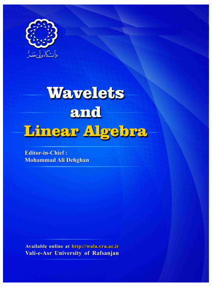
موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۷۹-۹۴



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

الگوریتمی برای محاسبه معکوس هر ماتریس r- قطری

مریم شمس سولاری*[آ]، مهران رسولی[آ]

[آ]دانشکده ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۴ آبان ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۲۲ مرداد ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: حمیدرضا افشین

کلمات کلیدی:

ماتریس r- قطری، تجزیه دولیتل LU، الگوریتم، معکوس ماتریس.

چکیده

با توجه به اهمیت و کاربرد ماتریس‌های نواری (چندقطری) در حل مسائل مختلف علوم پایه و مهندسی، در این مقاله کوشیده‌ایم یک الگوریتم کلی برای بدست آوردن معکوس هر ماتریس r- قطری ارائه دهیم. برای این منظور با استفاده از تجزیه دولیتل LU ماتریس، فرمولها و روابطی برای محاسبه معکوس ماتریس بدست می‌آوریم که به سهولت و کاهش عملیات در مقایسه با معکوس معمولی می‌انجامد. سپس الگوریتم نهایی را براساس این روابط پیاده‌سازی و هزینه محاسبات هر گام را تعیین می‌کنیم. در پایان با کمک مثال‌های عددی درستی مطالب بیان شده را نشان می‌دهیم.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: shamssolary@gmail.com (مریم شمس سولاری)، mehran.aban@gmail.com (مهران رسولی).

http://doi.org/10.22072/wala.2020.116775.1255

۱. مقدمه

اغلب پس از مدل‌سازی مسائل مهم ریاضیات و مهندسی با دستگاه‌های خطی یا غیرخطی مواجه می‌شویم که در آنها تعیین وجود یا عدم وجود جواب و یا راهی برای تخمین جواب (در صورت وجود) به ارزیابی ماتریس ضرایب وابسته است. محاسبه دترمینان و معکوس ماتریس ضرایب در صورت امکان، یکی از کاربردی‌ترین شاخص‌ها برای این ارزیابی می‌باشد. برخی از این مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل و انتگرال هستند که در مدل‌بندی مفاهیم پدیده‌های مهندسی، فیزیکی و آماری شکل می‌گیرند. بنابراین می‌توان ادعا کرد که دستیابی به الگوریتم‌های حتی‌الامکان سریع برای محاسبه دترمینان و معکوس ماتریس‌ها یک ابزار بسیار مهم در جبرخطی عددی می‌باشد. بدیهی است مدل‌سازی مسائل مختلف منجر به تولید ماتریس‌های متفاوتی از نظر ساختاری می‌شود و بنا بر درجه اهمیت و کاربرد آن‌ها الگوریتم‌های محاسبه دترمینان و معکوس انواع خاصی از آن‌ها گسترش بیشتری پیدا کرده است. از جمله ماتریس‌های معروف در این زمینه می‌توان ماتریس‌های نواری را نام برد، که در بسیاری از مسائل کاربردی ظاهر می‌شوند و نیاز به تعیین معکوس آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله الگوریتمی برای محاسبه معکوس هر ماتریس نواری rـ قطری ارائه شده است.

شکل کلی یک ماتریس rـ قطری $n \times n$ که در آن $(r = ۲m + ۱ : m = ۱, ۲, \dots)$ و m تعداد قطرهای ناصفر بالا یا پایین قطر اصلی را نشان می‌دهد، بصورت زیر است:

$$G_{m,n} = \begin{bmatrix} d_۱ & a_{۱,۱} & a_{۲,۱} & \cdots & a_{m,۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ b_{۱,۱} & d_۲ & a_{۱,۲} & a_{۲,۲} & \cdots & a_{m,۲} & \ddots & \vdots \\ b_{۲,۱} & b_{۱,۲} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & b_{۲,۲} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m,n-m} \\ b_{m,۱} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ۰ & b_{m,۲} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{۲,n-۲} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{۱,n-۱} \\ ۰ & \cdots & ۰ & b_{m,n-m} & \cdots & b_{۲,n-۲} & b_{۱,n-۱} & d_n \end{bmatrix}. \qquad (۱.۱)$$

در این مقاله یک ماتریس rـ قطری را بصورت یک ماتریس (r,k)ـ قطری که در آن $(r = ۲m + ۱ : m = ۱, ۲, \ldots)$ است، نشان می‌دهیم. m تعداد قطرهای ناصفر بالا یا پایین قطر اصلی و k فاصله بین این قطرهای ناصفر را نشان می‌دهد مثلا برای ماتریس هفت‌قطری معمولی داریم: $r = ۷,\ m = ۳,\ k = ۱$.
ماتریس زیر یک ماتریس $n \times n$ و (r,k)ـ قطری که در آن $(r = ۲m + ۱ : m = ۱, ۲, \ldots)$ است:

$$G_{m,n}^{(k)} = \begin{bmatrix}
d_۱ & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۱,۱} & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۲,۱} & ۰ & \cdots & ۰ & \cdots & a_{m,۱} & \cdots & ۰ \\
۰ & d_۲ & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۱,۲} & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۲,۲} & ۰ & \cdots & ۰ & \cdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & ۰ & d_۳ & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۱,۳} & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۲,۳} & ۰ & \cdots & ۰ & \cdots & a_{m,n-mk} \\
۰ & \vdots & ۰ & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\
b_{۱,۱} & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & ۰ \\
۰ & b_{۱,۲} & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & ۰ & b_{۱,۳} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & ۰ \\
۰ & \vdots & ۰ & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & a_{۲,n-۲k} \\
b_{۲,۱} & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & ۰ \\
۰ & b_{۲,۲} & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & ۰ & b_{۲,۳} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & ۰ \\
۰ & \vdots & ۰ & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & a_{۱,n-k} \\
\vdots & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & ۰ \\
b_{m,۱} & \vdots & ۰ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & ۰ \\
۰ & \cdots & b_{m,n-mk} & \cdots & ۰ & \cdots & ۰ & b_{۲,n-۲k} & ۰ & \cdots & ۰ & b_{۱,n-k} & ۰ & \cdots & ۰ & d_n
\end{bmatrix} \tag{۲.۱}$$

همچنین $a_{j,i}$ و $b_{j,i}$ دنباله‌های متناهی از اعداد غیرصفر هستند به‌ازای $(j = ۱, ۲, \ldots, m)$ و $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ و در غیراینصورت،

$$a_{j,n-jk+۱} = a_{j,n-jk+۲} = \cdots = a_{j,n} = ۰,$$

$$b_{j,n-jk+۱} = b_{j,n-jk+۲} = \cdots = b_{j,n} = ۰.$$

ماتریس $G_{m,n}^{(k)}$ به‌ازای ۱ $= m$ یک ماتریس kـ سه‌قطری و به‌ازای ۲ $= m$ یک ماتریس kـ پنج‌قطری است که بحث در مورد کاربرد و الگوریتم تعیین معکوس آنها در [۴، ۸] آمده است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از لم زیر و مراجع [۴، ۷، ۸] الگوریتمی برای تعیین معکوس هر ماتریس (r,k)ـ قطری ارائه می‌دهیم.

لم ۱.۲. *[۶، ۹] فرض کنید D_k، برای $k = ۱,۲,\ldots,n$ مرتبه کهادهای اصلی پیشرو ماتریس $G_{m,n}^{(k)}$ باشند، اگر D_kـ ها به‌ازای $k = ۱,۲,\ldots,n$ مخالف صفر باشند، آنگاه ماتریس $G_{m,n}^{(k)}$ تنها یک تجزیه دولیتل LU بصورت،*

$$G_{m,n}^{(k)} = L_{m,n}^{(k)} U_{m,n}^{(k)} \tag{۱.۲}$$

دارد که در آن ماتریس‌های L و U به شکل

$$L_{m,n}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \vdots & 0 & \ddots & & & & & & & & & & & & \\
l_{1,1} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & \\
0 & l_{1,2} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \\
\vdots & 0 & l_{1,3} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \\
0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
l_{2,1} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
0 & l_{2,2} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
\vdots & 0 & l_{2,3} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\
l_{m,1} & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & l_{m,n-mk} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & l_{2,n-2k} & 0 & \cdots & 0 & l_{1,n-k} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{2.2}$$

$$U^{(k)}_{m,n} = \begin{bmatrix}
t_1 & 0 & \cdots & 0 & u_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & u_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & u_{m,1} & \cdots & 0 \\
0 & t_2 & 0 & \cdots & 0 & u_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & u_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & t_3 & 0 & \cdots & 0 & u_{1,3} & 0 & \cdots & 0 & u_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & u_{m,n-mk} \\
& & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\
& & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
& & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
& & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\
& & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & u_{2,n-2k} \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
& & & & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
& & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\
& & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & u_{1,n-k} \\
& & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & t_n
\end{bmatrix} \tag{۳.۲}$$

هستند و $det(G^{(k)}_{m,n}) = \prod_{i=1}^{n} t_i$.

حال با جایگذاری (۲.۱)، (۲.۲) و (۳.۲) در (۱.۲) روابط زیر را بدست می‌آوریم،

$$t_i = \begin{cases} d_i & i = 1, 2, \ldots, k, \\ d_i - \sum\limits_{q=p}^{1} l_{q,i-qk} u_{q,i-qk} & p = 1, \ldots, m-1, i = pk+1, \ldots, (p+1)k, \\ d_i - \sum\limits_{q=m}^{1} l_{q,i-qk} u_{q,i-qk} & i = mk+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{۴.۲}$$

برای $j = ۱, \ldots, m - ۱$ داریم،

$$u_{j,i} = \begin{cases} a_{j,i} & i = ۱, \ldots, k, \\ a_{j,i} - \sum\limits_{q=p}^{۱} l_{q,i-qk} u_{j+q,i-qk} & p = ۱, \ldots, m-j-۱, i = pk+۱, \ldots, (p+۱)k, \\ a_{j,i} - \sum\limits_{q=p}^{۱} l_{q,i-qk} u_{j+q,i-qk} & p = m-j, i = (m-j)k+۱, \ldots, n-jk, \end{cases} \tag{۵.۲}$$

$$u_{m,i} = a_{m,i} \qquad i = ۱, \ldots, n - mk.$$

$$l_{j,i} = \begin{cases} \frac{b_{j,i}}{t_i} & i = ۱, \ldots, k, \\ \frac{b_{j,i} - \sum_{q=p}^{۱} l_{j+q,i-qk} u_{q,i-qk}}{t_i} & p = ۱, \ldots, m-j-۱, i = pk+۱, \ldots, (p+۱)k, \\ \frac{b_{j,i} - \sum_{q=p}^{۱} l_{j+q,i-qk} u_{q,i-qk}}{t_i} & p = m-j, i = (m-j)k+۱, \ldots, n-jk, \end{cases} \tag{۶.۲}$$

$$l_{m,i} = \frac{b_{m,i}}{t_i} \qquad i = ۱, \ldots, n - mk.$$

با استفاده از روابط (۴.۲)، (۵.۲) و (۶.۲) می‌توانیم روابط مربوط به تجزیه دولیتل LU ماتریس $G_{m,n}^{(k)}$ را به‌ازای هر m دلخواه تعیین کنیم.

حال اگر ماتریس (۲.۱) ناتکین باشد آنگاه $(G_{m,n}^{(k)})^{-۱} = S = (S_۱, S_۲, \ldots, S_n)^t$ که S_j، jـ‌امین سطر ماتریس $(G_{m,n}^{(k)})^{-۱}$ به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, n$ است.

با استفاده از $G_{m,n}^{(k)}(G_{m,n}^{(k)})^{-۱} = E$ (E یک ماتریس همانی $n \times n$ است) داریم، $L_{m,n}^{(k)}(U_{m,n}^{(k)} S) = E$. قرار دهید،

$$L_{m,n}^{(k)} X = E \tag{۷.۲}$$

آنگاه

$$U^{(k)}_{m,n} S = X \qquad (۸.۲)$$

که $X = (X_1, \dots, X_n)^t$، $E = (E_1, \dots, E_n)^t$ و $S = (S_1, \dots, S_n)^t$.

به ترتیب با استفاده از (۷.۲) و (۸.۲) داریم،

$$X_i = \begin{cases} E_i & i = 1, 2, \dots, k, \\ E_i - \sum\limits_{q=1}^{p} l_{q,i-qk} X_{i-qk} & p = 1, \dots, m-1, i = pk+1, \dots, (p+1)k, \\ E_i - \sum\limits_{q=1}^{m} l_{q,i-qk} X_{i-qk} & i = mk+1, \dots, n. \end{cases} \qquad (۹.۲)$$

$$S_i = \begin{cases} \frac{X_i}{t_i} & i = n, n-1, \dots, n-k+1, \\ \frac{X_i - \sum\limits_{q=1}^{p} u_{q,i} S_{i+qk}}{t_i} & p = 1, \dots, m-1, i = n-pk, \dots, n-(p+1)k+1, \\ \frac{X_i - \sum\limits_{q=1}^{m} u_{q,i} S_{i+qk}}{t_i} & i = n-mk, \dots, 1. \end{cases} \qquad (۱۰.۲)$$

اکنون با استفاده از (۴.۲)، (۵.۲)، (۶.۲)، (۹.۲) و (۱۰.۲) به ساخت الگوریتم می‌پردازیم.

۱.۲. *الگوریتمی برای تعیین معکوس هر ماتریس (r, k)-قطری:*

الگوریتم ۲.۲. *ورودی:* مقدار m، مقدار k و ماتریس $G^{(k)}_{m,n}$.

خروجی: ماتریس معکوس، W.

گام اول:

For $p = 0, 1, \dots, m$ ***do***

For $i = pk+1, \dots, (p+1)k$ ***do***

$$t_i = G_{i,i} - \sum_{q=p}^{1} l_{q,i-qk} u_{q,i-qk}$$

If $t_i = 0$ ***then*** $t_i = z$ ***end if.***

For $j = 1, 2, \ldots, m-p$ ***do***

$u_{j,i} = G_{i,jk+i} - \sum_{q=p}^{1} l_{q,i-qk} u_{j+q,i-qk}$

$l_{j,i} = \frac{G_{jk+i,i} - \sum_{q=p}^{1} l_{j+q,i-qk} u_{q,i-qk}}{t_i}$

end do

if $p \geq 1$***then***

For $j = m, m-1, \ldots, m-p+1$ ***do***

$u_{j,i} = G_{i,jk+i} - \sum_{q=m-j}^{1} l_{q,i-qk} u_{j+q,i-qk}$

$l_{j,i} = \frac{G_{jk+i,i} - \sum_{q=m-j}^{1} l_{j+q,i-qk} u_{q,i-qk}}{t_i}$

end do

end if

end do

end do.

گام دوم:

$det(G_{m,n}^{(k)}) = \prod_{i=1}^{n} t_i$ را محاسبه کن، سپس $z = 0$ را جایگذاری کن اگر $det(G_{m,n}^{(k)}) = 0$ ماتریس $G_{m,n}^{(k)}$ تکین است. در اینصورت عبارت (ماتریس تکین است) را در خروجی چاپ کن و توقف الگوریتم.

گام سوم:

For $p = 0, 1, \ldots, m$ ***do***

For $i = pk+1, pk+2, \ldots, (p+1)k$ ***do***

$X_i = E_i - \sum_{q=1}^{p} l_{q,i-qk} X_{i-qk}$

end do

end do.

گام چهارم:

For $p = 0, 1, \ldots, m$ ***do***

For $i = n - pk, n - pk - 1, \ldots, n - (p+1)k + 1$ ***do***

$$S_i = \frac{X_i - \sum_{q=1}^{p} u_{q,i} S_{i+qk}}{t_i}$$

end do

end do.

گام پنجم:

ماتریس معکوس، $W|_{z=0}$ *است.*

۲.۲ . *هزینه محاسباتی الگوریتم جدید و مثال‌های عددی*

در این بخش هزینه محاسباتی در هر گام از الگوریتم (۲.۲) را در قالب جدول آورده و سپس چند مثال عددی برای بررسی بیشتر زمان و دقت محاسبات ارائه می‌کنیم.

جدول ۱: هزینه محاسبات الگوریتم

گام	۱	۲	۳	۴
$\times, \backslash$	$m(m+1)n - \frac{mk(2m^2+3m+1)}{6}$	n	$mn^2 - (\frac{m(m+1)}{2})nk$	$(m+1)n^2 - (\frac{m(m+1)}{2})nk$
$+, -(=)$	$(m^2+1)n - \frac{mk(2m^2+3m-5)}{6}$	0	$mn^2 - (\frac{m^2+m-2}{2})nk$	$mn^2 - (\frac{m(m+1)}{2})nk$

مثال ۳.۲. معکوس ماتریس یازده‌قطری ۱۱ × ۱۱ زیر را بیابید.

$$G_{5,11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:با استفاده از الگوریتم ۲.۲ داریم:

- $det(G_{5,11}^{(2)}) = \prod_{i=1}^{11} t_i = 5250,$

$$W = \begin{bmatrix}
-\frac{۳}{۳۵} & ۰ & -\frac{۷۲}{۳۵} & ۰ & -\frac{۱۱}{۵} & ۰ & -\frac{۳۲}{۳۵} & ۰ & \frac{۸}{۵} & ۰ & \frac{۸۲}{۳۵} \\
۰ & -\frac{۱۱}{۲۵} & ۰ & \frac{۱۱}{۲۵} & ۰ & -\frac{۹}{۲۵} & ۰ & \frac{۲}{۲۵} & ۰ & -\frac{۱}{۵} & ۰ \\
\frac{۳}{۷} & ۰ & \frac{۴۴}{۷} & ۰ & ۷ & ۰ & \frac{۲۵}{۷} & ۰ & -۵ & ۰ & -\frac{۵۴}{۷} \\
۰ & \frac{۱}{۵۰} & ۰ & \frac{۱۱}{۷۵} & ۰ & \frac{۱۶}{۷۵} & ۰ & -\frac{۷}{۵۰} & ۰ & -\frac{۱}{۱۵} & ۰ \\
-\frac{۱۶}{۳۵} & ۰ & -\frac{۲۷۹}{۳۵} & ۰ & -\frac{۴۲}{۵} & ۰ & -\frac{۱۵۹}{۳۵} & ۰ & \frac{۳۱}{۵} & ۰ & \frac{۳۴۴}{۳۵} \\
۰ & \frac{۷}{۲۵} & ۰ & \frac{۴}{۷۵} & ۰ & -\frac{۱}{۷۵} & ۰ & \frac{۱}{۲۵} & ۰ & \frac{۱}{۱۵} & ۰ \\
-\frac{۶}{۳۵} & ۰ & -\frac{۳۹}{۳۵} & ۰ & -\frac{۷}{۵} & ۰ & -\frac{۲۹}{۳۵} & ۰ & \frac{۶}{۵} & ۰ & \frac{۵۹}{۳۵} \\
۰ & \frac{۳۳}{۵۰} & ۰ & -\frac{۳۷}{۷۵} & ۰ & \frac{۲۸}{۷۵} & ۰ & \frac{۱۹}{۵۰} & ۰ & \frac{۲}{۱۵} & ۰ \\
-\frac{۸}{۳۵} & ۰ & -\frac{۳۳۲}{۳۵} & ۰ & -\frac{۵۱}{۵} & ۰ & -\frac{۲۰۲}{۳۵} & ۰ & \frac{۳۸}{۵} & ۰ & \frac{۴۱۷}{۳۵} \\
۰ & -\frac{۲}{۵} & ۰ & \frac{۱}{۱۵} & ۰ & -\frac{۴}{۱۵} & ۰ & -\frac{۱}{۵} & ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\
\frac{۱۲}{۳۵} & ۰ & \frac{۳۲۳}{۳۵} & ۰ & \frac{۴۹}{۵} & ۰ & \frac{۱۹۸}{۳۵} & ۰ & -\frac{۳۷}{۵} & ۰ & -\frac{۳۹۸}{۳۵}
\end{bmatrix}.$$

میزان خطای نسبی الگوریتم ۲.۲ برابر است با،

$$\frac{\|GW - I\|_F}{\|I\|_F} = ۲٫۹۲۴۶ \times ۱۰^{-۱۵}.$$

مثال ۴.۲. معکوس ماتریس هفت‌قطری ۱۶×۱۶ زیر را بیابید.

$$G^{(۳)}_{۳,۱۶} = \begin{bmatrix}
۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
-۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\
۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\
۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\
۲ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\
۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & -۱ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱
\end{bmatrix}$$

حل:با استفاده از الگوریتم ۲.۲ داریم:

- $det(G^{(۳)}_{۳,۱۶}) = \prod_{i=۱}^{۱۶} t_i = ۷۲۰,$

$$W=\begin{bmatrix}
\frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & -\frac{5}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{5}{9} & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\\
0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -7 & 0\\
\frac{17}{36} & 0 & 0 & \frac{49}{36} & 0 & 0 & -\frac{73}{36} & 0 & 0 & \frac{11}{9} & 0 & 0 & \frac{41}{18} & 0 & 0 & -\frac{37}{12}\\
0 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\
\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{5}{12} & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\
0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0\\
-\frac{5}{36} & 0 & 0 & -\frac{25}{36} & 0 & 0 & \frac{49}{36} & 0 & 0 & -\frac{8}{9} & 0 & 0 & -\frac{29}{18} & 0 & 0 & \frac{25}{12}\\
0 & -\frac{9}{5} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-\frac{11}{36} & 0 & 0 & -\frac{19}{36} & 0 & 0 & \frac{43}{36} & 0 & 0 & -\frac{5}{9} & 0 & 0 & -\frac{17}{18} & 0 & 0 & \frac{19}{12}\\
0 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 0\\
-\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & 0 & -\frac{7}{12} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & -\frac{7}{4}
\end{bmatrix}$$

میزان خطای نسبی الگوریتم ۲.۲ برابر است با،

$$\frac{\|GW-I\|_F}{\|I\|_F}=3/2405\times 10^{-16}.$$

مثال ۵.۲. در این مثال الگوریتم ۲.۲ را برای n، m و k-های متفاوت زمانی که درایه‌های ماتریس بصورت تصادفی توسط نرم‌افزار *Matlab* انتخاب شوند، اجرا و نتایج زیر را بدست آوردیم:

جدول ۲: مقایسه زمان الگوریتم۲.۲ با دستور *inv* در *Matlab* و محاسبه خطای نسبی

n	m	k	$time(Alg.۲/۲)$	$time(inv)$	$\frac{\|GW-I\|_F}{\|I\|_F}$
۳۰۰۰	۹	۶	۰/۷۰۳۷	۰/۷۸۴۲	۳/۳۶۸۳ $\times$ ۱۰$^{-۱۲}$
۴۰۰۰	۱۰	۷	۱/۱۶۹۴	۱/۷۸۲۱	۵/۶۸۳۸ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$
۵۰۰۰	۲۰	۱۰	۳/۱۰۱۸	۳/۳۷۴۶	۳/۹۰۵۶ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$
۶۰۰۰	۲۰	۸	۴/۲۰۵۶	۵/۶۶۰۹	۳/۱۳۹۶ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$
۱۰۰۰۰	۳۰	۱۵	۱۷/۰۹۶۷	۳۱/۶۴۴۳	۲/۷۳۱۳ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$
۱۲۰۰۰	۵۰	۲۰	۳۴/۸۳۴۳	۵۹/۴۰۵۴	۱/۱۹۹۱ $\times$ ۱۰$^{-۱۰}$

لازم به ذکر است که در جدول بالا زمان برحسب ثانیه و الگوریتم ۲.۲ با نرم‌افزار (۲۰۱۹) *Matlab* اجرا شده است و نتایج عددی بدست آمده با نتایج عددی دستور *inv* در نرم‌افزار *Matlab* از لحاظ زمان اجرا مقایسه شده‌اند. همانطور که نتایج این بخش نشان می‌دهند الگوریتم ارائه شده در این مقاله برای ماتریس‌هایی با بعد بالا خصوصاً زمانی که $n \gg m$ باشد، نتایج قابل قبولی را نشان می‌دهد.

مراجع

[1] J. Jia and S. Li, Symbolic algorithms for the inverses of general k-tridiagonal matrices, *Comput. Math. Appl.*, **70** (2015), 3032–3042.

[2] M. El-Mikkawy, A fast algorithm for evaluating nth order tri-diagonal determinants, *J. Comput. Appl. Math.*, **166** (2004), 581–584.

[3] M. El-Mikkawy, A generalized symbolic Thomas algorithm, *Appl. Math.*, **3** (2012), 342–345.

[4] M. El-Mikkawy and F. Atlan, A novel algorithm for inverting a general k-tridiagonal matrix, *Appl. Math. Lett.*, **32** (2014), 41–47.

[5] M. El-Mikkawy and A. Karawia, Inversion of general tridiagonal matrices, *Appl. Math. Lett.*, **19** (2006), 712–720.

[6] F. Diele and L. Lopez, The use of the factorization of five-diagonal matrices by tridiagonal Toeplitz matrices, *Appl. Math. Lett.*, **11** (1998), 61–69.

[7] X. Le Zhao and T. Zhu Huang, On the inverse of a general pentadiagonal matrix, *Appl. Math. Comput.*, **202** (2008), 639–646.

[8] Y. Lin and X. Lin, A novel algorithm for inverting a k-pentadiagonal matrix, *Journal of Shaanxi University of Science and Technology*, (2016) 578–582.

[9] S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2002.