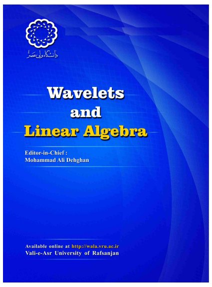
موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۸۴-۱۷۳



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

تبدیل دیفرانسیلی خطی بر اساس تابع میتاگ-لفلر روی توابع تک‌ارز

شهرام نجف زاده [آ]*

[آ] دانشیارگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ ، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۳ بهمن ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۲۹ تیر ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: علی توکلی

کلمات کلیدی:

تابع تک‌ارز، تابع میتاگ-لفلر ، تبدیل دیفرانسیلی خطی، برآورد ضرایب، مجموعه‌ی محدب، ضرب پیچشی، خواص شعاعی.

چکیده

یک تبدیل دیفرانسیلی خطی بر اساس تابع میتاگ-لفلر در نظر گرفته شده است. رده‌ی جدیدی از توابع تک‌ارز بر اساس تبدیل خطی تعریف شده است. برای توابع این رده، کران ضرایب، شعاع ستاره‌گونی و تحدبی به دست آمده است. همچنین نشان می‌دهیم که رده‌ی معرفی شده، یک مجموعه‌ی محدب است و ضرب پیچشی را نیز حفظ می‌کند.

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین مباحث در نظریه‌ی توابع مختلط، فضای توابع تحلیلی است. آن‌ها توابعی هستند که بر روی یک زیرمجموعه‌ی باز از صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شده‌اند و در هر نقطه مشتق مختلط دارند. ویژگی‌های هندسی جالب و کاربردی توابع تحلیلی باعث معرفی توابع تک‌ارز گردید. بحث نظریه‌ی توابع تک‌ارز تقریباً از اوایل قرن بیستم با مطالعات کوبه [1] در این زمینه آغاز شد. توابع تک‌ارز با بسط تیلور

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k,$$

و شرایط نرمالیزه‌ی $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ به افتخار ریاضیدان آلمانی اشلیت [2] را با نماد $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم. در سال ۱۹۱۶ بایبرباخ [3] حدس بسیار مهمی بیان کرد که بر طبق آن ضرایب هر تابع $f \in \mathcal{S}$ در نامساوی $|a_n| \leqslant n$ به ازای $n = 2, 3, \ldots$ صدق می‌کنند و به ازای تابع کوبه $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ حالت تساوی برقرار است، [۲، ۴]. این حدس تا سال‌ها ریاضیدانان را با چالش مواجه کرد تا اینکه در سال ۱۹۸۵ توسط برنگز [4] به اثبات رسید و دریچه‌ی تازه‌ای در نظریه‌ی توابع تک‌ارز گشود، [۳]. کران ضرایب تبدیلات دیفرانسیلی کسری به عنوان ابزاری بسیار نیرومند برای بررسی خواص هندسی کلاس‌های توابع تک‌ارز مورد استفاده قرار می‌گیرند. لذا در این مقاله پس از معرفی کلاس جدیدی از توابع تک‌ارز، ابتدا کران ضرایب را به دست آورده و سپس خواص هندسی آن را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. رده‌ی توابع به فرم زیر

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \qquad (a_k \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \quad n \in \mathbb{N}), \qquad (1.1)$$

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: najafzadeh1234@yahoo.ie (شهرام نجف زاده).

http://doi.org/10.22072/wala.2020.121604.1271

[1] Koebe
[2] Schlit
[3] Bieberbach
[4] Branges

که روی قرص یکه‌ی باز زیر تعریف شده است:

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\},$$

را با نماد $\mathcal{T}(n)$ نمایش می‌دهیم.

تابع میتاگ-لفلر $E_\alpha(z)$ توسط میتاگ-لفلر در مراجع [۷] و [۸] و تابع تعمیم‌یافته‌ی $E_{\alpha,\beta}(z)$ توسط جورنفلو و همکاران در [۶] به صورت زیر معرفی شده‌اند:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha + ۱)}, \tag{۲.۱}$$

و

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (\alpha \geqslant ۰), \tag{۳.۱}$$

که $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $\mathrm{Re}\{\alpha\} > ۰$ و $\mathrm{Re}\{\beta\} > ۰$ و

$$\Gamma(z) = \int_۰^\infty t^{z-۱} e^{-t} dt, \qquad (\mathrm{Re}\, z > ۰),$$

تابع گاما است.

برای توابع $f(z) = z - \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k z^k$ و $g(z) = z - \sum_{k=n+۱}^{\infty} b_k z^k$، متعلق به رده‌ی $\mathcal{T}(n)$، حاصل‌ضرب هادامارد (یا پیچشی) f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * g)(z) = z - \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k b_k z^k = (g * f)(z). \tag{۴.۱}$$

با استفاده از حاصل‌ضرب پیچشی، الحداد و همکاران [۵]، یک تبدیل دیفرانسیلی خطی را به صورت

زیر معرفی کرده‌اند:

$$D_\lambda^m(\alpha,\beta) : \mathcal{T}(n) \to \mathcal{T}(n),$$
$$D_\lambda^\circ(\alpha,\beta)f(z) = f(z) * Q_{\alpha,\beta}(z), \qquad (۵.۱)$$

که در آن

$$Q_{\alpha,\beta}(z) = z\Gamma(\beta)E_{\alpha,\beta}(z), \qquad (۶.۱)$$

و

$$D_\lambda^۱(\alpha,\beta)f(z) = (۱-\lambda)(f(z) * Q_{\alpha,\beta}(z)) + \lambda z(f(z) * Q_{\alpha,\beta}(z))', \qquad (۷.۱)$$

و در حالت کلی

$$D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z) = D_\lambda^۱(\alpha,\beta)(D_\lambda^{m-۱}(\alpha,\beta)f(z)), \qquad (۸.۱)$$

که در آن $m \in \mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$، $\lambda \geqslant \circ$ و نماد «$'$» مشتق مرتبه‌ی اول است.

اگر تابع f به شکل رابطه‌ی (۱.۱) داده شده باشد، آنگاه با استفاده از روابط (۷.۱) و (۸.۱)، ضابطه‌ی $D_\lambda^m(\alpha,\beta)$ را به فرم زیر نتیجه می‌گیریم:

$$D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z) = z - \sum_{k=n+۱}^{\infty} (۱+(k-۱)\lambda)^m \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-۱)+\beta)} a_k z^k. \qquad (۹.۱)$$

این تبدیل، تعمیم‌یافته‌ی تبدیلاتی است که توسط العبودی [۱] و سالاجن [۱۰] تعریف شده‌اند. همچنین مرجع [۱۱] را نیز ملاحظه نمایید.

تعریف ۱.۱. زیر رده‌ای از $\mathcal{T}(n)$ را با نماد $D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$ نشان می‌دهیم و شامل توابعی مانند f است

که در نامساوی زیر صدق کنند:

$$\left|\frac{D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z)+z^{۲}(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))''-z}{۲\gamma(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))'-(۱+\sigma)\gamma}\right|<\delta, \qquad (۱۰.۱)$$

که در آن $۰ \leqslant \delta < ۱$، $۰ \leqslant \sigma < ۱$ و $۰ \leqslant \gamma \leqslant ۱$.

۲. نتایج اصلی

در این بخش، کران ضرایب برای توابع متعلق به زیر رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$ را تعیین کرده و نشان می‌دهیم که این زیر رده، یک مجموعه‌ی محدب است.

قضیه ۱.۲. *فرض کنیم $f \in \mathcal{T}(n)$، در این صورت $f \in D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$ اگر و تنها اگر:*

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty}(۱+(k-۱)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-۱)+\beta)}(۱+k^{۲}+k(۲\gamma\delta-۱))a_k \leqslant \gamma\delta(۱-\sigma). \qquad (۱.۲)$$

اثبات. فرض کنیم نامساوی (۱.۲) برقرار بوده و z متعلق به مرز $\mathbb{U}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{۱}{z}D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z)+z(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))''-۱\right|-\delta\left|۲\gamma(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))'-(۱+\sigma)\gamma\right|\\&=\left|-\sum_{k=n+۱}^{\infty}(۱+k(k-۱))(۱+(k-۱)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-۱)+\beta)}a_kz^{k-۱}\right|\\&-\delta\left|۲\gamma-۲\gamma\sum_{k=n+۱}^{\infty}k(۱+(k-۱)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)a_kz^{k-۱}}{\Gamma(\alpha(k-۱)+\beta)}-(۱+\sigma)\gamma\right|\\&=\sum_{k=n+۱}^{\infty}(۱+(k-۱)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-۱)+\beta)}(۱+k^{۲}+k(۲\gamma\delta-۱))a_k-\gamma\delta(۱-\sigma)\leqslant ۰.\end{aligned}$$

از آنجایی که نامساوی (۱.۲) برقرار است، لذا عبارت فوق، کوچک‌تر یا مساوی صفر خواهد بود. در نتیجه بنابر قضیه‌ی مدول ماکسیمم [۹] داریم $f(z) \in D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$.

برای بررسی اثبات عکس قضیه، فرض کنیم تابع f به فرم (۱.۱) متعلق به رده‌ای $D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$ باشد. در این صورت شرط (۱۰.۱) برقرار است. در نتیجه:

$$\left|\frac{\frac{1}{z}(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))' + z(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))'' - 1}{2\gamma(D_\lambda^m(\alpha,\beta)f(z))' - (1+\sigma)\gamma}\right|$$
$$= \left|\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(1+k(k-1))(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_kz^{k-1}}{2\gamma - \sum_{k=n+1}^{\infty}2\gamma k(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_kz^{k-1} - (1+\sigma)\gamma}\right| < \delta.$$

از آنجایی که به ازای هر $z\in\mathbb{C}$، $|\operatorname{Re} z| < |z|$، در نتیجه:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(1+k(k-1))(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_kz^{k-1}}{\gamma(1-\sigma) - 2\gamma\sum_{k=n+1}^{\infty}k(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_kz^{k-1}}\right\} < \delta.$$

با فرض $z\to 1$ روی محور حقیقی داریم:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(1+k(k-1))(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_k$$
$$\leqslant \gamma\delta(1-\sigma) - 2\gamma\delta\sum_{k=n+1}^{\infty}k(1+(k-1)\lambda)^m\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}a_k,$$

نامساوی فوق، معادل (۱.۲) بوده و در نتیجه، برهان تکمیل می‌شود. □

نکته ۲.۲. نامساوی (۱.۲) به ازای تابع زیر، دقیق است:

$$F(z) = z - \frac{\gamma\delta(1-\sigma)\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}{(1+(k-1)\lambda)^m\Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}z^k. \qquad (۲.۲)$$

همچنین، اگر $f(z) \in D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$، آنگاه ضرایب f در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$a_k \leqslant \frac{\gamma\delta(1-\sigma)\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}, \qquad (k \geqslant n+1). \tag{3.2}$$

خاصیت تحدبی $D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$ در قضیه‌ی زیر، نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۱.۲ است. بنابراین از برهان آن صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۳.۲. *فرض کنیم به ازای $j = 1, 2, \ldots, t$، توابع $f_j(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k,j} z^k$ متعلق به رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$ باشند. در این صورت تابع $h(z) = \sum_{j=1}^{t} d_j f_j(z)$ نیز متعلق به همین رده است به طوری که در آن $d_j \geqslant 0$ و $\sum_{j=1}^{t} d_j = 1$. (به عبارت دیگر، $D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$، یک مجموعه‌ی محدب است.)*

۳. ساختارهای شعاعی و ضرب پیچشی

در این بخش، ابتدا تعبیر هندسی شعاع‌های ستاره‌گونی و تحدبی را ارائه کرده، سپس برای رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$ این شعاع‌ها و شعاع نزدیک به محدبی را به دست می‌آوریم. در ضمن نشان می‌دهیم که رده‌ی فوق، تحت محدودیت‌هایی روی پارامترها، نسبت به ضرب پیچشی بسته است. مجموعه‌ی $E \subset \mathbb{C}$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون گوییم، هرگاه پاره‌خط واصل هر نقطه‌ی E و مبدأ تماماً داخل E قرار گیرد. در صورتیکه E نسبت به هر نقطه‌اش ستاره‌گون باشد، آن را محدب گوییم. به عبارت دیگر، پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی E را بهم وصل کند، تماماً داخل E باشد. اما کوچک‌ترین شعاع $0 < \rho < 1$ که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ρ تحت تابع f به یک مجموعه‌ی ستاره‌گون (محدب) نگاشته شود را شعاع ستاره‌گونی (محدبی) می‌نامیم. بنابراین، شعاع‌های ستاره‌گونی و محدبی خواص هندسی تصویر f را مشخص می‌کنند. از طرفی، تابع تحلیلی f در دیسک واحد را نزدیک به محدب گوییم، هرگاه تابع محدبی مانند g موجود باشد به طوری که:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0, \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

قضیه ۱.۳. *اگر دو تابع f و g در زیر*

$$f(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k,\qquad g(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k,$$

متعلق به رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma,\sigma,\delta)$ باشند، آنگاه $(f*g)(z)$ متعلق به رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma,\sigma^*,\delta)$ است، به طوری که:

$$(f*g)(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kb_kz^k=(g*f)(z), \tag{۱.۳}$$

و

$$\sigma^*\leqslant 1-\frac{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)^2}{(1+(k-1)\lambda)^m\Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))},\qquad (k\geqslant n+1). \tag{۲.۳}$$

اثبات. طبق قضیه‌ی ۱.۲، کافی است که نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m\Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma^*)}a_kb_k\leqslant 1.$$

با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و رابطه‌ی (۱.۲) داریم:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m\Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)}\sqrt{a_kb_k}\leqslant 1.$$

بنابراین، بایستی بزرگ‌ترین مقدار σ^* را به دست بیاوریم به طوری که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m\Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma^*)}a_kb_k$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)} \sqrt{a_k b_k},$$

یا به طور معادل:

$$\sqrt{a_k b_k} \leqslant \frac{1-\sigma^*}{1-\sigma}, \qquad (k \geqslant n+1).$$

نامساوی بالا زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)}{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))} \leqslant \frac{1-\sigma^*}{1-\sigma},$$

یا به طور معادل:

$$\sigma^* \leqslant 1 - \frac{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)^2}{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))},$$

که دقیقاً نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. □

با بکار بردن روش مشابه برهان قضیه‌ی ۱.۳، قضیه‌ی زیر را بدون برهان ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۳. *با مفروضات قضیه‌ی ۱.۳، $(f*g)(z)$ متعلق به رده‌ی $D_\lambda^m(\gamma^*, \sigma, \delta)$ است به طوری که:*

$$\gamma^* \leqslant \frac{k^2-k+1}{\frac{\Gamma\left(\alpha(k-1)+\beta\right)\gamma^2\delta(1-\sigma)}{\left(1+(k-1)\lambda\right)^m \Gamma(\beta)\left(1+k^2+k(2\gamma\delta-1)\right)^2} - 2k\delta}, \qquad (k \geqslant n+1).$$

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم $f(z) \in D_\lambda^m(\gamma, \sigma, \delta)$، در این صورت:*

الف) $f(z)$ روی قرص $|z| < R_1$، ستاره‌گون از مرتبه‌ی θ_1 $(0 \leqslant \theta_1 < 1)$ است به طوری که:

$$R_1 = \inf_k \left[\frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))(1-\theta_1)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)(k-\theta_1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (k \geqslant n+1).$$

ب) $f(z)$ روی قرص $|z| < R_2$، محدب از مرتبه‌ی θ_2 $(0 \leqslant \theta_1 < 1)$ است، به طوری که:

$$R_2 = \inf_k \left[\frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))(1-\theta_2)}{k(k-\theta_2)\gamma\delta(1-\sigma)\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}\right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (k \geqslant n+1).$$

ج) $f(z)$ روی قرص $|z| < R_3$، نزدیک به محدب از مرتبه‌ی θ_3 $(0 \leqslant \theta_3 < 1)$ است، به طوری که:

$$R_3 = \inf_k \left[\frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))(1-\theta_3)}{k\gamma\delta(1-\sigma)\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}\right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (k \geqslant n+1).$$

اثبات.

الف) به ازای هر $0 \leqslant \theta_1 < 1$ کافی است نشان دهیم که:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - \right| < 1 - \theta_1.$$

به عبارت دیگر، باید نشان دهیم که:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)a_k z^{k-1}}{1-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k z^{k-1}}\right| \leqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)a_k |z|^{k-1}}{1-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k |z|^{k-1}} < 1-\theta,$$

یا به طور معادل:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{k-\theta_1}{1-\theta_1}\Big)a_k|z|^{k-1} < 1.$$

بنابر روابط (۱.۲) و (۲.۲) به آسانی ملاحظه می‌شود که نامساوی فوق، زمانی برقرار است که

داشته باشیم:

$$|z|^{k-1} < \frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))(1-\theta_1)}{\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)\gamma\delta(1-\sigma)(k-\theta_1)}$$

نامساوی بالا، برهان قسمت (الف) را کامل می‌کند.

ب) از آنجایی که « f محدب است، اگر و تنها اگر zf' ستاره‌گون باشد » قسمت (ب) به سادگی از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

ج) باید نشان دهیم که به ازای $|z| < R_3$، $|f'(z)-1| \leqslant 1-\theta_3$. اما داریم:

$$|f'(z)-1| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right| \leqslant k a_k |z|^{k-1}.$$

بنابراین، نامساوی $|f'(z)-1| < 1-\theta_3$ زمانی برقرار است که:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{1-\theta_3} a_k |z|^{k-1} \leqslant 1.$$

بنابر روابط (۱.۲) و (۲.۲)، نامساوی اخیر زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$|z|^{k-1} \leqslant \frac{(1+(k-1)\lambda)^m \Gamma(\beta)(1+k^2+k(2\gamma\delta-1))(1-\theta_3)}{k\gamma\delta(1-\sigma)\Gamma(\alpha(k-1)+\beta)}.$$

نامساوی بالا، حکم قسمت (ج) را کامل می‌کند.

□

مراجع

[1] F.M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2004**(27) (2004), 1429–1436.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer-Verlog, New York, 1978.

[3] L. Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154**(1-2) (1985), 137–152.

[4] P.L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren Math. Wiss., New York, Springer-verlag, 1983.

[5] S. Elhaddad, H. Aldweby and M. Darus, Neighborhoods of certain classes of analytic functions defined by a generalized differential operator involving Mittag-Leffler function, *J. Math. Anal. Appl.*, **55** (2018) 1–10.

[6] R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi and S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, volume 2, Springer, 2014.

[7] M.G. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **137**(2) (1903), 554–558.

[8] M.G. Mittag-Leffler, Sur la representation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogene, *Acta Math.*, **29**(1) (1905), 101–181.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-hill Education, 3 edition, Series in Higher Math, 1987.

[10] G.S. Salagean, Subclasses of univalent functions, Complex analysis-fifth Romanian-Finnish seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), *Lect. Notes Math.*, **1013** (1983), 367–372.

[11] H. Srivastava, B. Frasin and V. Pescar, Univalence of integral operators involving Mittag-Leffler functions, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **11**(3) (2017), 635–641.