیز متقارن است و قضیه ۱.۱ نتیجه می‌دهد که X فضای ضرب داخلی است. \square

تشکر و قدردانی

از سردبیر، دبیر تخصصی و داور محترم که با نظرات ارزشمند خود بر غنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

مراجع

- [۱] مهدی دهقانی، فضاهاى ضرب داخلی: از اتحاد متوازی الاضلاع تا سه گانه جیمز، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۹(۲) (۱۳۹۹)، ۱۰۷-۲۳.
- [۲] محمد صالح مصلحیان، فاطمه عبدالله زاده گنابادی، تعامد برکوف-جیمز در فضاهاى برداری نرم‌دار، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۶(۶۰) (۱۳۹۶)، ۱۲۱-۱۳۰.

- [3] J. Alonso, *Ortogonalidad en espacios normados*, PhD thesis, Universidad de Extremadura, (1984).
- [4] J. Alonso and C. Benítez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties, *Extracta Math.*, **3** (1988), 1–15.
- [5] J. Alonso and C. Benítez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. II. Relations between main orthogonalities, *Extracta Math.*, **4**(3) (1989), 121–131.

- [6] J. Alonso, Some results on Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Arch. Math.*, **61**(2) (1993), 177–182.
- [7] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, *Aequationes Math.*, **83**(1) (2012), 153–189.
- [8] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 20. Birkhäuser, Basel, (1986).
- [9] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1**(2) (1935), 169–172.
- [10] S.O. Carlsson, Orthogonality in normed linear spaces, *Ark. Mat.*, **4** (1962), 297–318
- [11] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [12] F. Dadipour, F. Sadeghi and A. Salemi, Characterizations of inner product spaces involving homogeneity of isosceles orthogonality, *Arch. Math. (Basel)*, **104**(5) (2015), 431–439.
- [13] F. Dadipour and M.S. Moslehian, A characterization of inner product spaces related to the p-angular distance, *J. Math. Anal. Appl.*, **371**(2) (2010), 677–681.
- [14] F. Dadipour, F. Sadeghi and A. Salemi, An orthogonality in normed linear spaces based on angular distance inequality *Aequationes Math.*, **90**(2) (2016), 281–297.
- [15] M.M. Day, Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 320–337.
- [16] M. Dehghani and A. Zamani, Characterization of real inner product spaces by Hermite-Hadamard type orthogonalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **479** (2019), 1364–1382.
- [17] S.S. Dragomir and E. Kikianty, Orthogonality connected with integral means and characterizations of inner product spaces, *J. Geom.*, **98**(1) (2010), 33–49.
- [18] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 19. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [19] R.C. James, Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **12**(2) (1945), 291–302.
- [20] R.C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**(2) (1947), 265–292.
- [21] R.C. James, Inner product in normed linear spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **53** (1947), 559–566.
- [22] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, **36**(2) (1935), 719–723.

- [23] E. Kikianty and S.S. Dragomir, Hermite-Hadamard's inequality and the p-HH-norm on the Cartesian product of two copies of a normed space, *Math. Inequal. Appl.*, **13**(1) (2010), 1–32.
- [24] E. Kikianty and S.S. Dragomir, On Carlsson type orthogonality and characterization of inner product spaces, *Filomat*, **26**(4) (2012), 859–870.
- [25] J. Rooin, S. Rajabi and M.S. Moslehian, p-angular distance orthogonality, *Aequat. Math.*, **94** (2020), 103–121.
- [26] I. Singer, Angles abstraits et fonctions trigonométriques dans les espaces de Banach, (Romanian) *Acad. R. P. Romîne. Bul. Şti. Secţ. Şti. Mat. Fiz.*, **9** (1957), 29–42.
- [27] A. Zamani and M. Dehghani, *On Exact and Approximate Orthogonalities Based on Norm Derivatives*, In: Brzdęk J., Popa D., Rassias T. (eds) *Ulam Type Stability*, Springer, Cham., 2019.
- [28] L. Zheng and Z. Ya Dong, Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Arch. Math. (Basel)*, **55**(6) (1990), 588–594.