موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۷-۹۵

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

مجزایی g-قاب‌های پیوسته و g-قاب‌های پیوسته‌ی ریس-گونه

یاور خدمتی[آ]، محمدرضا عبداله‌پور[آ*]

[آ]گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۲۶ آذر ۱۳۹۸

پذیرفته شده: ۸ آبان ۱۳۹۹

دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: عطاالله عسکری همت

کلمات کلیدی:

g-قاب پیوسته، g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه، مجزایی.

چکیده

در این مقاله به تعریف g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا، مجزای قوی و مجزای ضعیف پرداخته و به مطالعه‌ی این مفاهیم می‌پردازیم. با استفاده از g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا و مجزای قوی ساختاری از یک g-قاب پیوسته حاصل می‌شود. در آخر نتایجی برای g-قاب‌های پیوسته‌ی ریس-گونه بدست می‌آوریم.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: khedmati.y@uma.ac.ir (یاور خدمتی)، mrabdollahpour@yahoo.com (محمدرضا عبداله‌پور).

http://doi.org/10.22072/wala.2020.118727.1261

۱. مقدمه

در سال ۱۹۵۲، مفهوم قاب برای فضاهای هیلبرت[۱]، توسط دافین[۲] و شیفر[۳] معرفی شد [۶]. قاب‌ها ابزار مهمی در فرآیند پردازش سیگنال‌ها، پردازش تصاویر، فشرده‌سازی اطلاعات و غیره می‌باشند. فرض کنیم $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد و فرض کنیم I یک مجموعه اندیس‌گذار شمارا باشد. دنباله‌ی $F = \{f_i\}_{i\in I}$ از $\mathcal{H}$ را یک قاب (گسسته) برای $\mathcal{H}$ گوییم هرگاه ثابت‌های $A_F, B_F > 0$ موجود باشند که

$$A_F\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_F\|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های A_F و B_F را به ترتیب کران پایین و کران بالای قاب F می‌نامند. اگر در نامساوی (۱.۱)، $A_F = B_F = 1$، گوییم دنباله‌ی $F = \{f_i\}_{i\in I}$ قاب پارسوال[۴] برای $\mathcal{H}$ می‌باشد. فرض کنیم $F = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه عملگر

$$T_F : l_2(I) \to \mathcal{H}, \quad T_F(\{c_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i f_i,$$

عملگر خوش‌تعریف پوشاست. عملگر الحاقی T_F به صورت زیر می‌باشد:

$$T_F^* : \mathcal{H} \to l_2(I), \quad T_F^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

عملگرهای T_F و T_F^* را به ترتیب عملگرهای ترکیب و تجزیه می‌نامیم. مفاهیم قاب های مجزا و مجزای قوی توسط هان و لارسن[۵] معرفی شده است [۱۰].

تعریف ۱.۱. فرض کنیم $F = \{f_i\}_{i\in I}$ و $G = \{g_i\}_{i\in I}$ به ترتیب قاب برای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ باشند. گوییم F و G

---
[1] Hilbert
[2] Duffin
[3] Schaeffer
[4] Parseval
[5] Han and Larson

(۱) مجزا هستند، هرگاه $\{f_i \oplus g_i\}_{i\in I}$ قاب برای $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ باشد.

(۲) مجزای قوی هستند، هرگاه عملگرهای معکوس‌پذیر $L_1 \in B(\mathcal{H})$ و $L_2 \in B(\mathcal{K})$ موجود باشند به طوری که دنباله‌های $\{L_1 f_i\}_{i\in I}, \{L_2 g_i\}_{i\in I}$ و $\{L_1 f_i \oplus L_2 g_i\}_{i\in I}$ به ترتیب قاب پارسوال برای $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ و $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ باشند.

گزاره ۲.۱. *[[۱۰]] فرض کنیم $F = \{f_i\}_{i\in I}$ و $G = \{g_i\}_{i\in I}$ به ترتیب قاب برای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ باشند. در این صورت*

(۱) F و G مجزا هستند اگر و تنها اگر $\operatorname{ran} T_F^* \cap \operatorname{ran} T_G^* = \{0\}$ و $\operatorname{ran} T_F^* + \operatorname{ran} T_G^*$ زیرفضای بسته‌ی $l_2(I)$ باشد.

(۲) F و G مجزای قوی هستند اگر و تنها اگر $\operatorname{ran} T_F^* \perp \operatorname{ran} T_G^*$.

در سال ۱۹۹۳، قاب گسسته به خانواده‌ای اندیس‌دار که قاب پیوسته نامیده می‌شود، توسعه داده شد [[۴]].

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت مختلط و (Ω, μ) فضای اندازه باشد. نگاشت $F : \Omega \to \mathcal{H}$ را یک قاب پیوسته گوییم هرگاه

(۱) F به طور ضعیف اندازه‌پذیر باشد، یعنی برای هر $f \in \mathcal{H}$ تابع $\omega \to \langle f, F(\omega)\rangle$ یک تابع اندازه‌پذیر روی Ω باشد.

(۲) ثابت‌های $A_F, B_F > 0$ چنان موجود باشند که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 \, d\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

اگر $F : \Omega \to \mathcal{H}$ قاب پیوسته باشد، آن‌گاه عملگر $S_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ تعریف شده به صورت

$$\langle S_F f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle\langle F(\omega), g\rangle d\mu(\omega), \quad f, g \in \mathcal{H},$$

مثبت و معکوس پذیر می‌باشد که عملگر قاب F نامیده می‌شود.

مفهوم g-قاب‌ها (یا قاب‌های تعمیم یافته) که توسیعی از قاب‌های گسسته می‌باشد توسط سان[۶]

[۶] Sun

روی فضاهای هیلبرت ارائه شده است [۱۱]. در سال ۲۰۰۸، مفهوم g-قاب‌های پیوسته و g-قاب‌های پیوسته‌ی ریس-گونه روی فضاهای هیلبرت توسط عبداله‌پور و فاروقی معرفی شد [۲]. مفهوم مجزایی توسط گاباردو و هان [7] به قاب های پیوسته و توسط عبداله‌پور به g-قاب‌ها توسیع داده شده است [۷، ۱]. در ادامه، فرض بر این است که (Ω, μ) فضای اندازه با اندازه مثبت μ، $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت مختلط و $\{\mathcal{K}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ خانواده‌ای از فضاهای هیلبرت می‌باشد. حال در ادامه خلاصه‌ای از مقاله [۲] درباره g-قاب پیوسته را می‌آوریم.

فرض کنیم

$$\prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{K}_\omega = \Big\{ f : \Omega \to \bigcup_{\omega\in\Omega} \mathcal{K}_\omega : f(\omega) \in \mathcal{K}_\omega \Big\}.$$

گوییم $f \in \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{K}_\omega$ به طور قوی اندازه‌پذیر است هرگاه f به عنوان نگاشت از Ω به $\bigoplus_{\omega\in\Omega} \mathcal{K}_\omega$ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱. خانواده‌ی $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ را قاب پیوسته‌ی تعمیم یافته یا g-قاب پیوسته گوییم هرگاه

(۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\{\Lambda_\omega f : \omega \in \Omega\}$ به طور قوی اندازه‌پذیر باشد.

(۲) ثابت‌های $0 < A_\Lambda \leq B_\Lambda < \infty$ چنان موجود باشند که

$$A_\Lambda \|f\|^2 \leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega(f)\|^2 d\mu(\omega) \leq B_\Lambda \|f\|^2, \;\; f \in \mathcal{H}. \tag{۲.۱}$$

A_Λ و B_Λ را به ترتیب کران پایین و کران بالای Λ گوییم.

اگر $A_\Lambda = B_\Lambda$، خانواده Λ را g-قاب پیوسته‌ی تنگ گوییم و در صورتی که $A_\Lambda = B_\Lambda = 1$، خانواده Λ را g-قاب پیوسته‌ی پارسوال می‌نامیم. اگر برای هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\omega$، در این صورت Λ را g-قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\mathcal{K}$ گوییم. خانواده‌ی Λ را g-بسل پیوسته گوییم هرگاه طرف راست نامساوی (۲.۱) برقرار باشد. در این حالت B_Λ کران g-بسل پیوسته‌ی Λ نامیده می‌شود.
توجه داشته باشیم که در سراسر این مقاله کران‌های بالا و پایین g-قاب پیوسته Λ را به ترتیب با A_Λ و B_Λ نشان می‌دهیم.

[7] Gabardo and Han

گزاره ۵.۱. *[۲] فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته باشد. در این صورت عملگر منحصر به فرد مثبت و معکوس‌پذیر S_Λ وجود دارد به طوری‌که برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم*

$$\langle S_\Lambda f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, \Lambda_\omega^* \Lambda_\omega g\rangle d\mu(\omega), \quad f, g \in \mathcal{H},$$

و $A_\Lambda I \leq S_\Lambda \leq B_\Lambda I$.

عملگر S_Λ در گزاره‌ی ۵.۱ را عملگر g-قاب پیوسته‌ی Λ گوییم. برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle S_\Lambda^{-1} f, \Lambda_\omega^* \Lambda_\omega g\rangle \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f, \Lambda_\omega^* \Lambda_\omega S_\Lambda^{-1} g\rangle \, d\mu(\omega). \tag{۳.۱}$$

توجه داشته باشیم که در سراسر مقاله عملگر قاب دنباله‌ی بسل Λ را با S_Λ نشان می‌دهیم. حال مجموعه‌ی

$$\widehat{\mathcal{K}} = \Big\{F \in \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{K}_\omega : \text{به طور قوی اندازه‌پذیر } F, \ \int_\Omega \|F(\omega)\|^2 d\mu(\omega) < \infty\Big\},$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که $\widehat{\mathcal{K}}$ با عمل‌های نقطه به نقطه و ضرب داخلی

$$\langle F, G\rangle = \int_\Omega \langle F(\omega), G(\omega)\rangle d\mu(\omega), \quad F, G \in \widehat{\mathcal{K}}, \tag{۴.۱}$$

یک فضای هیلبرت می‌باشد.

گزاره ۶.۱. *[۲] فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ خانواده‌ی g-بسل پیوسته باشد. در این صورت نگاشت $T_\Lambda : \widehat{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}$ تعریف شده به صورت*

$$\langle T_\Lambda F, g\rangle = \int_\Omega \langle \Lambda_\omega^* F(\omega), g\rangle d\mu(\omega), \ F \in \widehat{\mathcal{K}}, \ g \in \mathcal{H}, \tag{۵.۱}$$

نگاشت خطی کراندار می‌باشد که $\|T_\Lambda\| \leq \sqrt{B_\Lambda}$*. همچنین برای هر* $g \in \mathcal{H}$ *داریم*

$$T_\Lambda^*(g)(\omega) = \Lambda_\omega g,\ \omega \in \Omega. \qquad (۶.۱)$$

قضیه ۷.۱. *[۲] فرض کنیم* (Ω, μ) *فضای اندازه با اندازه‌ی* σ*-متناهی* μ *باشد و* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *خانواده‌ای از عملگرها باشد به طوری‌که برای هر* $f \in \mathcal{H}$ *خانواده‌ی* $\{\Lambda_\omega f : \omega \in \Omega\}$ *به طور قوی اندازه‌پذیر باشد.* Λ *یک* g*-قاب پیوسته است اگر و تنها اگر عملگر* $T_\Lambda : \widehat{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}$ *تعریف شده در (۵.۱) کراندار و پوشا باشد.*

عملگرهای T_Λ و T_Λ^* در گزاره‌ی ۶.۱ را به ترتیب عملگرهای ترکیب و تجزیه Λ می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ خانواده‌های g-بسل پیوسته باشند به طوری که

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, \Theta_\omega^* \Lambda_\omega g\rangle d\mu(\omega),\ \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

در این صورت Θ دوگان Λ نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته باشد. در این صورت $\widetilde{\Lambda} = \{\Lambda_\omega S_\Lambda^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته می‌باشد و بنا به (۳.۱)، $\widetilde{\Lambda}$ دوگان Λ می‌باشد. $\widetilde{\Lambda}$ را دوگان متعارف Λ گوییم. همچنین اگر $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته باشد، آن‌گاه خانواده‌ی $\Lambda S_\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \{\Lambda_\omega S_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته‌ی پارسوال می‌باشد.

خانواده‌های g-بسل پیوسته $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ را به طور ضعیف برابر گویند هرگاه برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\Lambda_\omega f = \Theta_\omega f, \quad a.e.\ \omega \in \Omega.$$

اگر g-قاب پیوسته‌ی $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ تنها یک دوگان (به طور ضعیف) داشته

باشد، یعنی هر دوگان Λ به طور ضعیف برابر با دوگان متعارفش باشد، در این صورت Λ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه نامیده می‌شود.

قضیه ۹.۱. *[۲] فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک g-قاب پیوسته باشد. Λ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه است اگر و تنها اگر* $\operatorname{ran} T_\Lambda^* = \widehat{\mathcal{K}}$.

شایان ذکر است که در مقاله [۳] به مطالعه برخی ویژگی‌های g-قاب‌های پیوسته و g-قاب‌های پیوسته ریس-گونه پرداخته‌ایم.

۲. g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا

در این بخش با تعمیم مفاهیم و نتایجی از مقالات [۱، ۸، ۹، ۱۰] تعاریف مجزایی برای g-قاب‌های پیوسته را مطرح کرده و ساختاری از g-قاب‌های پیوسته را بدست می‌آوریم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ هر دو g-قاب پیوسته باشند. گوییم Λ و Θ

(۱) مجزای قوی هستند، هرگاه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \perp \operatorname{ran} T_\Theta^*$.

(۲) مجزا هستند، هرگاه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^* = \{0\}$ و $\operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^*$ زیرفضای بسته‌ی $\widehat{\mathcal{K}}$ باشد.

(۳) زوج مکمل هستند، هرگاه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^* = \{0\}$ و $\operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^* = \widehat{\mathcal{K}}$.

(۴) زوج مکمل قوی هستند، هرگاه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \oplus \operatorname{ran} T_\Theta^* = \widehat{\mathcal{K}}$.

(۵) مجزای ضعیف هستند، هرگاه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^* = \{0\}$.

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *هر دو g-قاب پیوسته باشند. خانواده‌ی* $\Gamma = \{\Gamma_\omega \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *را در نظر می‌گیریم که*

$$\Gamma_\omega(h \oplus k) = \Lambda_\omega h + \Theta_\omega k, \quad h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K},\ \omega \in \Omega,$$

می‌باشد. در این صورت Λ و Θ

(۱) مجزای قوی هستند اگر و تنها اگر عملگرهای معکوس‌پذیر $L_1 \in B(\mathcal{H})$ و $L_2 \in B(\mathcal{K})$ موجود باشند به طوری‌که $\Lambda L_1 = \{\Lambda_\omega L_1 \in B(\mathcal{H},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$، $\Theta L_2 = \{\Theta_\omega L_2 \in B(\mathcal{K},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Delta = \{\Delta_\omega \in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ هر سه g-قاب پیوسته‌ی پارسوال باشند. که

$$\Delta_\omega(h \oplus k) = \Lambda_\omega L_1 h + \Theta_\omega L_2 k, \quad \omega \in \Omega,\ h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}.$$

(۲) مجزا هستند اگر و تنها اگر Γ یک g-قاب پیوسته باشد.

(۳) زوج مکمل هستند اگر وتنها اگر Γ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه باشد.

(۴) زوج مکمل قوی هستند اگر و تنها اگر مجزای قوی باشند و Γ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه باشد.

(۵) مجزای ضعیف هستند اگر وتنها اگر $\{f \oplus g : \Gamma_\omega(f \oplus g) = 0,\ \omega \in \Omega\} = \{0\}$.

اثبات. (۱) فرض کنیم Λ و Θ مجزای قوی باشند. لذا با توجه به فرض موجود $\operatorname{ran} T^*_\Lambda \perp \operatorname{ran} T^*_\Theta$ و در نتیجه برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\|\Lambda_\omega S_\Lambda^{-\frac{1}{2}} h + \Theta_\omega S_\Theta^{-\frac{1}{2}} k\|^2 d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \|\Lambda_\omega S_\Lambda^{-\frac{1}{2}} h\|^2 d\mu(\omega) + \int_\Omega \|\Theta_\omega S_\Theta^{-\frac{1}{2}} k\|^2 d\mu(\omega) \\ &= \|h\|^2 + \|k\|^2 = \|h \oplus k\|^2.\end{aligned}$$

کافیست $L_1 = S_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ و $L_2 = S_\Theta^{-\frac{1}{2}}$ در نظر بگیریم. برعکس، فرض کنیم عملگرهای معکوس‌پذیر $L_1 \in B(\mathcal{H})$ و $L_2 \in B(\mathcal{K})$ موجود باشند به طوری که $\Lambda L_1 = \{\Lambda_\omega L_1 \in B(\mathcal{H},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$، $\Theta L_2 = \{\Theta_\omega L_2 \in B(\mathcal{K},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Delta = \{\Delta_\omega \in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K},\mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ هر سه g-قاب پیوسته‌ی پارسوال باشند. که

$$\Delta_\omega(h \oplus k) = \Lambda_\omega L_1 h + \Theta_\omega L_2 k, \quad \omega \in \Omega,\ h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}.$$

برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ داریم

$$\begin{aligned}\|h \oplus k\|^{۲} &= \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}(h \oplus k)\|^{۲} d\mu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega} L_{۱} h\|^{۲} d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Theta_{\omega} L_{۲} k\|^{۲} d\mu(\omega) \\ &+ ۲ \operatorname{Re} \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱} h, \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega) \\ &= \|h\|^{۲} + \|k\|^{۲} + ۲ \operatorname{Re} \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱} h, \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱} h, \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega) = ۰, \quad h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}.$$

از طرف دیگر

$$\operatorname{Im} \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱} h, \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega) = -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱}(ih), \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega) = ۰.$$

در نتیجه

$$\langle T_{\Lambda}^{*} L_{۱} h, T_{\Theta}^{*} L_{۲} k \rangle = \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_{۱} h, \Theta_{\omega} L_{۲} k \rangle d\mu(\omega) = ۰, \quad h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}.$$

حال از آن جا که $L_{۱}$ و $L_{۲}$ عملگرهای معکوس‌پذیر و لذا پوشا هستند، برای هر $f \in \mathcal{H}$ و $g \in \mathcal{K}$ داریم $\langle T_{\Lambda}^{*} f, T_{\Theta}^{*} g \rangle = ۰$ و در نتیجه $\operatorname{ran} T_{\Lambda}^{*} \perp \operatorname{ran} T_{\Theta}^{*}$.

(۲) فرض کنیم Γ یک g-قاب پیوسته برای $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ باشد. لذا برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ داریم

$$A_{\Gamma}(\|h\|^{۲} + \|k\|^{۲}) \leq \|T_{\Lambda}^{*} h + T_{\Theta}^{*} k\|^{۲} \leq B_{\Gamma}(\|h\|^{۲} + \|k\|^{۲}). \tag{۱.۲}$$

فرض کنیم $h_{۱} \in \mathcal{H}$ و $k_{۱} \in \mathcal{K}$ وجود دارند به طوری که $T_{\Lambda}^{*} h_{۱} = T_{\Theta}^{*} k_{۱}$. بنا به سمت چپ نامساوی

(۱.۲) داریم

$$A_\Gamma(\|h\|^2 + \|k\|^2) = A_\Gamma(\|h\|^2 + \|-k\|^2) \leq \|T_\Lambda^* h + T_\Theta^*(-k)\|^2$$
$$= \|T_\Lambda^* h - T_\Theta^* k\|^2 = 0.$$

و لذا $h_1 = k_1 = 0$. بنابراین $T_\Lambda^* h_1 = T_\Theta^* k_1 = 0$ و در نتیجه $\operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^* = \{0\}$. همچنین $\operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^* = \operatorname{ran} T_\Gamma^*$ زیر فضای بسته‌ی $\widehat{\mathcal{K}}$ است. برای اثبات طرف عکس، عملگر زیر را در نظر می‌گیریم

$$L : \operatorname{ran} T_\Lambda^* \oplus \operatorname{ran} T_\Theta^* \to \operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^*,$$
$$L(F \oplus G) = F + G.$$

عملگر L خوش تعریف می‌باشد. در واقع برای هر $F_1, F_2 \in \operatorname{ran} T_\Lambda^*$ و $G_1, G_2 \in \operatorname{ran} T_\Theta^*$ با شرط $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2$ داریم $F_1 = F_2$ و $G_1 = G_2$. بنابراین

$$L(F_1 \oplus G_1) = F_1 + G_1 = F_2 + G_2 = L(F_2 \oplus G_2).$$

همچنین

$$\|L(F \oplus G)\|^2 = \|F + G\|^2 \leq (\|F\| + \|G\|)^2$$
$$\leq 2(\|F\|^2 + \|G\|^2) = 2\|F \oplus G\|^2.$$

بنابراین L یک عملگر کراندار دوسویی می‌باشد و لذا برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ همچنین داریم

$$\begin{aligned}\|L^{-1}\|^{-2} \min\{A_\Lambda, A_\Theta\}.\|h \oplus k\|^2 &\leq \int_\Omega \|\Gamma_\omega(h \oplus k)\|^2 d\mu(\omega)\\ &= \|L(T_\Lambda^* h \oplus T_\Theta^* k)\|^2\\ &\leq \|L\|^2 \max\{B_\Lambda, B_\Theta\}.\|h \oplus k\|^2.\end{aligned}$$

(۳) فرض کنیم Γ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه برای $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ می‌باشد. بنا به قضیه‌ی ۹.۱، داریم

$$\operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^* = \operatorname{ran} T_\Gamma^* = \widehat{\mathcal{K}}.$$

از طرف دیگر فرض کنیم $\phi \in \operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^*$، در این صورت $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ وجود دارند به طوری که $T_\Lambda^* h = T_\Theta^* k = \phi$. بنابراین

$$T_\Gamma^*(h \oplus 0) = \phi = T_\Gamma^*(0 \oplus k),$$

و از آن جا که T_Γ^* یک به یک می‌باشد، داریم $h = k = 0$ و در نتیجه $\phi = 0$. برعکس از زوج مکمل بودن Λ و Θ و از (۲) نتیجه می‌شود، Γ یک g-قاب پیوسته و

$$\operatorname{ran} T_\Gamma^* = \operatorname{ran} T_\Lambda^* + \operatorname{ran} T_\Theta^* = \widehat{\mathcal{K}}.$$

بنابراین بنا به قضیه‌ی ۹.۱، Γ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه است.

(۴) بنا به (۳) و تعریف g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزای قوی، برهان کامل است.

(۵) فرض کنیم Λ و Θ مجزای ضعیف باشند و $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ به طوری که برای هر $\omega \in \Omega$، $\Gamma_\omega(h \oplus k) = 0$. در این صورت

$$T_\Lambda^* h = T_\Theta^*(-k) \in \operatorname{ran} T_\Lambda^* \cap \operatorname{ran} T_\Theta^* = \{0\}.$$

بنابراین $h = k = 0$. برعکس فرض کنیم $\phi \in \operatorname{ran} T_{\Lambda}^* \cap \operatorname{ran} T_{\Theta}^*$، در این صورت $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ وجود دارند به طوری که $T_{\Lambda}^* h = T_{\Theta}^* k = \phi$. بنابراین

$$T_{\Gamma}^*(h \oplus (-k)) = T_{\Lambda}^* h - T_{\Theta}^* k = 0.$$

در نتیجه $h = k = 0$ و لذا $\phi = 0$. □

لم ۳.۲. *[۵] فرض کنیم $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ عملگر خطی کراندار پوشا باشد. در این صورت عملگر خطی کراندار $T^{\dagger} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $TT^{\dagger} f = f$.*

عملگر $T^{\dagger} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ در لم فوق را شبه وارون عملگر $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ می‌نامند. حال با تعمیم نتیجه‌ای از مقاله [۸] نتیجه‌ی زیر را بدست می‌آوریم که هدف ساختن g-قاب پیوسته از g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا می‌باشد.

گزاره ۴.۲. *فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$، g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا باشند و عملگرهای $L_1, L_2 \in B(\mathcal{H})$ را در نظر بگیرید. اگر L_1 یا L_2 پوشا باشد، در این صورت خانواده‌ی $\Lambda L_1^* + \Theta L_2^* = \{\Lambda_\omega L_1^* + \Theta_\omega L_2^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته است.*

اثبات. فرض کنیم L_1 پوشا باشد، در این صورت بنا به لم ۳.۲، عملگر $L_1^{\dagger} \in B(\mathcal{H})$ وجود دارد به طوری که $L_1 L_1^{\dagger} = I$ و لذا $(L_1^{\dagger})^* L_1^* = I$. بنابراین برای هر $h \in \mathcal{H}$ داریم

$$\|h\| = \|(L_1^{\dagger})^* L_1^* h\| \leq \|L_1^{\dagger}\| \|L_1^* h\|,$$

و درنتیجه

$$\|L_1^* h\| \geq \frac{\|h\|}{\|L_1^{\dagger}\|}.$$

خانواده‌ی $\Gamma = \{\Gamma_\omega \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) : \omega \in \Omega\}$ با

$$\Gamma_\omega(h \oplus k) = \Lambda_\omega h + \Theta_\omega k, \quad h, k \in \mathcal{H}, \ \omega \in \Omega,$$

را در نظر می‌گیریم. بنا به قسمت (۲) قضیه‌ی ۲.۲، خانواده‌ی Γ یک g-قاب پیوسته است. بنابراین برای هر $h \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{A_\Gamma}{\|L_1^\dagger\|^2}\|h\|^2 \leq A_\Gamma \|L_1^* h\|^2 &\leq A_\Gamma(\|L_1^* h\|^2 + \|L_2^* h\|^2)\\ &= A_\Gamma \|L_1^* h \oplus L_2^* h\|^2\\ &\leq \int_\Omega \|\Gamma_\omega(L_1^* h \oplus L_2^* h)\|^2 d\mu(\omega)\\ &\leq B_\Gamma \|L_1^* h \oplus L_2^* h\|^2\\ &\leq B_\Gamma(\|L_1^* h\|^2 + \|L_2^* h\|^2)\\ &\leq 2B_\Gamma . \max\{\|L_1\|^2, \|L_2\|^2\}\|h\|^2.\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}\frac{A_\Gamma}{\|L_1^\dagger\|^2}\|h\|^2 &\leq \int_\Omega \|(\Lambda_\omega L_1 + \Theta_\omega L_2)h\|^2 d\mu(\omega)\\ &\leq 2B_\Gamma . \max\{\|L_1\|^2, \|L_2\|^2\}\|h\|^2, \quad h \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

برهان برای حالتی که L_2 پوشاست به طور مشابه می‌باشد. □

نتیجه ۵.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$، *$g$-قاب‌های پیوسته‌ی مجزا باشند. در این صورت خانواده‌ی* $\Lambda + \Theta = \{\Lambda_\omega + \Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک g-قاب پیوسته می‌باشد.*

اثبات. با در نظر گرفتن $L_1 = L_2 = I$ در گزاره‌ی ۴.۲، برهان کامل است. □

با تعمیم نتیجه‌ای از [۱۰] نتیجه‌ی زیر را بدست می‌آوریم که هدف ساختن g-قاب پیوسته از g-قاب‌های پیوسته‌ی مجزای قوی است.

گزاره ۶.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$، *$g$-قاب‌های پیوسته‌ی مجزای قوی باشند و* $L_۱, L_۲ \in B(\mathcal{H})$ *به طوری که برای ثابت* $A > ۰$ *رابطه‌ی* $L_۱^*L_۱ + L_۲^*L_۲ = AI$ *برقرار باشد. در این صورت خانواده‌ی* $\Lambda L_۱ + \Theta L_۲ = \{\Lambda_\omega L_۱ + \Theta_\omega L_۲ \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک g-قاب پیوسته می‌باشد. در حالت خاص برای* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *با* $|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ > ۰$ *خانواده‌ی* $\alpha\Lambda + \beta\Theta = \{\alpha\Lambda_\omega + \beta\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک g-قاب پیوسته است.*

اثبات. برای هر $h \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|(\Lambda_\omega L_۱ + \Theta_\omega L_۲)h\|^۲ d\mu(\omega) &= \|T_\Lambda^* L_۱ h + T_\Theta^* L_۲ h\|^۲ \\ &= \|T_\Lambda^* L_۱ h\|^۲ + \|T_\Theta^* L_۲ h\|^۲,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(B_\Lambda \|L_۱\|^۲ + B_\Theta \|L_۲\|^۲)\|h\|^۲ &\geq \|T_\Lambda^* L_۱ h\|^۲ + \|T_\Theta^* L_۲ h\|^۲ \\ &\geq \min\{A_\Lambda, A_\Theta\}.(\|L_۱ h\|^۲ + \|L_۲ h\|^۲) \\ &= \min\{A_\Lambda, A_\Theta\}.\langle (L_۱^*L_۱ + L_۲^*L_۲)h, h\rangle \\ &= A.\min\{A_\Lambda, A_\Theta\}\|h\|^۲.\end{aligned}$$

برای حالت خاص کافیست $L_۱ = \alpha I$ و $L_۲ = \beta I$ در نظر بگیریم. □

گزاره ۷.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *هر دو g-قاب پیوسته‌ی پارسوال مجزای قوی باشند و* $L_۱, L_۲ \in B(\mathcal{H})$. *برای ثابت* $A > ۰$ *داریم* $L_۱^*L_۱ + L_۲^*L_۲ = AI$ *اگر و تنها اگر خانواده‌ی* $\Lambda L_۱ + \Theta L_۲ = \{\Lambda_\omega L_۱ + \Theta_\omega L_۲ \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک g-قاب پیوسته‌ی تنگ با کران* A

باشد. در حالت خاص برای $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *خانواده‌ی* $\alpha\Lambda+\beta\Theta = \{\alpha\Lambda_\omega+\beta\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی تنگ است اگر و تنها اگر* $|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ > ۰$.

اثبات. برای هر $h \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|(\Lambda_\omega L_۱ + \Theta_\omega L_۲)h\|^۲ d\mu(\omega) &= \|T_\Lambda^* L_۱ h + T_\Theta^* L_۲ h\|^۲ \\ &= \|T_\Lambda^* L_۱ h\|^۲ + \|T_\Theta^* L_۲ h\|^۲ \\ &= \|L_۱ h\|^۲ + \|L_۲ h\|^۲ \\ &= \langle (L_۱^* L_۱ + L_۲^* L_۲)h, h\rangle = A\|h\|^۲.\end{aligned}$$

برای حالت خاص کافیست $L_۱ = \alpha I$ و $L_۲ = \beta I$ در نظر بگیریم. □

نتیجه ۸.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$*،* g*-قاب‌های پیوسته‌ی پارسوال مجزای قوی باشند و* $L_۱, L_۲ \in B(\mathcal{H})$. $L_۱^* L_۱ + L_۲^* L_۲ = I$ *اگر و تنها اگر خانواده‌ی* $\Lambda L_۱ + \Theta L_۲ = \{\Lambda_\omega L_۱ + \Theta_\omega L_۲ \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی پارسوال باشد. در حالت خاص برای* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *خانواده‌ی* $\alpha\Lambda+\beta\Theta = \{\alpha\Lambda_\omega+\beta\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی پارسوال است اگر و تنها اگر* $|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ = ۱$.

حال برای بدست آوردن g-قاب‌های پیوسته دوگان از g-قاب‌های پیوسته مجزای قوی نتایجی از [۱، ۹] را تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۹.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Psi = \{\Psi_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *به ترتیب دوگان‌های* g*-قاب‌های پیوسته* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Phi = \{\Phi_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *باشند. اگر* Λ*،* Φ *و* Θ*،* Ψ *مجزای قوی باشند، آن‌گاه خانواده‌های* $\Gamma = \{\Gamma_\omega \in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Delta = \{\Delta_\omega \in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *دوگان هستند، که برای هر* $h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$ *و* $\omega \in \Omega$*،*

$$\Gamma_\omega(h\oplus k) = \Lambda_\omega h + \Psi_\omega k, \quad \Delta_\omega(h\oplus k) = \Theta_\omega h + \Phi_\omega k.$$

اثبات. واضح است که Γ و Δ خانواده‌های g-بسل پیوسته برای $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ هستند. برای هر $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ و $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \langle \Gamma_\omega(h_1 \oplus k_1), \Delta_\omega(h_2 \oplus k_2)\rangle d\mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \langle \Lambda_\omega h_1, \Theta_\omega h_2\rangle d\mu(\omega) + \int_\Omega \langle \Lambda_\omega h_1, \Phi_\omega k_2\rangle d\mu(\omega)\\
&+ \int_\Omega \langle \Psi_\omega k_1, \Theta_\omega h_2\rangle d\mu(\omega) + \int_\Omega \langle \Psi_\omega k_1, \Phi_\omega k_2\rangle d\mu(\omega)\\
&= \langle h_1, h_2\rangle + \langle k_1, k_2\rangle\\
&= \langle h_1 \oplus k_1, h_2 \oplus k_2\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین بنا به گزاره‌ی ۲.۳ مقاله‌ی [۲]، Γ و Δ، g-قاب‌های پیوسته‌ی دوگان برای $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ هستند. □

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم $F : \Omega \to \mathcal{H}$ و $G : \Omega \to \mathcal{K}$ قاب‌های پیوسته باشند. خانواده‌های $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathbb{C}^2) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathbb{C}^2) : \omega \in \Omega\}$ را در نظر می‌گیریم که برای هر $f \in \mathcal{H}$ و $\omega \in \Omega$،

$$\Lambda_\omega f = (\langle f, F(\omega)\rangle_{\mathcal{H}}, 0) \quad , \Theta_\omega f = (\langle S_F^{-1} f, F(\omega)\rangle_{\mathcal{H}}, 0).$$

واضح است که Λ و Θ هر دو g-قاب پیوسته هستند. همچنین برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم

$$\int_\Omega \langle \Theta_\omega f, \Lambda_\omega g\rangle d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f, S_F^{-1} F(\omega)\rangle \langle F(\omega), g\rangle d\mu(\omega) = \langle f, g\rangle.$$

بنابراین Λ و Θ دوگان هستند. به طور مشابه خانواده‌های $\Phi = \{\Phi_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2) : \omega \in \Omega\}$ و $\Psi = \{\Psi_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2) : \omega \in \Omega\}$ که برای هر $g \in \mathcal{K}$ و $\omega \in \Omega$،

$$\Phi_\omega g = (0, \langle S_G^{-1} g, G(\omega)\rangle_{\mathcal{K}}), \quad \Psi_\omega g = (0, \langle g, G(\omega)\rangle_{\mathcal{K}}),$$

دوگان هستند. از طرف دیگر برای هر $f \in \mathcal{H}$ و $g \in \mathcal{K}$ داریم

$$\langle T_\Lambda^* f, T_\Phi^* g\rangle = \int_\Omega \langle \Lambda_\omega f, \Phi_\omega g\rangle d\mu(\omega) = ۰.$$

بنابراین Λ و Φ مجزای قوی هستند. همچنین به طور مشابه Θ و Ψ مجزای قوی هستند. برای هر $f \in \mathcal{H}$، $g \in \mathcal{K}$ و $\omega \in \Omega$ عملگرهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_\omega : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathbb{C}^۲, \quad \Gamma_\omega(f \oplus g) = (\langle f, F(\omega)\rangle_{\mathcal{H}}, \langle g, G(\omega)\rangle_{\mathcal{K}}),$$

و

$$\Delta_\omega : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathbb{C}^۲, \quad \Delta_\omega(f \oplus g) = (\langle S_F^{-۱} f, F(\omega)\rangle_{\mathcal{H}}, \langle S_G^{-۱} g, G(\omega)\rangle_{\mathcal{K}}).$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \Gamma_\omega(h_۱ \oplus k_۱), \Delta_\omega(h_۲ \oplus k_۲)\rangle d\mu(\omega) &= \int_\Omega \langle h_۱, F(\omega)\rangle_{\mathcal{H}} \langle S_F^{-۱} F(\omega), h_۲\rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\omega)\\ &+ \int_\Omega \langle k_۱, G(\omega)\rangle_{\mathcal{K}} \langle S_G^{-۱} G(\omega), k_۲\rangle_{\mathcal{K}} d\mu(\omega)\\ &= \langle h_۱, h_۲\rangle + \langle k_۱, k_۲\rangle\\ &= \langle h_۱ \oplus k_۱, h_۲ \oplus k_۲\rangle.\end{aligned}$$

که گزاره‌ی ۹.۲ تایید کننده این نتیجه می‌باشد.

گزاره ۱۱.۲. *فرض‌کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *هر دو g-قاب پیوسته‌ی مجزای قوی باشند و* $L_۱, L_۲ \in B(\mathcal{H})$. *اگر $L_۱$ پوشا باشد، آن‌گاه خانواده‌ی* $\widetilde{\Lambda} L_۱^\dagger = \{\Lambda_\omega S_\Lambda^{-۱} L_۱^\dagger \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *دوگان خانواده‌های* $\Lambda L_۱^* = \{\Lambda_\omega L_۱^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Lambda L_۱^* + \Theta L_۲^* = \{\Lambda_\omega L_۱^* + \Theta_\omega L_۲^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *می‌باشد.*

اثبات. واضح است که خانواده‌های $\widetilde{\Lambda}L_1^{\dagger}$، ΛL_1^* و $\Lambda L_1^* + \Theta L_2^*$ هر سه g-بسل پیوسته هستند. چون L_1 پوشاست، لذا بنا به لم ۳.۲، $L_1^{\dagger} \in B(\mathcal{H})$ وجود دارد به طوری که $L_1 L_1^{\dagger} = I$. بنا به (۴.۱) و (۶.۱) برای هر $h, k \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \langle (\Lambda_{\omega} L_1^* + \Theta_{\omega} L_2^*)h, \Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle d\mu(\omega) \\
&= \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_1^* h, \Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \langle \Theta_{\omega} L_2^* h, \Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle d\mu(\omega) \\
&= \langle T_{\Lambda}^* L_1^* h, T_{\Lambda}^* S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle + \langle T_{\Theta}^* L_2^* h, T_{\Lambda}^* S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle \\
&= \langle L_1^* h, T_{\Lambda} T_{\Lambda}^* S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle + 0 \\
&= \langle L_1^* h, S_{\Lambda} S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} k\rangle = \langle L_1^* h, L_1^{\dagger} k\rangle = \langle h, L_1 L_1^{\dagger} k\rangle = \langle h, k\rangle.
\end{aligned}$$

همچنین به طور مشابه داریم

$$\int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega} L_1^* f, \Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} L_1^{\dagger} g\rangle d\mu(\omega) = \langle L_1^* f, L_1^{\dagger} g\rangle = \langle f, L_1 L_1^{\dagger} g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

بنابراین برهان کامل است. □

نتیجه ۱۲.۲. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_{\omega} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\omega}) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Theta = \{\Theta_{\omega} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\omega}) : \omega \in \Omega\}$، *$g$-قاب‌های پیوسته‌ی مجزای قوی باشند. در این صورت خانواده‌ی* $\widetilde{\Lambda} = \{\Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\omega}) : \omega \in \Omega\}$ *دوگان خانواده‌های* $\Lambda = \{\Lambda_{\omega} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\omega}) : \omega \in \Omega\}$ *و* $\Lambda + \Theta = \{\Lambda_{\omega} + \Theta_{\omega} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\omega}) : \omega \in \Omega\}$ *می‌باشد.*

اثبات. با در نظر گرفتن $L_1 = L_2 = I$ در گزاره‌ی ۱۱.۲، برهان کامل است. □

۳. نتایجی برای g-قاب‌های پیوسته‌ی ریس-گونه

در این بخش با تعمیم نتایجی از مقاله [۱۲]، شرایط معادل برای g-قاب‌های پیوسته‌ی ریس-گونه بدست می‌آوریم.

قضیه ۱.۳. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک* g*-قاب پیوسته باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) Λ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه است.*

(۲) ثابت‌های $A, B > 0$ *وجود دارند به طوری که*

$$A\|\phi\|^2 \leq \|T_\Lambda \phi\|^2 \leq B\|\phi\|^2, \quad \phi \in \widehat{\mathcal{K}}. \qquad (۱.۳)$$

(۳) اگر برای $\phi \in \widehat{\mathcal{K}}$ *و هر* $f \in \mathcal{H}$ *رابطه‌ی زیر برقرار باشد،*

$$\int_\Omega \langle \Lambda_\omega^* \phi(\omega), f\rangle d\mu(\omega) = 0,$$

آن‌گاه $\phi = 0$.

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱) بنا به گزاره‌ی ۶.۱، کافی است طرف سمت چپ نامساوی (۱.۳) را ثابت کنیم. بنا به قضیه‌ی ۹.۱، برای هر $\phi \in \widehat{\mathcal{K}}$، $f \in \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که $T_\Lambda^* f = \phi$. از طرف دیگر با توجه به اینکه از گزاره‌ی ۵.۱ عملگر S_Λ مثبت بوده و با بکارگیری نامساوی سمت چپ (۲.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^4 = (\|T_\Lambda^* f\|^2)^2 = (\langle T_\Lambda^* f, T_\Lambda^* f\rangle)^2 &= (\langle T_\Lambda T_\Lambda^* f, f\rangle)^2 \\
&= (\langle S_\Lambda f, f\rangle)^2 \\
&= |\langle S_\Lambda f, f\rangle|^2 \\
&\leq \|S_\Lambda f\|^2 \|f\|^2 \\
&\leq \frac{1}{A_\Lambda}\|S_\Lambda f\|^2 \int_\Omega \|\Lambda_\omega f\|^2 d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$A_\Lambda \|\phi\|^2 \leq \|S_\Lambda f\|^2 = \|T_\Lambda T_\Lambda^* f\|^2 = \|T_\Lambda \phi\|^2.$$

(۳) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم برای $\phi \in \widehat{\mathcal{K}}$ و هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\langle T_\Lambda \phi, f\rangle = \int_\omega \langle \Lambda_\omega^* \phi(\omega), f\rangle d\mu(\omega) = \circ .$$

در این صورت $T_\Lambda \phi = \circ$ و بنا به نامساوی (۱.۳)، داریم $\phi = \circ$.
(۱) $\Rightarrow$ (۳) چون Λ یک g-قاب پیوسته است، پس عملگر T_Λ پوشاست و همچنین بنا به قسمت (۳)، عملگر T_Λ یک به یک هم می‌باشد. بنابراین عملگر T_Λ معکوس‌پذیر است و لذا T_Λ^* معکوس‌پذیر است.
در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۹.۱، برهان کامل است. $\square$

فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ خانواده‌های g-بسل پیوسته باشند. عملگر خوش تعریف خطی کراندار $S_{\Lambda\Theta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ که

$$\langle S_{\Lambda\Theta} f, g\rangle = \int_\Omega \langle \Theta_\omega f, \Lambda_\omega g\rangle d\mu(\omega), \quad f, g \in \mathcal{H}, \tag{۲.۳}$$

را در نظر می‌گیریم. داریم $S_{\Theta\Lambda} = T_\Theta T_\Lambda^*$ و بنابراین $S_{\Theta\Lambda} = S_{\Lambda\Theta}^*$. همچنین برای $\Lambda = \Theta$ داریم $S_{\Lambda\Lambda} = S_\Lambda$.

در قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای اینکه خانواده‌ی حاصل از جمع دو خانواده g-بسل پیوسته، یک g-قاب پیوسته ریس-گونه باشد را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ خانواده‌های g-بسل پیوسته باشند به طوری که $S_{\Lambda\Theta} = I_{\mathcal{H}}$. عملگرهای خطی کراندار $L_1, L_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $L_1^* L_2 = I$. آن‌گاه شرایط زیر معادل هستند:*
(۱) $\Gamma = \{\Lambda_\omega L_1 + \Theta_\omega L_2 \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه می‌باشد.
(۲) عملگر $T_\Lambda^* L_1 + T_\Theta^* L_2$ پوشاست.
(۳) ثابت $M > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$M\|\phi\|^2 \le \|(L_1^* T_\Lambda + L_2^* T_\Theta)\phi\|^2, \quad \phi \in \widehat{\mathcal{K}}.$$

اثبات. (۲) $\Leftrightarrow$ (۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \|(\Lambda_\omega L_1 + \Theta_\omega L_2)f\|^2 d\mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \|\Lambda_\omega L_1 f\|^2 d\mu(\omega) + \int \langle \Lambda_\omega L_1 f, \Theta_\omega L_2 f\rangle d\mu(\omega)\\
&+ \int \langle \Theta_\omega L_2 f, \Lambda_\omega L_1 f\rangle d\mu(\omega) + \int_\Omega \|\Theta_\omega L_2 f\|^2 d\mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \|\Lambda_\omega L_1 f\|^2 d\mu(\omega) + 2\|f\|^2 + \int_\Omega \|\Theta_\omega L_2 f\|^2 d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$2\|f\|^2 \leq \int_\Omega \|(\Lambda_\omega L_1 + \Theta_\omega L_2)f\|^2 d\mu(\omega) \leq (B_\Lambda \|L_1\|^2 + 2 + B_\Theta \|L_2\|^2)\|f\|^2.$$

لذا Γ یک g-قاب پیوسته می‌باشد. از طرف دیگر

$$T_\Gamma^* = T_\Lambda^* L_1 + T_\Theta^* L_2.$$

در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۹.۱، (۱) و (۲) معادل هستند.

(۳) $\Leftrightarrow$ (۱) چون $T_\Gamma = L_1^* T_\Lambda + L_2^* T_\Theta$، لذا بنا به قضیه‌ی ۱.۳، برهان کامل است. □

گزاره ۳.۳. *فرض کنیم (Ω, μ) فضای اندازه‌ی σ-متناهی باشد و $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ یک g-قاب پیوسته و $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ خانواده‌ی g-بسل پیوسته باشد. اگر عملگر $S_{\Theta\Lambda}$ پوشا باشد، آن‌گاه Θ یک g-قاب پیوسته می‌باشد. همچنین اگر Θ یک g-قاب پیوسته و Λ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه باشد، آن‌گاه $S_{\Theta\Lambda}$ پوشاست.*

اثبات. چون $S_{\Theta\Lambda}$ پوشاست، بنا به رابطه‌ی $S_{\Theta\Lambda} = T_\Theta T_\Lambda^*$ عملگر T_Θ پوشاست. از طرفی بنا به گزاره‌ی ۶.۱، عملگر T_Θ کراندار است. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۷.۱، Θ یک g-قاب پیوسته است. اگر Λ یک g-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه و Θ یک g-قاب پیوسته باشد، در این صورت بنا به قضیه‌های ۹.۱ و ۷.۱، عملگرهای T_Λ^* و T_Θ پوشا هستند و بنابراین عملگر $S_{\Theta\Lambda}$ پوشاست. □

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم* $\Lambda = \{\Lambda_\omega \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *یک* g*-قاب پیوسته و* $\Theta = \{\Theta_\omega \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\omega) : \omega \in \Omega\}$ *خانواده‌ی* g*- بسل پیوسته باشد و ثابت* λ *که* $0 < \lambda < A_\Lambda$*، وجود داشته باشد به طوری‌که*

$$\|S_{\Theta\Lambda} f - S_\Lambda f\| \leq \lambda \|f\|, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Λ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه است اگر و تنها اگر* Θ *یک* g*-قاب پیوسته‌ی ریس-گونه باشد.*

اثبات. برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} \|S_{\Theta\Lambda} f\| = \|S_{\Theta\Lambda} f - S_\Lambda f + S_\Lambda f\| &\geq \|S_\Lambda f\| - \|S_{\Theta\Lambda} f - S_\Lambda f\| \\ &\geq (A_\Lambda - \lambda)\|f\|. \end{aligned}$$

لذا $S_{\Theta\Lambda}$ عملگر یک به یک با برد بسته است. از طرف دیگر

$$\|S_{\Lambda\Theta} f - S_\Lambda f\| \leq \|(S_{\Theta\Lambda} - S_\Lambda)^*\| \|f\| \leq \lambda \|f\|.$$

بنابراین $S_{\Lambda\Theta}$ هم عملگر یک به یک با برد بسته می‌باشد. بنابراین

$$\operatorname{ran} S_{\Theta\Lambda} = (\ker S_{\Lambda\Theta})^\perp = \mathcal{H},$$

و $\operatorname{ran} S_{\Lambda\Theta} = \mathcal{H}$. پس $S_{\Theta\Lambda}$ و $S_{\Lambda\Theta}$ معکوس‌پذیر هستند و لذا بنا به رابطه‌ی $S_{\Theta\Lambda} = T_\Theta T_\Lambda^*$ و $S_{\Theta\Lambda} = T_\Theta T_\Lambda^*$، عملگر T_Λ^* معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر T_Θ^* معکوس‌پذیر باشد. درنتیجه بنا به قضیه‌ی ۹.۱، برهان کامل است. □

مراجع

[1] M.R. Abdollahpour, Dilation of dual g-frames to dual g-Riesz bases, *Banach J. Math. Anal.*, **9**(1) (2015), 54–66.

[2] M.R. Abdollahpour and M.H. Faroughi, Continuous g-frames in Hilbert spaces, *Southeast Asian Bull. Math.*, **32**(1) (2008), 1–19.

[3] M.R. Abdollahpour and Y. Khedmati, On some properties of continuous g-frames and Riesz-type continuous g-frames, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **48**(1) (2017), 59–74.

[4] S.T. Ali, J.P. Antoine and J.P. Gazeau, Continuous frames in Hilbert space, *Ann. Phys.*, **222**(1) (1993), 1–37.

[5] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases,* Applied and Numerical Harmonic Analysis, Boston: Birkhäuser, (2016).

[6] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72**(2) (1952), 341–366.

[7] J.P. Gabardo and D. Han, Frames associated with measurable space, *Adv. Comput. Math.*, **18**(2) (2003), 127–147.

[8] X. Guo, Constructions of frames by disjoint frames, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **35**(5) (2014), 576–587.

[9] X. Guo, Characterizations of disjointness of g-frames and constructions of g-frames in Hilbert spaces, *Complex Anal. Oper. Theory*, **8**(7) (2014), 1547–1563.

[10] D. Han and D. Larson, Frames, bases and group representations, *Mem. Am. Math. Soc.*, **697** (2000), 149–182.

[11] W. Sun, G-frames and g-Riesz bases, *J. Math. Anal. Appl.*, **322**(1) (2006), 437–452.

[12] Z.Q. Xiang, New characterizations of Riesz-type frames and stability of alternate duals of continuous frames, *Adv. Math. Phys.*, **2013**(697) (2013), 1–11.