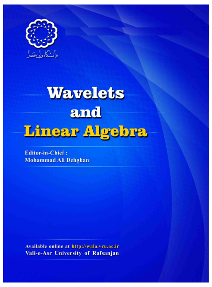
موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۷۲-۱۵۳



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

مشخص سازی و پایداری p-قاب های درهم تنیده شده در فضاهای باناخ

سمیه هاشمی صنعتی[آ]، محمدصادق عسگری[*ب]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران*

[ب] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۵ دی ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۱۴ فروردین ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: اصغر رحیمی

کلمات کلیدی:
p-قاب درهم تنیده شده،
p-پایه ریس درهم تنیده شده، آشفتگی ها.

چکیده

در این مقاله، قصد داریم خواص کاربردی مربوط به در هم تنیدن p-قاب ها را از دیدگاه آنالیز تابعی ثابت کنیم. برای این منظور ابتدا، پایداری p-قاب های درهم تنیده شده باناخ را تحت آشفتگی های کوچک ثابت می کنیم. نتایج آشفتگی کلاسیک مربوط به پایه ها باعث شد که آشفتگی p-قاب های درهم تنیده شده باناخ را بررسی کنیم و شرایط جدید و ضعیف تری را که پایداری مورد نظر را تضمین می کند ارائه دهیم. در ادامه، روشهایی برای شناسایی و ساخت p-قاب های درهم تنیده شده ارائه خواهیم داد. برای این منظور، شرایطی را که تحت آن یک p-قاب و یک خانواده متناهی از عملگرها تشکیل یک p-قاب درهم تنیده شده بدهند را ارائه کرده ایم.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۹۱، گروچینگ[۱] در [۶] و در سال ۲۰۰۱، الدورابی [۲] و همکارانش در [۱] شروع به مطالعه نظریه قاب ها برای فضاهای باناخ کردند. آن ها دو نوع مفهوم قاب را برای فضاهای باناخ معرفی کردند، قاب های باناخ و p-قاب ها. گروچینگ، مفهوم قاب ها را از فضای هیلبرت به فضای باناخ گسترش داد و آن ها را تجزیه اتمی نامید. او همچنین، مفهوم کلی تری را برای فضای باناخ تعریف کرد و آن را قاب باناخ نامید. نتایج اصلی الدورابی و همکارانش مربوط به p-قاب ها و گسترش سری ها در زیر فضاهای تحت انتقال پایا در $L^p(\mathbb{R})$ می باشند. هر دو مفهوم تجزیه اتمی و قاب باناخ نقاط مشترک زیادی دارند و در بسیاری از موقعیت ها با هم معادل هستند. برای اطلاعات بیشتر در باره نظریه p-قاب ها مراجع [۵، ۸] را ببینید.

فرض کنید X یک فضای باناخ جدایی پذیر با دوگان X^* باشد. اگر I یک مجموعه شمارش پذیر باشد، در این صورت خانواده $\{f_i\}_{i\in I} \subset X^*$ یک p-قاب $(۱ < p < \infty)$ برای X نامیده می شود، اگر ثابت های مثبت $۰ < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$A\|x\| \leq \Big(\sum_{i\in I} |f_i(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq B\|x\|.$$

ثابت های A و B به ترتیب، کران های پایین و بالای p-قاب نامیده می شوند. اگر عملگر بازسازی کننده $S : \ell^p \to X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $S(\{f_i(x)\}_{i\in I}) = x$ که در آن $\ell^p = \ell^p(I)$ فضای همه دنباله های اسکالر- مقدار است که روی مجموعه شمارش پذیر I، p-جمع پذیر هستند، آنگاه زوج $(\{f_i\}_{i\in I}, S)$ را یک p-قاب باناخ برای X نسبت به ℓ^p می گویند. همچنین دنباله

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: shashemi61@yahoo.com (سمیه هاشمی صنعتی)، msasgari@yahoo.com (محمدصادق عسگری).
http://doi.org/10.22072/wala.2020.119644.1264

[1] Gröcheing
[2] Aldroubi

$\{f_i\}_{i\in I}$ را یک دنباله p-بسل برای X با کران B می گویند، اگر در نامساوی فوق کران بالای p-قاب برای هر $x \in X$ برقرار باشد. با توجه به مرجع [۸]، قضیه ۱.۳]، اگر X دارای یک p-قاب باشد آنگاه X انعکاسی است.

برای هر دنباله p-بسل $\{f_i\}_{i\in I} \subset X^*$، عملگرهای U و T به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U : X \longrightarrow \ell^p, \quad U(x) = \{f_i(x)\}_{i\in I}, \qquad T : \ell^q \longrightarrow X^*, \quad T(\{c_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

که در آن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و عملگر U را عملگر تجزیه و T را عملگر ترکیب می نامند. به وضوح، U یک عملگر کران دار است. همچنین $\{f_i\}_{i\in I}$ یک p-قاب برای X است اگر و تنها اگر X یک فضای باناخ انعکاسی باشد و T یک نگاشت خوش تعریف باشد در این حالت $U^* = T$، مرجع [۸] را ببینید.

در طی سالیان گذشته، برخی از تعمیم های پایه ریس به فضاهای باناخ انجام شده است. پایه های p-ریس برای زیر فضاهای تحت انتقال پایا در $L^p(\mathbb{R})$ در [۱]، مورد بررسی قرار گرفته اند.

تعریف ۱.۱. یک دنباله $\{h_i\}_{i\in I} \subset X$ یک پایه p-ریس $(1 < p < \infty)$ برای X نامیده می شود، اگر $\overline{\text{span}}\{h_i\}_{i\in I} = X$ و ثابت ها ی $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $c \in \ell^p$ داشته باشیم:

$$A\Big(\sum_{i\in I} |c_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\|\sum_{i\in I} c_i h_i\Big\|_X \leq B\Big(\sum_{i\in I} |c_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

اعداد A و B به ترتیب، کران های پایین و بالای پایه p-ریس نامیده می شود. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ یک دنباله p-ریس در X نامیده می شود، اگر آن یک پایه p-ریس برای فضای خطی بسته تولید شده به وسیله آن باشد.

اخیرا، بمروس [۳] و همکارانش در [۲]، مفهوم قاب های درهم تنیده شده فضای هیلبرت را به دلیل برخی مسائل جدید برخواسته در پردازش سیگنال توزیع شده و شبکه های حسگر بی سیم معرفی کردند. یک کاربرد بالقوه قاب های درهم تنیده شده این است که آن ها با شبکه های حسگر بی سیم سر و کار

[3] Bemrose

دارند که ممکن است تحت تاثیر قاب های مختلف در معرض پردازش توزیع شده قرار بگیرند. کاسازا [۴] و لینچ [۵] خاصیت های اصلی قاب های درهم تنیده شده را در [۳] بیان کردند. سپس، کاسازا، فریمن [۶] و لینچ در [۴] مفهوم قاب های درهم تنیده شده فضای هیلبرت را به فضای باناخ توسعه دادند. قاب های درهم تنیده شده بیشتر در مراجع [۷، ۹، ۱۰] بررسی شده است. در این زیر بخش، به معرفی کوتاهی در باره p-قاب های درهم تنیده شده می پردازیم و مثال هایی برای آن ارائه می دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}: \ j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X باشد. در این صورت خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}: \ j\in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X نامیده می شود هرگاه ثابت های $0<A\leq B<\infty$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر افراز $\sigma=\{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I، خانواده $\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ یک p-قاب برای X با کران های p-قاب A و B باشد. در این حالت هر خانواده $\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ یک p-قاب درهم تنیده برای X نامیده می شود و ثابت های A و B به ترتیب کران های p-قاب درهم تنیده شده برای X نامیده می شوند. اگر هر دنباله درهم تنیده یک دنباله p-بسل باشد، در این صورت این خانواده را دنباله p-بسل درهم تنیده شده برای X می نامند. یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}: \ j\in J\}$ برای X را به طور ضعیف درهم تنیده شده می گویند هرگاه هر دنباله درهم تنیده متناظر با یک افراز از I یک p-قاب برای X باشد.

مثال ۳.۱. فرض کنید $\{g_i\}_{i\in I}\subseteq X^*$ یک p-قاب برای X با کران های p-قاب C و D باشد و فرض کنید $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ یک دنباله کران دار باشد به طوری که $0<A\leq\inf_{i\in I}|\lambda_i|\leq\sup_{i\in I}|\lambda_i|\leq B<\infty$. فرض کنید J یک زیر مجموعه متناهی $\mathbb{N}$ باشد. برای هر $j\in J$، $i\in I$ قرار دهید $f_{ij}=j\lambda_i g_i$. در این صورت $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}: \ j\in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X است. در واقع برای هر افراز

---

[4] Casazza

[5] Lynch

[6] Freeman

$\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I داریم

$$\begin{aligned}(\min J)^p A^p C^p \|x\|^p &\leq (\min J)^p \sum_{i\in I} |\lambda_i g_i(x)|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{k\in\sigma_j} |j\lambda_k g_k(x)|^p \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{k\in\sigma_j} |f_{kj}(x)|^p \leq (\max J)^p \sum_{j\in J}\sum_{k\in\sigma_j} |\lambda_k g_k(x)|^p \\ &= (\max J)^p \sum_{i\in I} |\lambda_i g_i(x)|^p \leq (\max J)^p B^p D^p \|x\|^p.\end{aligned}$$

بنابراین دنباله $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : \quad j\in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X به ترتیب، با کران های p-قاب درهم تنیده شده پایین و بالای $(\min J)AC$ و $(\max J)BD$ است.

اثبات گزاره زیر آسان است آن را به خواننده واگذار می کنیم.

گزاره ۴.۱. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : \ j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X با کران های بسل B_j باشد. در این صورت $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : \quad j\in J\}$ یک دنباله p-بسل درهم تنیده شده با کران p-بسل درهم تنیده شده $\sum_{j\in J} B_j$ است.*

تعریف ۵.۱. یک p-قاب درهم تنیده شده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : \quad j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X نامیده می شود، اگر برای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I، عملگر بازسازی کننده $S_\sigma : \ell^p \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $(\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}\}_{i\in\sigma_j}, S_\sigma)$ یک p-قاب باناخ برای X نسبت به ℓ^p باشد.

فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : \quad j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد. در این صورت برای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I اعداد

$$۰ < \|S_\sigma\|^{-۱} \leq \|U_\sigma\| < \infty$$

کران های بهینه p-قاب برای p-قاب باناخ $(\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}\}_{i\in\sigma_j}, S_\sigma)$ هستند. بنابراین A و B در نابرابری $A \leq \|S_\sigma\|^{-۱} \leq \|U_\sigma\| \leq B$ صدق می کند.

گزاره زیر، یک ویژگی معادل از p-قاب های درهم تنیده شده ضعیف را در ارتباط با عملگر ترکیب p-قاب های درهم تنیده بیان می کند. این نتیجه ای از مرجع [۵، قضیه ۴.۲] است.

گزاره ۶.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی باشد و $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}\ :\ \ j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X باشد. در این صورت، $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}\ :\ \ j\in J\}$، یک p-قاب درهم تنیده شده ضعیف برای X است اگر و تنها اگر برای هر افراز $\sigma=\{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I، عملگر ترکیب*

$$T_\sigma : \ell^q \longrightarrow X^*, \quad T_\sigma(\{d_i\}_{i\in I}) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} d_i f_{ij}$$

یک نگاشت خوش تعریف از ℓ^q به توی X^* باشد.

تعریف ۷.۱. یک خانواده متناهی از دنباله های p-ریس $\{\{h_{ij}\}_{i\in I}\subseteq X\ :\ \ j\in J\}$ برای X یک پایه p-ریس درهم تنیده شده برای X نامیده می شود، اگر ثابت های $0<A\leq B<\infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر افراز $\sigma=\{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I، خانواده $\bigcup_{j\in J}\{h_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ یک پایه p-ریس برای X به ترتیب، با کران های پایه p-ریس پایین و بالای A و B باشد. در این حالت، هر خانواده $\bigcup_{j\in J}\{h_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ یک پایه p-ریس درهم تنیده برای X نامیده می شود.

مثال ۸.۱. فرض کنید $\{h_i\}_{i\in I}\subset X$ یک پایه p-ریس برای X به ترتیب، با کران های p-ریس C و D باشد. فرض کنید $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ یک دنباله کران دار باشد به طوری که $0<A<\inf_{i\in I}|\lambda_i|\leq\sup_{i\in I}|\lambda_i|<B<\infty$. فرض کنید J یک زیر مجموعه متناهی $\mathbb{N}$ باشد. برای هر $j\in J$، $i\in I$ قرار دهید $h_{ij}=j\lambda_i h_i$. در این صورت با یک استدلال مشابه مثال ۳.۱ می توان نشان داد که خانواده $\{\{h_{ij}\}_{i\in I}\ :\ \ j\in J\}$ یک پایه p-ریس درهم تنیده شده برای X به ترتیب با کران های پایین و بالای p-ریس در هم تنیده شده $(\min J)AC$ و $(\max J)BD$ است.

سازمان دهی مطالب این مقاله به شکل زیر است: در بخش ۲، پایداری p-قاب های درهم تنیده شده و مفاهیم مرتبط p-قاب های درهم تنیده شده را تحت آشفتگی های کوچک مطالعه می کنیم. نتایج آشفتگی کلاسیک مربوط به پایه ها باعث شد که آشفتگی p-قاب های درهم تنیده شده باناخ را بررسی کنیم و شرایط جدید و ضعیف‌تری را که پایداری مورد نظر را تضمین می کند معرفی کنیم. در بخش ۳، ابتدا برخی از خاصیت های جدید p-قاب های درهم تنیده شده را ثابت می کنیم و شرایط کافی ارائه می کنیم که تحت آن یک p-قاب و یک خانواده متناهی از عملگر ها تشکیل یک p-قاب درهم تنیده شده بدهند.

۲. p-قاب های باناخ درهم تنیده شده و آشفتگی ها

در این بخش، پایداری p-قاب های باناخ درهم تنیده شده را تحت آشفتگی های کوچک مورد بررسی قرار می دهیم. قضیه زیر، یک شرط کافی برای آشفتگی یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده را با استفاده از یک دنباله اسکالر-مقدار کران دار را بیان می کند.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد و فرض کنید $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X با کران های بسل B_j باشد. فرض کنید $\{\lambda_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ یک دنباله کران دار باشد به طوری که $\sup_{i\in I, j\in J} |\lambda_{ij}| \leq D$. اگر $D < \frac{A}{2\sum_{j\in J} B_j}$، آنگاه خانواده $\{\{f_{ij} + \lambda_{ij}g_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب درهم تنیده شده $(A - D\sum_{j\in J} B_j)$ و $(B + D\sum_{j\in J} B_j)$است.*

اثبات. به ازای هر افراز σ از I، فرض کنید V_σ و W_σ به ترتیب عملگرهای تجزیه مرتبط با $\bigcup_{j\in J}\{g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ و $\bigcup_{j\in J}\{f_{ij} + \lambda_{ij}g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ باشند. در این صورت برای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}\|W_\sigma(x)\|_{\ell^p} &= \left\|U_\sigma(x) + \cup_{j\in J}\{\lambda_{ij}g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}\right\|_{\ell^p} \leq (\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} + D\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p})\\ &\leq (B + D\sum_{j\in J} B_j)\|x\|.\end{aligned}$$

بنابراین، یک کران بالای p-قاب درهم تنیده شده به دست می آید. برای کران پایین p-قاب درهم تنیده شده داریم:

$$\begin{aligned}\|W_\sigma(x)\|_{\ell^p} &= \left\|U_\sigma(x) + \cup_{j\in J}\{\lambda_{ij}g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}\right\|_{\ell^p} \geq \|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} - D\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\\ &\geq (A - D\sum_{j\in J} B_j)\|x\|.\end{aligned}$$

بنابراین، کران پایین p-قاب درهم تنیده شده نیز به دست می آید. همچنین بنا به فرض داریم $S_\sigma U_\sigma =$

Id_X و $\|U_\sigma - W_\sigma\| \leq D\sum_{j\in J} B_j$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\|Id_X - S_\sigma W_\sigma\| \leq \|S_\sigma\|\|U_\sigma - W_\sigma\| \leq \|S_\sigma\| D\sum_{j\in J} B_j \leq \frac{1}{2} A\|S_\sigma\| < 1$$

در نتیجه $S_\sigma W_\sigma$ وارون پذیر است. حال اگر قرار دهیم $S'_\sigma = (S_\sigma W_\sigma)^{-1} S_\sigma$ آنگاه $S'_\sigma W_\sigma = Id_X$. این نشان می دهد که $(\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}+\lambda_{ij}g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}, S'_\sigma)$ یک p-قاب باناخ برای X است. بنابراین، اثبات کامل می شود. □

حکم زیر یک نتیجه مستقیم از قضیه ۱.۲ است که یک شرط کافی برای پایداری یک p-قاب درهم تنیده شده برای X را تحت آشفتگی های کوچک بیان می کند.

نتیجه ۲.۲. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد و فرض کنید $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X با کران های بسل B_j باشد. در این صورت، برای هر ثابت $\lambda\in\mathbb{R}$ با شرط $0 < |\lambda| < \frac{A}{2\sum_{j\in J} B_j}$، خانواده $\{\{f_{ij}+\lambda g_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب درهم تنیده شده $(A - |\lambda|\sum_{j\in J} B_j)$ و $(B + |\lambda|\sum_{j\in J} B_j)$ می باشد.*

اثبات. اگر به ازای هر $i\in I$ و $j\in J$ قرار دهیم $\lambda_{ij} = \lambda$ آنگاه شرایط قضیه ۱.۲ برقرار است. □

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد و فرض کنید $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X باشد و ثابت های $\lambda\geq 0$ و $\mu\geq 0$ موجود باشند به طوری که به ازای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I و $x\in X$*

(۱) $2(\lambda\|U_\sigma\| + \mu)\|S_\sigma\| < \frac{A}{B}$

(۲) $\left\|\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}(x) - g_{ij}(x)\}_{i\in\sigma_j}\right\|_{\ell^p} \leq \lambda\left\|\bigcup_{j\in J}\{f_{ij}(x)\}_{i\in\sigma_j}\right\|_{\ell^p} + \mu\|x\|$

در این صورت خانواده $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j\in J\}$ یک p-قاب باناخ در هم تنیده شده برای X با کران های p-قاب درهم تنیده شده $\frac{(2B-A)(\lambda A+\mu)}{A}$ و $(1+\lambda)B+\mu$ است.

اثبات. فرض کنید V_σ عملگر تجزیه مرتبط با $\bigcup_{j\in J}\{g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ متناظر افراز σ از I باشد. در این صورت بنا به فرض به ازای هر $x\in X$ داریم

$$\|U_\sigma(x)-V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\leq \lambda\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p}+\mu\|x\|$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\leq[(۱+\lambda)\|U_\sigma\|+\mu]\|x\|\leq[(۱+\lambda)B+\mu]\|x\|.$$

بنابراین کران بالای p-قاب درهم تنیده شده به دست می آید. برای کران پایین p-قاب درهم تنیده شده چون $S_\sigma U_\sigma=Id_X$ در نتیجه داریم

$$\|Id_X-S_\sigma V_\sigma\|\leq\|S_\sigma\|\|U_\sigma-V_\sigma\|\leq(\lambda\|U_\sigma\|+\mu)\|S_\sigma\|<\frac{A}{۲B}<۱.$$

این نتیجه می دهد که $S_\sigma V_\sigma$ وارون پذیر است و $\|(S_\sigma V_\sigma)^{-۱}\|\leq\frac{۱}{۱-(\lambda\|U_\sigma\|+\mu)\|S_\sigma\|}$. اکنون اگر قرار دهیم $S'_\sigma=(S_\sigma V_\sigma)^{-۱}S_\sigma$ آنگاه داریم $S'_\sigma V_\sigma=Id_X$ و

$$\|x\|\leq\|S'_\sigma\|\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\leq\frac{\|S_\sigma\|}{۱-(\lambda\|U_\sigma\|+\mu)\|S_\sigma\|}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\geq\frac{۱-(\lambda\|U_\sigma\|+\mu)\|S_\sigma\|}{\|S_\sigma\|}\|x\|\geq\frac{(۲B-A)(\lambda A+\mu)}{A}\|x\|.$$

این نشان می دهد که $(\bigcup_{j\in J}\{g_{ij}\}_{i\in\sigma_j},S'_\sigma)$ یک p-قاب باناخ برای X است. در نتیجه، اثبات کامل می شود. □

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I}:j\in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد و فرض کنید $\{\{g_{ij}\}_{i\in I}:j\in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله*

های p-بسل برای X باشد. فرض کنید V_σ عملگر تجزیه مرتبط با $\bigcup_{j\in J}\{g_{ij}\}_{i\in\sigma_j}$ متناظر افراز σ از I باشد. اگر ثابت های $\lambda,\mu,\nu \geq ۰$ موجود باشند به طوری‌که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

(۱) $(\|U_\sigma\| + \|V_\sigma\| + ۱)\sqrt{\max\{\lambda,\mu,\nu\}} < \|S_\sigma\|^{-۱}$

(۲) $\|U_\sigma(x) - V_\sigma(x)\|^۲_{\ell^p} \leq \lambda\|U_\sigma(x)\|^۲_{\ell^p} + ۲\mu\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} + \nu\|V_\sigma(x)\|^۲_{\ell^p}$

آنگاه $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب باناخ درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب درهم تنیده شده $\frac{(\sqrt{\eta}-\eta)(۱+A)}{۱+\sqrt{\eta}}$ و $\frac{(۱+\sqrt{\eta})B}{(۱-\sqrt{\eta})}$ است که در آن $\eta = \max\{\lambda,\mu,\nu\}$.

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $x \in X$ مفروض باشند در این صورت از رابطه (۲) نتیجه می شود

$$\|U_\sigma(x) - V_\sigma(x)\|_{\ell^p} \leq \sqrt{\eta}(\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} + \|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}).$$

اکنون بنا به فرض داریم

$$\begin{aligned}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} &\leq \|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} + \|U_\sigma(x) - V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\\ &\leq (۱ + \sqrt{\eta})\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} + \sqrt{\eta}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}.\end{aligned}$$

این نتیجه می دهد

$$(۱ - \sqrt{\eta})\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} \leq (۱ + \sqrt{\eta})\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} \leq (۱ + \sqrt{\eta})\|U_\sigma\|\|x\|.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} \leq \frac{(۱ + \sqrt{\eta})\|U_\sigma\|}{(۱ - \sqrt{\eta})}\|x\| \leq \frac{(۱ + \sqrt{\eta})B}{(۱ - \sqrt{\eta})}\|x\|$$

در نتیجه کران بالای p-قاب درهم تنیده شده به دست می آید. برای کران پایین p-قاب درهم تنیده شده

بنا به فرض داریم $S_\sigma U_\sigma = Id_X$ در نتیجه

$$\|x\| = \|S_\sigma U_\sigma(x)\| \leq \|S_\sigma\| \|U_\sigma(x)\|_{\ell^p}$$

بنابراین به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} &\geq \|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} - \|U_\sigma(x) - V_\sigma(x)\|_{\ell^p}\\ &\geq (۱ - \sqrt{\eta})\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} - \sqrt{\eta}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p}.\end{aligned}$$

این نتیجه می دهد

$$(۱ + \sqrt{\eta})\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} \geq (۱ - \sqrt{\eta})\|U_\sigma(x)\|_{\ell^p} \geq (۱ - \sqrt{\eta})\|S_\sigma\|^{-۱}\|x\|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|V_\sigma(x)\|_{\ell^p} &\geq \frac{(۱ - \sqrt{\eta})\|S_\sigma\|^{-۱}}{۱ + \sqrt{\eta}}\|x\| \geq \frac{(\sqrt{\eta} - \eta)(۱ + \|U_\sigma\|)}{۱ + \sqrt{\eta}}\|x\|\\ &\geq \frac{(\sqrt{\eta} - \eta)(۱ + A)}{۱ + \sqrt{\eta}}\|x\|.\end{aligned}$$

اکنون از $S_\sigma U_\sigma = Id_X$ و $\|Id_X - S_\sigma V_\sigma\| < ۱$ نتیجه می شود $S_\sigma V_\sigma$ وارون پذیر است. اگر قرار دهیم $S'_\sigma = (S_\sigma V_\sigma)^{-۱} S_\sigma$ آنگاه داریم $S'_\sigma V_\sigma = Id_X$. این اثبات را کامل می کند. □

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد و فرض کنید $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X باشد. فرض کنید ثابت های $\eta \geq ۰$ و $۰ < \lambda, \mu < \frac{۱}{۲p}$ موجود باشند به طوری که برای هر افراز*

$\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I و $x \in X$ داشته باشیم

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x) - g_{ij}(x)|^p \leq \lambda \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p + \mu \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p + \eta\|x\|^p.$$

در این صورت خانواده $\{\{g_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب درهم تنیده شده $\frac{۱}{۲}(\frac{(۱-۲^p\lambda)A^p-۲^p\eta}{۱+\mu})^{\frac{۱}{p}}$ و $۲(\frac{(۱+\lambda)B^p+\eta}{۱-۲^p\mu})^{\frac{۱}{p}}$ است.

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $x \in X$ مفروض باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x) - f_{ij}(x) + f_{ij}(x)|^p\\ &\leq ۲^p \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p + ۲^p \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x) - f_{ij}(x)|^p\\ &\leq ۲^p(۱ + \lambda) \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p + ۲^p\mu \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p + ۲^p\eta\|x\|^p.\end{aligned}$$

این نتیجه می دهد

$$\begin{aligned}(۱ - ۲^p\mu) \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p &\leq ۲^p(۱ + \lambda) \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p + ۲^p\eta\|x\|^p\\ &\leq ۲^p[(۱ + \lambda)B^p + \eta]\|x\|^p.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p \leq \frac{۲^p[(۱ + \lambda)B^p + \eta]}{۱ - ۲^p\mu}\|x\|^p.$$

حال برای اثبات کران پایین p-قاب درهم تنیده شده داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)-g_{ij}(x)+g_{ij}(x)|^p\\ &\leq ۲^p\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)-g_{ij}(x)|^p+۲^p\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p.\end{aligned}$$

این نتیجه می دهد

$$\begin{aligned}۲^p\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p &\geq \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p-۲^p\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)-g_{ij}(x)|^p\\ &\geq (۱-۲^p\lambda)\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p-۲^p\mu\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p-۲^p\eta\|x\|^p.\end{aligned}$$

این روابط نتیجه می دهند

$$\begin{aligned}۲^p(۱+\mu)\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p &\geq (۱-۲^p\lambda)\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p-۲^p\eta\|x\|^p\\ &\geq [(۱-۲^p\lambda)A^p-۲^p\eta]\|x\|^p.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|g_{ij}(x)|^p\geq\frac{[(۱-۲^p\lambda)A^p-۲^p\eta]}{۲^p(۱+\mu)}\|x\|^p.$$

□

۳. مشخصه سازی p-قاب های درهم تنیده شده

در این بخش، یک ویژگی مهم از p-قاب های درهم تنیده شده را تحت مشخصه سازی عملگرها مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین برای ساخت p-قاب های درهم تنیده شده نتایجی را ارائه می دهیم. به

علاوه، شرایط کافی را که تحت آن یک p-قاب و یک خانواده متناهی از عملگرها تشکیل یک p-قاب درهم تنیده شده بدهند را بیان می کنیم. اولین نتیجه نشان می دهد که با اضافه کردن عناصر به یک p-قاب درهم تنیده شده دنباله جدید همچنان یک p-قاب درهم تنیده شده برای X خواهد بود.

گزاره ۱.۳. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-بسل برای X باشد. فرض کنید $\Lambda \subset I$، به طوری که خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in\Lambda} : j \in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X باشد. در این صورت خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ نیز یک p-قاب درهم تنیده شده برای X است.*

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I باشد. در این صورت خانواده $\{\sigma_j \cap \Lambda \neq \emptyset\}_{j\in J}$ یک افراز Λ است. فرض کنید که A کران پایین p-قاب درهم تنیده شده $\{\{f_{ij}\}_{i\in\Lambda} : j \in J\}$ باشد، در این صورت برای هر $x \in X$ داریم

$$A^p\|x\|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j\cap\Lambda\neq\emptyset}|f_{ij}(x)|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p$$

شرط کران بالا از گزاره ۴.۱ نتیجه می شود. بنابراین، خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب در هم تنیده شده برای X است. $\square$

گزاره زیر شرایطی را ارائه می دهد که تحت آن با حذف برخی عناصر از یک p-قاب درهم تنیده شده مجددا یک p-قاب درهم تنیده شده به دست می آید.

گزاره ۲.۳. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده برای X با کران های p-قاب در هم تنیده شده A و B باشد. فرض کنید $\Lambda \subset I$، به طوری که خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in\Lambda} : j \in J\}$ یک دنباله p-بسل درهم تنیده شده برای X با کران p-بسل درهم تنیده شده با شرط $A > D > 0$ باشد. در این صورت خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I-\Lambda} : j \in J\}$ نیز یک p-قاب درهم تنیده شده برای X، به ترتیب، با کران های p-قاب درهم تنیده شده $\sqrt[p]{A^p - D^p}$ و B است.*

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از $I - \Lambda$ باشد و $\omega = \{\omega_j\}_{j\in J}$ یک افراز از Λ

باشد. در این صورت $\{\sigma_j \cup \omega_j\}_{j\in J}$ یک افراز از I است و برای هر $j \in J$ و $x \in X$ داریم

$$\begin{aligned}(A^p - D^p)\|x\|^p &\leq \sum_{j\in J} \sum_{i\in\sigma_j\cup\omega_j} |f_{ij}(x)|^p - \sum_{j\in J}\sum_{i\in\omega_j} |f_{ij}(x)|^p \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} |f_{ij}(x)|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j\cup\omega_j} |f_{ij}(x)|^p \leq B^p\|x\|^p.\end{aligned}$$

□

قضیه زیر یک شرط کافی برای ساختن یک p-قاب درهم تنیده شده ارائه می دهد.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} \ :\ j \in J\}$ یک خانواده متناهی از p-قاب ها برای X با کران های p-قاب به ترتیب A_j و B_j باشد. فرض کنید $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر زیر مجموعه $\Lambda \subset I$ و برای هر $j,k \in J$ و $x \in X$ داشته باشیم*

$$\sum_{i\in\Lambda} \left|f_{ij}(x) - f_{ik}(x)\right|^p \leq M \min\Big\{ \sum_{i\in\Lambda} |f_{ij}(x)|^p, \sum_{i\in\Lambda} |f_{ik}(x)|^p\Big\},$$

در این صورت خانواده $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} \ :\ j \in J\}$ یک p-قاب درهم تنیده شده با کران های p-قاب درهم تنیده شده $\sqrt[p]{\frac{\sum_{j\in J} A_j^p}{2^p|J|(M+1)}}$ و $\sqrt[p]{\sum_{j\in J} B_j}$ است.

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $x \in X$ مفروض باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k\in J} A_k^p}{۲^p|J|(M+۱)}\|x\|^p &\leq \frac{۱}{۲^p|J|(M+۱)}\sum_{k\in J}\sum_{i\in I}|f_{ik}(x)|^p \\ &= \frac{۱}{۲^p|J|(M+۱)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ik}(x)|^p \\ &\leq \frac{۱}{|J|(M+۱)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ik}(x)-f_{ij}(x)|^p+\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p\Big) \\ &\leq \frac{۱}{|J|(M+۱)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\Big(M\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p+\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p\Big) \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}|f_{ij}(x)|^p \leq \sum_{j\in J} B_j^p\|x\|^p.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\sum_{j\in J} A_j^p}{۲^p|J|(M+۱)}\|x\|^p \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_{ij}(x)|^p \leq \sum_{j\in J} B_j^p\|x\|^p.$$

بنابراین، اثبات تمام می شود. □

قضیه زیر یک شرط کافی برای ساختن یک p-قاب درهم تنیده شده را با استفاده از ترکیب عملگر های کران دار و وارون پذیر با عناصر یک p-قاب را ارائه می دهد.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید J یک زیر مجموعه متناهی $\mathbb{N}$ باشد و $\{f_i\}_{i\in I}$ یک p-قاب برای X با کران های p-قاب پایین و بالای A و B باشد. فرض کنید برای هر $j\in J$، $T_j : X\to X$ یک عملگر وارون پذیر روی X باشد و $M>۰$ موجود باشد به طوری که برای هر زیر مجموعه متناهی $\Lambda\subset I$ و برای هر $j,k\in J$ و $x\in X$ داشته باشیم*

$$\sum_{i\in\Lambda}\big|f_iT_j(x)-f_iT_k(x)\big|^p \leq M\min\Big\{\sum_{i\in\Lambda}|f_iT_j(x)|^p,\sum_{i\in\Lambda}|f_iT_k(x)|^p\Big\},$$

در این صورت خانواده $\{\{f_iT_j\}_{i\in I} : j \in J\}$ *یک* p*-قاب درهم تنیده شده با کران های* p*-قاب در هم تنیده شده* $\frac{A}{2\sqrt[p]{|J|(M+1)}} \min_{j\in J} \|T_j^{-1}\|^{-1}$ *و* $B\sqrt[p]{|J|}\max_{j\in J}\|T_j\|$ *است.*

اثبات. فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $x \in X$ مفروض باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\frac{A^p \min_{j\in J}\|T_j^{-1}\|^{-p}}{2^p|J|(M+1)}\|x\|^p &\le \frac{A^p\|T_k^{-1}\|^{-p}}{2^p|J|(M+1)}\|x\|^p \le \frac{A^p\sum_{k\in J}\|T_k^{-1}\|^{-p}}{2^p|J|(M+1)}\|x\|^p\\
&\le \frac{1}{2^p|J|(M+1)}\sum_{k\in J}\sum_{i\in I}|f_iT_k(x)|^p\\
&= \frac{1}{2^p|J|(M+1)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_k(x)|^p\\
&\le \frac{1}{|J|(M+1)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_k(x)-f_iT_j(x)|^p+\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_j(x)|^p\Big)\\
&\le \frac{1}{|J|(M+1)}\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}\Big(M\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_j(x)|^p+\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_j(x)|^p\Big)\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_j(x)|^p \le \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}|f_iT_j(x)|^p \le \sum_{j\in J}B^p\|T_j(x)\|^p\\
&\le \sum_{j\in J}B^p\|T_j\|^p\|x\|^p \le B^p|J|\max_{j\in J}\|T_j\|^p\|x\|^p.
\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{A^p \min_{j\in J}\|T_j^{-1}\|^{-p}}{2^p|J|(M+1)}\|x\|^p \le \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j}|f_iT_j(x)|^p \le B^p|J|\max_{j\in J}\|T_j\|^p\|x\|^p.$$

بنابراین، اثبات کامل می شود. □

قضیه زیر پایایی p-قاب های درهم تنیده شده را نسبت به ترکیب یک عملگر خطی وارون پذیر و کران دار با عناصر آن را نشان می دهد.

قضیه ۵.۳. *فرض کنید* $\{\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J\}$ *یک* p*-قاب درهم تنیده شده برای* X *با کران های* p*-قاب*

درهم تنیده شده A و B باشد. فرض کنید $T : X \to X$ یک عملگر خطی وارون پذیر و کران دار روی X باشد. در این صورت خانواده $\{\{f_{ij}T\}_{i\in I} \; : \; j \in J\}$ نیز یک p-قاب درهم تنیده شده برای X به ترتیب با کران های p-قاب درهم تنیده شده $A\|T^{-1}\|^{-1}$ و $B\|T\|$ است.

اثبات. این ادعا از این واقعیت نتیجه می شود که اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک p-قاب برای X با کران های p-قاب A و B باشد و $T : X \to X$ یک عملگر خطی وارون پذیر و کران دار روی X باشد آنگاه $\{f_iT\}_{i\in I}$ یک p-قاب برای X به ترتیب با کران های p-قاب پایین و بالای $A\|T^{-1}\|^{-1}$ و $B\|T\|$ است. □

قضیه زیر شرایط معادل را برای یک دنباله p-ریس درهم تنیده شده برای X را ارائه می دهد.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\{\{h_{ij}\}_{i\in I} \; : \; j \in J\}$ یک خانواده متناهی از دنباله های p-ریس برای X با کران های پایین و بالای A_j و B_j باشد. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:*

(۱) *خانواده $\{\{h_{ij}\}_{i\in I} \; : \; j \in J\}$ یک دنباله p-ریس درهم تنیده شده برای X با کران های دنباله p-ریس درهم تنیده شده A و B است.*

(۲) *ثابت $K > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I و $d \in \ell^p$*

$$K\Big\| \sum_{k\in\sigma_n} d_k h_{kn}\Big\|_X^p \leq \Big\| \sum_{j\in J} \sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p \qquad \forall n \in J.$$

(۳) *ثابت $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I و $d \in \ell^p$*

$$M \sum_{j\in J} \Big\| \sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p \leq \Big\| \sum_{j\in J} \sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p.$$

(۴) *ثابت $N > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر افراز $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ از I و $d \in \ell^p$*

$$N \leq \Big\| \sum_{k\in J} \sum_{i\in\sigma_k} d_i h_{ik}\Big\|_X^p$$

که در آن برای هر $j \in J$ داریم $\| \sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\|_X^p = 1$.

اثبات. گزاره های (۳) $\Leftrightarrow$ (۲) و (۴) $\Rightarrow$ (۲) واضح هستند. برای اثبات (۲) $\Rightarrow$ (۴) در حالتی که $\sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij} = 0$ حکم برقرار است. فرض کنید چنین نباشد در این صورت با استفاده از فرض داریم

$$N \leq \Big\| \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} \frac{d_i}{\|\sum_{k\in\sigma_n} d_k h_{kn}\|_X^p} h_{ij}\Big\|_X^p = \frac{1}{\|\sum_{k\in\sigma_n} d_k h_{kn}\|_X^p}\Big\|\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p.$$

بنابراین حکم (۲) ثابت می شود. برای اثبات (۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $d \in \ell^p$ مفروض باشند. در این صورت بنا به (۱) داریم

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k\in\sigma_n} d_k h_{kn}\Big\|_X^p &\leq B^p \sum_{i\in\sigma_n} |d_i|^p \leq B^p \sum_{i\in I} |d_i|^p \\ &= B^p \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} |d_i|^p \leq \frac{B^p}{A^p}\Big\|\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p.\end{aligned}$$

برای اثبات (۱) $\Rightarrow$ (۳) فرض کنید $\sigma = \{\sigma_j\}_{j\in J}$ یک افراز دلخواه از I و $d \in \ell^p$ مفروض باشند. در این صورت داریم

$$\sum_{i\in I} |d_i|^p = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} |d_i|^p \leq \sum_{j\in J} \frac{1}{A_j^p}\Big\|\sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p \leq \frac{1}{M \min_{j\in J} A_j^p}\Big\|\sum_{j\in J}\sum_{i\in\sigma_j} d_i h_{ij}\Big\|_X^p.$$

به طور مشابه، کران بالای پایه p-ریس درهم تنیده شده هم نتیجه می شود. بنابراین اثبات کامل می شود. □

تقدیر و تشکر

نویسندگان بر خود واجب می دانند که از داوران محترم به خاطر نظرات و پیشنهادات سازنده و روشنگرانه اشان در این مقاله سپاسگزاری و تشکر کنند، زیرا این اظهار نظرها ما را به سمت بهبود مقاله سوق داده است. این مقاله با استفاده از اعتبار پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات انجام شده است.

مراجع

[1] A. Aldroubi, Q. Sun and W. Tang, p-Frames and shift invariant subspaces of ℓ^p, *J. Fourier Anal. Appl.*, **7**(1) (2001), 1–22.

[2] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenig, M.C. Lammers and R.G. Lynch, Weaving frames, *Oper. Matrices*, **10**(4) (2016), 1093–1116.

[3] P.G. Casazza and R.G. Lynch, Weaving properties of Hilbert space frames, *Proc. SampTA.*, (2015), 110–114.

[4] P.G. Casazza, D. Freeman and R.G. Lynch, Weaving Schauder frames, *J. Approx. Theory.*, **211** (2016), 42–60.

[5] O. Christensen and D.T. Stoeva, p-Frames in separable Banach spaces, *Adv. Comput. Math.*, **18** (2013), 117–126.

[6] K. Gröcheing, Describing functions: Atomic decomposition versus frames, *Monatsh. Math.*, **112** (1991), 1–42.

[7] A. Rahimi, Z. Samadzadeh and B. Daraby, Frame related operators for woven frames, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **17**(3) (2019).

[8] D.T. Stoeva, On p-frames and reconstruction series in separable Banach spaces, *Integral Trans. Spec. Funct.*, **17** (2006), 127–133.

[9] L.K. Vashisht, Deepshikha, Weaving properties of generalized continuous frames generated by an iterated function system, *J. Geom. Phys.*, **110** (2016), 282–295.

[10] L.K. Vashisht, S. Garg, Deepshikha and P.K. Das, On generalized weaving frames in Hilbert spaces, *Rocky Mt. J. Math.*, **48**(2) (2018), 661–685.