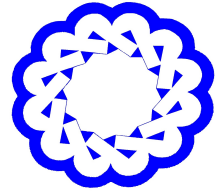


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری با روش گالرکین ناپیوسته موضعی

محمد رضا نگارآ، محمد ایزدی*، حبیب‌اله سعیدی آ

آبخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

در این مقاله، روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبه‌ی کسری را در حالت کلی به کار می‌بریم. در این روش انتخاب (طبیعی) شار عددی آپویند، ما را قادر می‌سازد تا مسائل مقدار اولیه برای معادلات کسری معمولی را به صورت بازه به بازه و پیشرو در زمان حل کنیم. این بدین معنی است که ما بایستی در هر زیربازه به حل یک دستگاه معادلات از مرتبه پایین $(k+1) \times (k+1)$ به صورت موضعی بپردازیم و نیازی به حل دستگاه کلی نیست؛ در اینجا k درجه توابع پایه در هر زیربازه است. موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۸ اسفند ۱۳۹۶
پذیرفته شده: ۲۳ مهر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸
ادیتور رابط: فاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:

معادله دیفرانسیل معمولی
با مرتبه‌ی کسری، روش
گالرکین ناپیوسته
موضعی، چندجمله‌ای‌های
لژاندر.

برای پیاده سازی روش، توابع پایه‌ای (موضعی) را به صورت چندجمله‌ای‌های لژاندر (انتقال یافته) در نظر می‌گیریم. این امر به نوبه خود منجر به تنک کردن بعضی ماتریس‌های ضرایب در دستگاه معادلات می‌شود و بالطبع باعث تسریع محاسبات می‌شود. همچنین پایداری روش در نرم بی‌نهایت و تخمین خطای روش مورد بحث قرار می‌گیرد. در نهایت با یک سری مثال‌های خطی و غیرخطی، کارایی و به خصوص دقت روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی کسری نشان می‌دهیم.

۱. مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل به این دلیل مهم است که در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی، مسائل پس از مدل‌بندی نهایتاً به حل یک معادله دیفرانسیل می‌انجامند. در بسیاری از مسائل واقعی، مدل‌بندی با استفاده از مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری توصیف مناسب‌تری از واقعیت‌های مسأله در مقایسه با مشتقات و انتگرال‌های مرتبه‌ی صحیح می‌دهد. لذا با افزایش کاربردها و مدل‌سازی‌های مبتنی بر حسابان کسری، ضرورت توسعه روش‌های تحلیلی و عددی را برای این دسته معادلات هرچه بیشتر آشکار و نمایان‌تر می‌سازد.

معمولاً بدست آوردن جواب‌های دقیق و تحلیلی برای معادلات مرتبه‌ی کسری کار چندان ساده‌ای نیست و در بسیاری از موارد جواب‌های دقیق نهایتاً برحسب یک سری نامتناهی (تابع میتاگ-فلر) نوشته می‌شوند که محاسبه آن‌ها امری هزینه‌بر است. بنابراین، نیاز برای توسعه روش‌های محاسباتی با دقت و سرعت بالا برای حل معادلات کسری امری توجیه‌پذیر است.

تاکنون روش‌های عددی متفاوتی برای حل معادلات مرتبه‌ی کسری به کار رفته شده است. از جمله می‌توان به رهیافت پیشگو-اصلاحگر [۳]، [۱۲]، روش‌های تفاضل متناهی [۸]، برونابی [۹] اشاره کرد. در دهه‌های پیشین، روش‌های عناصر متناهی خصوصاً روش‌های گالرکین ناپیوسته و گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل کلاسیک، خوبی توسعه یافته‌اند و با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله مزایای تکنیک‌های گالرکین ناپیوسته می‌توان به مرتبه همگرایی اپتیمال $O(h^{k+1})$ برای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح نام برد، زمانی که از یک شبکه با اندازه ماکزیمم h و

آدرس ایمیلها: negar@uk.ac.ir (محمد رضا نگار)، izadi@uk.ac.ir (محمد ایزدی)، saeedi@uk.ac.ir (حبیب‌اله سعیدی).

چندجمله‌ای‌های از درجه k استفاده شود [۶]. بنابراین به دلیل کارایی، انعطاف پذیری و مرتبه همگرایی بالا می‌توان از آن‌ها به عنوان روش‌های مناسب برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری نیز بهره برد.

ایده‌ی اساسی در روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی به این صورت است که با استفاده از متغیرهای مناسب به بازنویسی معادلات با مشتقات مرتبه بالاتر و تبدیل آن‌ها به دستگاه‌های مرتبه اول می‌پردازد. سپس برای حل دستگاه معادلات به دست آمده از روش گالرکین ناپیوسته استفاده می‌کند. روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای معادلات دیفرانسیل کسری در مقاله [۲] برای نخستین بار مورد توجه قرار گرفته است. در مقاله [۲] به بررسی و حل دو دسته از معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبه‌ی کسری پرداخته می‌شود

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

و

$${}^C D_t^\alpha x(t) + d(t) x^{(m)}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و m یک عدد صحیح مثبت می‌باشد و بعلاوه به تعمیم معادلات (۲.۱) نیز اشاره می‌شود. در مقاله فوق با استفاده از شار عددی آپویند به اثبات پایداری عددی روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی در حالت خطی برای معادله (۱.۱) در نرم بی‌نهایت می‌پردازد و مکانیزم ابرهمگرایی روش نیز بصورت کلی توضیح داده می‌شود.

در این مقاله، هدف اساسی ما به پیاده‌سازی روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۱) و (۲.۱) و حالت تعمیم یافته آن‌ها می‌باشد که در مقاله [۲] به آن پرداخته نشده است. به عبارتی نحوه چگونگی انتخاب توابع پایه همواره نقش بسزایی در کاهش یا افزایش سرعت محاسبات روش‌های عناصر متناهی دارد. استفاده از توابع پایه‌ای متعامد (بویژه چندجمله‌ای‌های لژاندر با تابع وزنی یک) باعث صفر شدن بسیاری از درایه‌های ماتریس‌های ضرایب همانند ماتریس‌های جرم و سختی می‌شود. البته ماتریس‌های بوجود آمده توسط مشتقات کسری موجود در معادله چنین خاصیتی را دارا نیستند و همواره پر هستند؛ زیرا عملگر انتگرال یک عملگر غیرموضعی است و اجازه صفر شدن

درایه‌ها را نمی‌دهد (بخش ۶ را ملاحظه کنید).

ترتیب ارایه مطالب بصورت زیر خواهد بود: در بخش ۲ به معرفی نمادها، تعاریف و خواص مشتقات و انتگرال‌های با مرتبه‌ی کسری می‌پردازیم که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بخش ۳ اختصاص به بیان فرم بسته چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه‌ی دلخواه دارد و چگونگی انتقال آن‌ها به هر بازه دلخواه را بیان می‌دارد. در بخش ۴، به بیان روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای دسته معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۱) و (۲.۱) پرداخته می‌شود. در ادامه، روش فوق برای حالت تعمیم یافته معادلات کسری از مرتبه دلخواه α پرداخته می‌شود. در هر مورد با کمک شرایط اولیه داده شده، فرم ضعیف (وردشی) دستگاه معادلات حاصل را به دست می‌آوریم. قضیه پایداری عددی در حالت خطی به همراه تخمین خطای روش در بخش ۵ آورده شده است. نهایتاً در بخش آخر، توانایی‌های روش فوق را با به کارگیری مثال‌های عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. انتگرال و مشتق با مرتبه‌ی کسری

در این بخش به بیان تعاریف مشتق و انتگرال کسری و برخی خواص آن‌ها می‌پردازیم. برای جزئیات و مطالعه بیشتر به [۷] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۰۲. (انتگرال کسری ریمان-لیوویل) فرض کنید $f \in C[a, b]$. انتگرال کسری ریمان-لیوویل راست و چپ مرتبه‌ی $\alpha \geq 0$ تابع f ، به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$({}_a I_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad ({}_x I_b^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

تعریف ۲.۰۲. (مشتق کسری ریمان-لیوویل) مشتقات راست و چپ ریمان-لیوویل از مرتبه‌ی α برای $\alpha \in (n-1, n]$ و n طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$({}^R L D_x^\alpha f)(x) = \left(\frac{d^n}{dx^n} {}_a I_x^{n-\alpha} f \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

$$({}^R L D_b^\alpha f)(x) = \left((-1)^n \frac{d^n}{dx^n} {}_x I_b^{n-\alpha} f \right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

به عنوان مثال، اگر $f_1(x) = (x - a)^\beta$ و $f_2(x) = (b - x)^\beta$ ، آنگاه انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیویل توابع f_1 و f_2 به صورت زیرند [۷]:

$$({}_a I_x^\alpha f_1)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha}, \quad ({}_x I_b^\alpha f_2)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha},$$

$$({}_a^{RL} D_x^\alpha f_1)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}, \quad ({}_x^{RL} D_b^\alpha f_2)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha}.$$

تعریف ۳.۲. (مشتق کسری کاپوتو) فرض کنید $f \in C^n[a, b]$ و $n \in \mathbb{N}$. مشتقات کسری چپ و راست مرتبه‌ی α تابع f به مفهوم کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$({}_a^C D_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

$$({}_x^C D_b^\alpha f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

۳. چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

برای این‌که بتوانیم از چند جمله‌ای‌های لژاندر به عنوان توابع پایه برای به دست آوردن تقریبی از یک تابع استفاده کنیم و در عین حال از تعامد آن‌ها نیز بهره ببریم، بایستی دامنه‌ی تعریف تابع مورد نظر، با این چند جمله‌ای‌ها یکسان باشد. اغلب معادلات معمولاً روی بازه دلخواه $[a, b]$ تعریف می‌شوند. بنابراین برای این‌که بتوانیم از این پایه‌ها استفاده کنیم باید معادله مورد نظر را به $[-1, 1]$ انتقال بدهیم و یا اینکه پایه‌های لژاندر را به $[a, b]$ انتقال دهیم. هر دو روش مرسوم و امکان‌پذیر هستند، اما روش دوم کارآمدتر است. زیرا اگر رابطه‌ی چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته را به دست آوریم، به راحتی می‌توانیم آن‌را برای هر معادله‌ی دلخواه در $[a, b]$ به کار ببریم. برای مشاهده‌ی خواص و جزئیات بیشتر این توابع به مرجع [۱] مراجعه کنید.

با استفاده از تغییر متغیر زیر می‌توان چند جمله‌ای‌های لژاندر تعریف شده بر $[-1, 1]$ را به $[a, b]$

انتقال داد:

$$x := \frac{2t - a - b}{b - a}, \quad t \in [a, b].$$

چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته مرتبه‌ی i ام روی $[a, b]$ دارای فرم بسته به صورت زیر هستند:

$$\tilde{L}_i(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{(2i - 2j)!}{2^i j! (i - j)! (i - 2j)!} \left(\frac{2t - a - b}{b - a} \right)^{i-2j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

که در آن $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ معرف تابع جزء صحیح است. با استفاده از تابع کمکی $C_{i,j,k}$ و بسط دو جمله‌ای، می‌توان رابطه‌ی (۱.۳) چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته مرتبه‌ی i ام روی بازه $[a, b]$ را به ازای $i = 0, 1, 2, \dots$ به صورت خلاصه‌تر بازنویسی کرد:

$$\tilde{L}_i(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{i-2j} C_{i,j,k} t^k,$$

که در آن ضرایب $C_{i,j,k}$ برای $i = 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ و $j = 0, 1, \dots, i - 2j$ و $k = 0, 1, \dots, i - 2j$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{i,j,k} = (-1)^{i+j+k} \left(\frac{2}{b+a} \right)^k \left(\frac{b+a}{b-a} \right)^{i-2j} \frac{(2i - 2j)!}{2^i (i - j)! k! j! (i - 2j - k)!}.$$

توجه کنید که تابع وزن $w(t)$ برای چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته بر $[a, b]$ ، همان $w(t) = 1$ است. لم ۱.۳. چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $\{\tilde{L}_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ ، تشکیل یک دستگاه متعامد کامل روی $L^2[a, b]$ می‌دهند. به عبارتی داریم:

$$(\tilde{L}_i(t), \tilde{L}_j(t)) = \int_a^b \tilde{L}_i(t) \tilde{L}_j(t) dt = \begin{cases} \frac{b-a}{2^{i+1}}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

و همچنین برای هر تابع $f \in L^2[a, b]$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \tilde{L}_i(t)\| = 0$.

اثبات: با قرار دادن $x = \frac{2t-a-b}{b-a}$ و استفاده از تعامد و کامل بودن چندجمله‌ای‌های لژاندر روی

اثبات واضح است. $[-1, 1]$

مقادیر چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته در ابتدا و انتهای بازه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{L}_i(a) = (-1)^i, \quad \tilde{L}_i(b) = 1, \quad i = 0, 1, \dots$$

۴. روش گالرکین ناپیوسته موضعی

در این بخش به بررسی و حل دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبه‌ی کسری (۱.۱) و (۲.۱) می‌پردازیم. دسته‌ی اول فقط شامل مشتق مرتبه‌ی کسری و دسته‌ی دوم، علاوه بر مشتق کسری شامل مشتقات معمولی نیز می‌باشند. با اضافه‌کردن شرایط اولیه مناسب، می‌توان مسائل مقدار اولیه برای معادلات کسری (۱.۱) و (۲.۱) زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ x^{(j)}(a) = x_j, \quad j = 0, 1, \dots, [\alpha], \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) + d(t) x^{(m)}(t) = f(t, x(t)), \\ x^{(j)}(a) = x_j, \quad j = 0, 1, \dots, \max\{[\alpha], m-1\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

یادآوری می‌کنیم در معادلات فوق $\alpha \in (0, 1]$ و m یک عدد صحیح مثبت است و مقادیر x_j بایستی داده شده باشند.

ابتدا به معرفی روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای مساله مقدار اولیه‌ی (۱.۴) می‌پردازیم. برای این منظور با معرفی متغیرهای جدید $x_0(t)$ و $x_1(t)$ به صورت

$$\begin{cases} x_0(t) := x(t), \\ x_1(t) := x'(t), \end{cases}$$

می‌توان معادله‌ی (۱.۴) را به فرم دستگاه معادلات زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} x_1(t) - x'_0(t) = 0, \\ {}_0I_t^{(1-\alpha)} x_1(t) = f(t, x_0(t)), \\ x_0(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

که در آن $\alpha \in (0, 1]$ و $t \in [0, T]$ به طوری که T مقدار نهایی داده شده است. برای حل این دستگاه ابتدا $\Omega = [0, T]$ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

و سپس شبکه‌ی Λ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda = \{I_\ell = (t_{\ell-1}, t_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, n\}.$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$h_\ell := |I_\ell| = t_\ell - t_{\ell-1}, \quad h = \max h_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

متناظر با شبکه‌ی Λ فضای سوبولوف منقطع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^\nu(\Omega, \Lambda) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_{I_\ell} \in L^\nu(I_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, n\},$$

و

$$H^1(\Omega, \Lambda) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_{I_\ell} \in H^1(I_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, n\}.$$

توجه کنید توابع $v(t) \in H^1(\Omega, \Lambda)$ در نقاط ابتدایی و انتهایی هر زیربازه I_ℓ می‌توانند ناپیوسته باشد.

لذا، برای هر تابع $v(t) \in H^1(\Omega, \Lambda)$ حدود یکطرفه در نقطه‌ی t_ℓ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v_\ell^+ = v^+(t_\ell) = v(t_\ell^+) := \lim_{t \rightarrow t_\ell^+} v(t), \quad v_\ell^- = v^-(t_\ell) = v(t_\ell^-) := \lim_{t \rightarrow t_\ell^-} v(t).$$

حال جواب دستگاه (۳.۴) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(x_0(t), x_1(t)) \in H^1(\Omega, \Lambda) \times L^2(\Omega, \Lambda).$$

به علاوه، فرض کنید $X_0(t)$ به عنوان تقریبی برای $x_0(t)$ و $X_1(t)$ به عنوان تقریبی برای $x_1(t)$ در زیر فضای متناهی‌البعد $V \subset H^1(\Omega, \Lambda)$ باشند. فضای V را فضای چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_{I_\ell} \in \mathcal{P}^k(I_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, n\}, \quad (4.4)$$

که در آن فضای همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر k روی I_ℓ می‌باشد. با در نظر گرفتن $v_0, v_1 \in V$ به عنوان توابع آزمون و ضرب آن‌ها در معادلات (۳.۴) به ازای $\ell = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (X_1(t), v_0(t))_{I_\ell} - (X_0'(t), v_0(t))_{I_\ell} = 0, \\ ({}_0I_t^{(1-\alpha)} X_1(t), v_1(t))_{I_\ell} = (f(X_0(t), t), v_1(t))_{I_\ell}, \\ X_0(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

که در رابطه فوق از ضرب داخلی $(u, v)_{I_\ell} = \int_{I_\ell} u v dt$ بهره بردیم. حال با به‌کارگیری انتگرال‌گیری جزء

به جزء و استفاده از رابطه شار عددی آپویند [۲] داریم:

$$\begin{aligned} \left(X'_\circ(t), v_\circ(t) \right)_{I_\ell} &= X_\circ(t) v_\circ(t) \Big|_{t_{\ell-1}^-}^{t_\ell} - \left(X_\circ(t), v'_\circ(t) \right)_{I_\ell} \\ &= X_\circ(t_\ell^-) v_\circ(t_\ell^-) - X_\circ(t_{\ell-1}^-) v_\circ(t_{\ell-1}^+) - \left(X_\circ(t), v'_\circ(t) \right)_{I_\ell}. \end{aligned}$$

نکته ۱.۴. در رابطه‌ی بالا در حالت عادی مقدار $X_\circ(t) v_\circ(t) \Big|_{t_{\ell-1}^-}^{t_\ell}$ به صورت زیر است:

$$X_\circ(t) v_\circ(t) \Big|_{t_{\ell-1}^-}^{t_\ell} = X_\circ(t_\ell^-) v_\circ(t_\ell^-) - X_\circ(t_{\ell-1}^+) v_\circ(t_{\ell-1}^+),$$

اما در صورت استفاده از شار آپویند مقدار $X_\circ(t_{\ell-1}^-)$ بجای $X_\circ(t_{\ell-1}^+)$ جانشین می‌شود.

حال با جایگذاری این روابط در رابطه‌ی (۵.۴) نهایتاً به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \left(X_1(t), v_\circ(t) \right)_{I_\ell} + \left(X_\circ(t), v'_\circ(t) \right)_{I_\ell} - X_\circ(t_\ell^-) v_\circ(t_\ell^-) + X_\circ(t_{\ell-1}^-) v_\circ(t_{\ell-1}^+) = 0, \\ \left({}^\circ I_t^{(1-\alpha)} X_1(t), v_1(t) \right)_{I_\ell} = \left(f(t, X_\circ(t)), v_1(t) \right)_{I_\ell}, \\ X_\circ(t_\circ^-) = 0^- = x_\circ. \end{cases} \quad (۶.۴)$$

در صورت معلوم تابع مجهول $f(t, x)$ در رابطه فوق، می‌توان فرم ماتریسی روش را به صورت صریح‌تری نمایش داد. به عنوان مثال اگر f بصورت خطی $f(t, x(t)) = ax(t) + b(t)$ باشد، با در نظر گرفتن

تقریب توابع به صورت

$$X_\circ(t) = \mathbf{V}^T(t) \boldsymbol{\gamma}_\circ, \quad X_1(t) = \mathbf{V}^T(t) \boldsymbol{\gamma}_1,$$

فرم ماتریسی دستگاه (۶.۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} - \mathbf{C} \\ \mathbf{E} & a\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix},$$

که در آن بردارهای $(k+1)$ بعدی \mathbf{V} ، $\boldsymbol{\gamma}_0$ و $\boldsymbol{\gamma}_1$ روی هر زیربازه I_ℓ دارای مولفه‌های زیر هستند:

$$\mathbf{V}(t) = (v_0(t), v_1(t), \dots, v_k(t))^T, \quad \boldsymbol{\gamma}_0 = (\gamma_{00}, \gamma_{01}, \dots, \gamma_{0k})^T, \quad \boldsymbol{\gamma}_1 = (\gamma_{10}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1k})^T.$$

در دستگاه بلوکی بالا ماتریس‌های ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \int_{I_\ell} v_0'(t) dt & \int_{I_\ell} v_1(t) v_0(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_0(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k(t) v_0(t) dt \\ \int_{I_\ell} v_0(t) v_1(t) dt & \int_{I_\ell} v_1'(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_1(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k(t) v_1(t) dt \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{I_\ell} v_0(t) v_k(t) dt & \int_{I_\ell} v_1(t) v_k(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_k(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k'(t) dt \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \int_{I_\ell} v_0(t) v_0'(t) dt & \int_{I_\ell} v_1(t) v_0'(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_0'(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k(t) v_0'(t) dt \\ \int_{I_\ell} v_0(t) v_1'(t) dt & \int_{I_\ell} v_1(t) v_1'(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_1'(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k(t) v_1'(t) dt \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{I_\ell} v_0(t) v_k'(t) dt & \int_{I_\ell} v_1(t) v_k'(t) dt & \int_{I_\ell} v_2(t) v_k'(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} v_k(t) v_k'(t) dt \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} v_0'(t_\ell^-) & v_1(t_\ell^-) v_0(t_\ell^-) & v_2(t_\ell^-) v_0(t_\ell^-) & \dots & v_k(t_\ell^-) v_0(t_\ell^-) \\ v_0(t_\ell^-) v_1(t_\ell^-) & v_1'(t_\ell^-) & v_2(t_\ell^-) v_1(t_\ell^-) & \dots & v_k(t_\ell^-) v_1(t_\ell^-) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_0(t_\ell^-) v_k(t_\ell^-) & v_1(t_\ell^-) v_k(t_\ell^-) & v_2(t_\ell^-) v_k(t_\ell^-) & \dots & v_k'(t_\ell^-) \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_0(t)) v_0(t) dt & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_1(t)) v_0(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_k(t)) v_0(t) dt \\ \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_0(t)) v_1(t) dt & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_1(t)) v_1(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_k(t)) v_1(t) dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_0(t)) v_k(t) dt & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_1(t)) v_k(t) dt & \dots & \int_{I_\ell} ({}_0 I_t^{(1-\alpha)} v_k(t)) v_k(t) dt \end{pmatrix},$$

$$b_0 = X_0(t_{\ell-1}^-) \begin{pmatrix} v_0(t_{\ell-1}^+) \\ v_1(t_{\ell-1}^+) \\ \vdots \\ v_k(t_{\ell-1}^+) \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \int_{I_\ell} b(t) v_0(t) dt \\ \int_{I_\ell} b(t) v_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{I_\ell} b(t) v_k(t) dt \end{pmatrix}.$$

با در دست داشتن فرم ماتریسی دستگاه و بهره گرفتن از روشهای کارای جبر خطی می‌توان این دستگاه بلوکی ماتریسی را با محاسبات سریعتری روی هر زیربازه انجام داد. در حالتی که تابع $f(x(t), t)$ غیرخطی باشد، امکان استفاده از صورت ماتریسی دستگاه وجود ندارد. برای به دست آوردن جواب باید یک دستگاه غیرخطی را حل کنیم. در این حالت می‌توان از روش نیوتن برای حل دستگاه غیرخطی متناظر استفاده کرد.

نکته ۲.۴. در روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی، ابتدا روی زیربازه‌ی اول از مقدار اولیه‌ی داده شده x_0 استفاده می‌کنیم، و جواب مسأله را روی زیربازه‌ی اول به دست می‌آوریم. سپس بازه به بازه پیش رفته و جواب مسأله را روی کل دامنه Ω به دست می‌آوریم. در واقع روی هر زیربازه یک مسأله‌ی مقدار اولیه را حل می‌کنیم. روی زیربازه‌ی اول از مقدار اولیه‌ی داده شده استفاده کرده و در زیربازه‌های بعد با داشتن جواب روی زیربازه‌ی قبل، $X_0(t_{\ell-1}^-)$ را به عنوان مقدار اولیه روی زیربازه‌ی بعد در نظر می‌گیریم.

به طریق مشابه می‌توان روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای مسائل مقدار اولیه به فرم (۲.۴) به کار برد. به عنوان مثال اگر $m = 1$ باشد آن‌گاه با فرآیندی شبیه حالت قبل می‌توان به دستگاه معادلات زیر برای یافتن جواب‌های تقریبی $X_1(t)$ و $X_0(t)$ برای معادله‌ی (۲.۴) به ازای $\ell = 1, 2, \dots, n$ دست

یافت:

$$\begin{cases} \left(X_{\backslash}(t), v_{\circ}(t) \right)_{I_{\ell}} + \left(X_{\circ}(t), v'_{\circ}(t) \right)_{I_{\ell}} - X_{\circ}(t_{\ell}^{-}) v_{\circ}(t_{\ell}^{-}) + X_{\circ}(t_{\ell-1}^{-}) v_{\circ}(t_{\ell-1}^{+}) = \circ, \\ \left({}_{\circ}I_t^{(1-\alpha)} X_{\backslash}(t) + d(t) X_{\backslash}(t), v_{\backslash}(t) \right)_{I_{\ell}} = \left(f(t, X_{\circ}(t)), v_{\backslash}(t) \right)_{I_{\ell}}, \\ X_{\circ}(t_{\circ}^{-}) = \circ^{-} = x_{\circ}. \end{cases}$$

۱.۴. تعمیم روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای معادلات کسری مراتب بالاتر

معادله‌ی (۲.۴) را در حالت کلی در نظر بگیرید که در آن m یک عدد صحیح مثبت و α یک عدد حقیقی دلخواه است. اکنون با در نظر گرفتن $x_{\circ}(t) := x(t)$ و معرفی متغیرهای

$$x_{i+1}(t) := x'_i(t), \quad i = \circ, 1, \dots, \max(m, p) - 1, \quad p = \lceil \alpha \rceil,$$

از (۲.۴) به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_{i+1}(t) - x'_i(t) = \circ, \\ {}_{\circ}I_t^{(1-\alpha)} x_p(t) + d(t) x_m(t) = f(x_{\circ}(t), t), \end{cases}$$

که در آن $t \in [\circ, T]$ و مقادیر اولیه‌ی $x_i(\circ)$ باید داده شده باشند که در واقع همان $x^{(i)}(\circ)$ یا همان مقادیر مشتقات تابع مجهول در ابتدای بازه هستند. برای حل فرض کنید $x_i(t) \in H^1(\Omega, \Lambda)$ و $x_m(t) \in L^2(\Omega, \Lambda)$. حال با در نظر گرفتن توابع $X_i(t)$ به عنوان تقریب‌های $x_i(t)$ و استفاده از شار

آپویند و انتگرال‌گیری جزء به جزء به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(X_{i+1}(t), v_i(t) \right)_{I_\ell} + \left(X_i(t), v'_i(t) \right)_{I_\ell} - X_i(t_\ell^-) v_i(t_\ell^-) + X_i(t_{\ell-1}^-) v_i(t_{\ell-1}^+) = 0, \\ i = 0, 1, \dots, \max(m, p) - 1, \\ X_0(t) = x(t), \\ \left({}_0 I_t^{(1-\alpha)} X_p(t), v_m(t) \right)_{I_\ell} + \left(X_m(t), v_m(t) \right)_{I_\ell} = \left(f(t, X_0(t)), v_m(t) \right)_{I_\ell}, \\ X_i(0) = x^{(i)}(0). \end{array} \right.$$

به طریق مشابه می‌توان با معلوم بودن تابع $f(t, x(t))$ ، فرم صریح‌تری از دستگاه معادلات فوق را نوشت. بدیهی است اگر f غیرخطی باشد، آنگاه دستگاه معادلات متناظر نیز غیرخطی خواهد بود و برای حل آن می‌توان از روش‌های خطی سازی همانند روش نیوتن کمک گرفت.

۵. پایداری و تخمین خطا

در این بخش به بیان قضیه‌ها و نتایج تئوری مربوط به پایداری عددی روش ذکر شده در بخش‌های قبل می‌پردازیم و کران خطای روش را به دست می‌آوریم.

۱.۵. پایداری

مفهوم پایداری یک روش به این معناست که تغییرات یا آشفتگی اندک در مقادیر اولیه باعث تغییرات یا آشفتگی زیاد در جواب‌های تقریبی نشود. به عبارت دیگر یک روش پایدار است هرگاه جواب‌های تقریبی به طور پیوسته به مقادیر اولیه وابسته باشد. بررسی پایداری در حالت کلی و غیرخطی کار چندان ساده‌ای است، بنابراین پایداری را برای مسأله‌ی خطی زیر بررسی می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad t \in [0, T], \\ x_0(0) = x_0. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

که در آن A یک ثابت منفی است و برای تضمین وجود و یکتایی جواب، فرض می‌شود تابع $B(t)$ به اندازه کافی هموار است.

با در نظر گرفتن شبکه مانند قبل، توابع $X_i(t) \in V$ را طوری می‌یابیم که رابطه‌ی زیر برای هر $v_i(t) \in V$ برقرار باشد:

$$\begin{cases} X_\circ(t_\ell^-) v_\circ(t_\ell^-) + X_\circ(t_{\ell-1}^-) v_\circ(t_{\ell-1}^+) - (X_1, v_\circ)_{I_\ell} - (X_\circ, v_\circ)_{I_\ell} = 0, \\ (I_t^{(1-\alpha)} X_1, v_1)_{I_\ell} = (AX_\circ + B, v_1)_{I_\ell}, \\ X_\circ(t_\circ^-) = x(\circ). \end{cases} \quad (2.5)$$

حال $\bar{X}_i(t)$ را به عنوان تقریب $X_i(t)$ و $e_{X_i(t)} := \bar{X}_i(t) - X_i(t)$ را به عنوان خطای عددی در نظر می‌گیریم. قضیه‌ی زیر پایداری روش عددی (۲.۵) را نشان می‌دهد و اثبات آن را می‌توان در [۲] مشاهده نمود.

قضیه ۱.۵. روش عددی (۲.۵) در نرم-بی‌نهایت پایدار است و خطای عددی به صورت زیر است

$$e_{X_\circ}^\infty(t_n^-) = e_{X_\circ}^\infty(t_\circ^-) - \sum_{\ell=1}^n (e_{X_\circ}(t_{\ell-1}^+) - e_{X_\circ}(t_{\ell-1}^-))^2 + \frac{2}{A} \cos\left(\frac{(\alpha-1)\pi}{2}\right) \|e_{X_1}\|_{H^{\frac{\alpha-1}{2}}([\circ, t_n])}^2. \quad (3.5)$$

۲.۵. تخمین خطا

در مقاله [۲] مرتبه همگرایی بهینه $O(h^{k+1})$ در نرم L_2 در هر زیر بازه برای روش گالرکین ناپیوسته موضعی بیان شده است. همچنین مرتبه ابرهمگرایی $O(h^{k+1+\min\{k,\alpha\}})$ در نقاط خلاف جهت شار در هر زیر بازه برای دسته معادلات (۱.۱) اثبات شده است. این مرتبه ابرهمگرایی برای دسته معادلات (۲.۱) بصورت $O(h^{k+1+\min\{k,\max\{\alpha,m\}\}})$ بیان شده است.

۶. نتایج عددی

برای پیاده سازی روش، چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته‌ی $\{\bar{L}_i(t)\}_{i=0}^k$ را به عنوان پایه‌ی فضای جواب معادله در نظر می‌گیریم. سپس با تبدیل مسأله به فرم دستگاه (۵.۴) و در نظر گرفتن توابع آزمون

$v_i(t) = \bar{L}_i(t)$ ، دستگاه حاصل را حل کرده و جواب تقریبی معادله را به دست می‌آوریم.

مثال ۱.۶. مسأله‌ی زیر یک مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی معمولی خطی با مرتبه‌ی کسری است. جواب واقعی آن به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ برابر با $x(t) = t^5 + 1$ می‌باشد [۲]:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -2x(t) + \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho-\alpha)} t^{\rho-\alpha} + 2t^5 + 2, & t \in (0, 1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

برای حل مسأله‌ی بالا، از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته‌ی $\{\bar{L}_i(t)\}_{i=0}^k$ ، به عنوان توابع پایه و آزمون استفاده می‌کنیم، پس از پیاده سازی روش برای این مسأله مانند آنچه در بخش قبل گفته شد، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} (X_1(t), \bar{L}_i(t))_{I_\ell} + (X_0(t), \bar{L}'_i(t))_{I_\ell} - X_0(t_\ell^-) \bar{L}_i(t_\ell^-) + X_0(t_{\ell-1}^-) \bar{L}_i(t_{\ell-1}^+) = 0, \\ ({}^C I_t^{(1-\alpha)} X_1(t), \bar{L}_i(t))_{I_\ell} = -2(X_0(t), \bar{L}_i(t))_{I_\ell} + \left(\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho-\alpha)} t^{\rho-\alpha} + 2t^5 + 2, \bar{L}_i(t) \right)_{I_\ell}, \\ X_0(t_0^- = 0^-) = 1, \end{cases}$$

فرم ماتریسی دستگاه بالا به ازای $\ell = 1, 2, 3, \dots, n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} - \mathbf{C} \\ \mathbf{E} & 2\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0(t_{\ell-1}^-) \mathbf{g} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

با حل یک دستگاه خطی شامل $2k + 2$ معادله و $2k + 2$ مجهول روی هر زیربازه I_ℓ ، جواب مسأله را به دست می‌آوریم. به عنوان مثال اگر $\alpha = 0.5$ ، $n = 1$ و $k = 4$ انتخاب شوند، آنگاه ماتریس‌های

ضرایب در فرم ماتریسی فوق به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

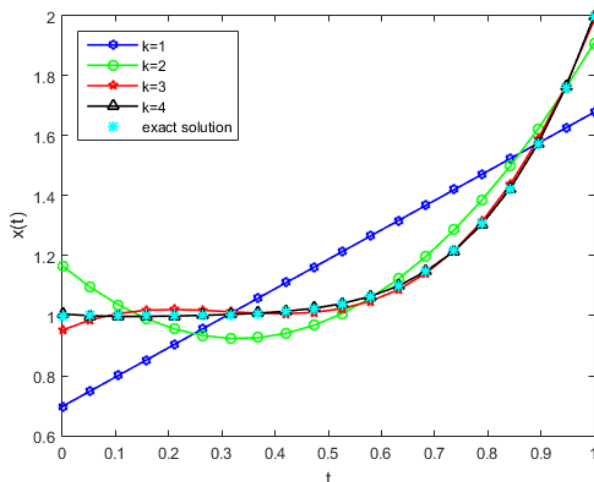
$$E = \begin{pmatrix} 0.7523 & -0.1505 & -0.215 & -0.072 & -0.033 \\ 0.1505 & 0.1075 & -0.0502 & -0.098 & -0.039 \\ -0.215 & 0.0502 & 0.488 & -0.270 & -0.059 \\ 0.072 & -0.098 & 0.270 & 0.293 & -0.175 \\ -0.033 & 0.039 & -0.059 & 0.175 & 0.201 \end{pmatrix},$$

$$f = (3.7502, 1.1933, 0.5394, 0.1507, 0.221)^t, \quad g = (1, -1, 1, -1, 1)^t$$

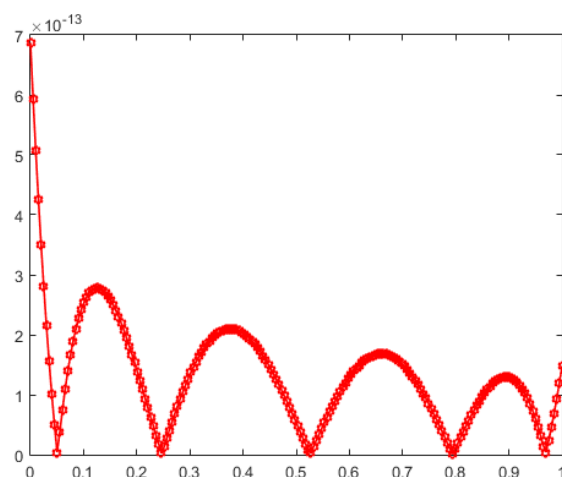
در شکل (۱) جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0.2$ ، $n = 1$ و $k = 1, 2, 3, 4$ به همراه جواب دقیق مسأله نمایش داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای‌های پایه، جواب تقریبی به جواب واقعی نزدیک می‌شود.

در شکل (۲) اختلاف جواب واقعی و تقریبی به ازای $\alpha = 0.2$ ، $n = 1$ و $k = 5$ نمایش داده شده است. برای ارزیابی بهتر کارایی روش به محاسبه مقادیر خطا در نرم‌های مختلف می‌پردازیم. جدول (۱) خطای جواب تقریبی حاصل از روش را در نرم-۱، نرم-۲ و نرم-بی‌نهایت به ازای $\alpha = 0.2$ ، k و n های مختلف نشان می‌دهد.

مثال ۲.۶. مسأله‌ی زیر یک مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی معمولی غیرخطی با مرتبه‌ی کسری است. جواب



شکل ۱: نمودار مثال (۱.۶) شامل جواب واقعی و جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0.2$ و $n = 1$ و $k = 1, 2, 3, 4$.



شکل ۲: نمودار خطای نسبی برای مثال (۱.۶) به ازای $\alpha = 0.2$ و $n = 1$ و $k = 5$.

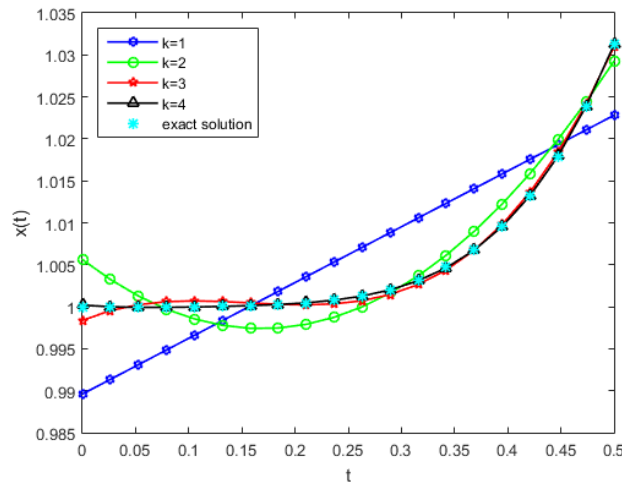
جدول ۱: خطای جواب تقریبی برای مثال (۱.۶) در نرم-۱، نرم-۲ و نرم-بی‌نهایت به ازای $\alpha = 0.2$ و مقادیر مختلف n و k .

k	n	$\ error\ _2$	$\ error\ _1$	$\ error\ _\infty$
۳	۱	$1.8210e-1$	۲/۲۱۱۸	$4.1500e-2$
۳	۴	$2.2000e-3$	$1.3800e-2$	$5.3193e-4$
۴	۱	$1.8500e-2$	$2.1950e-1$	$5.2000e-3$
۴	۲	$7.6000e-4$	$6.9000e-3$	$1.5314e-4$
۵	۱	$2.8358e-12$	$3.4293e-11$	$7.0621e-13$

واقعی آن به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ برابر با $x(t) = t^5 + 1$ می‌باشد [۲]:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -2x'(t) + \frac{\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-\alpha)} t^{\varphi-\alpha} + 2t^1 + 4t^5 + 2, & t \in (0, 0.5], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

در شکل (۳) جواب واقعی مسأله و جواب‌های تقریبی آن به ازای $\alpha = 0.7, n = 1, k = 1, 2, 3, 4$ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای‌های پایه، جواب تقریبی به جواب واقعی نزدیک می‌شود.

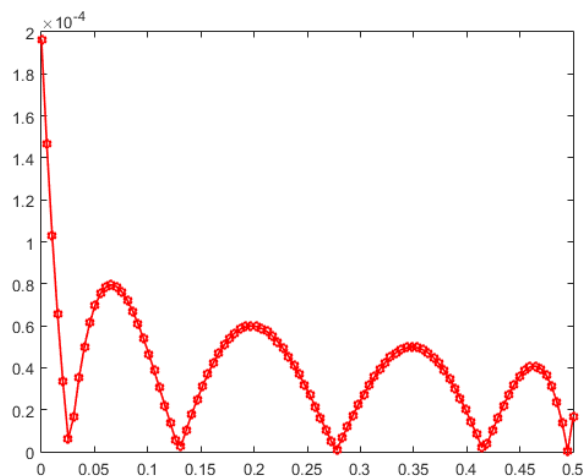


شکل ۳: نمودار مثال (۲.۶) شامل جواب واقعی و جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0.7, n = 1, k = 1, 2, 3, 4$.

در شکل (۴) اختلاف جواب واقعی و تقریبی به ازای $\alpha = 0.7, n = 1, k = 4$ نمایش داده شده است.

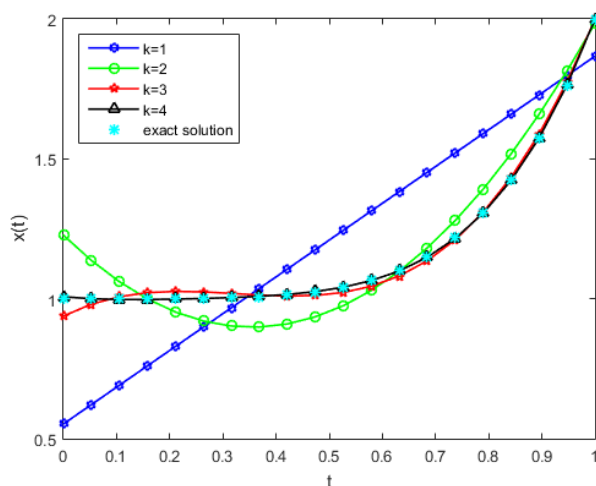
مثال ۳.۶. مسأله‌ی زیر از دسته‌ی دوم معادلات مورد بحث، یعنی معادلات (۲.۴) است که یک مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی معمولی خطی، با مرتبه‌ی کسری است. این مسأله شامل مشتق معمولی مرتبه اول نیز بوده و جواب واقعی آن به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ برابر با $x(t) = t^5 + 1$ است [۲]:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) + x'(t) = -2x(t) + \frac{\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varphi-\alpha)} t^{\varphi-\alpha} + 2t^5 + 2, & t \in (0, 1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$



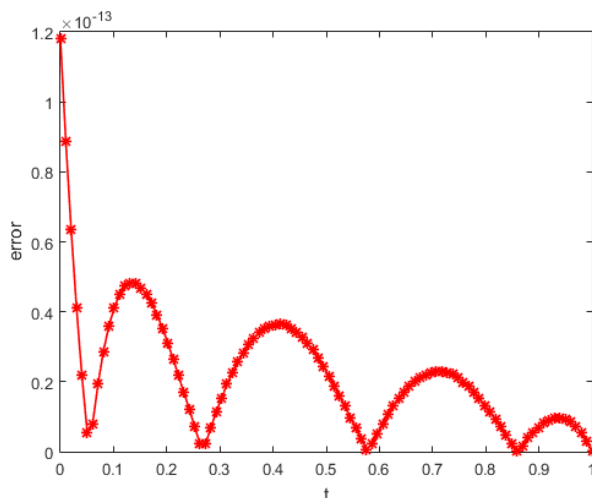
شکل ۴: نمودار خطای نسبی برای مثال (۲.۶) به ازای $\alpha = 0.7$ ، $n = 1$ و $k = 4$.

شکل (۵) شامل جواب واقعی مسأله و جواب‌های تقریبی آن به ازای $\alpha = 0.2$ و $n = 1$ ، $k = 1, 2, 3, 4$ است. مشاهده می‌شود با افزایش k ، جواب‌های تقریبی، به جواب واقعی مسأله نزدیک می‌شوند. در شکل (۷) می‌توانید خطای روش را مشاهده کنید. همچنین خطای روش در جدول (۲) در نرم-۱، نرم-۲ و نرم-بی‌نهایت به ازای $\alpha = 0.2$ و مقادیر مختلف k, n قابل مشاهده است.



شکل ۵: نمودار مثال (۲.۶) شامل جواب واقعی و جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0.2$ و $n = 1$ ، $k = 1, 2, 3, 4$.

در نهایت، برای نمایش بیشتر کارایی روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای حل عددی معادلات کسری به مثالی می‌پردازیم که در آن جواب مسأله‌ی مقدار اولیه دارای ناپیوستگی است.



شکل ۶: نمودار خطای نسبی برای مثال (۳.۶) به ازای $\alpha = 0.2$ ، $n = 1$ و $k = 5$.

جدول ۲: خطای جواب تقریبی برای مثال (۳.۶) در نرم-۱، نرم-۲ و نرم-بی‌نهایت به ازای $\alpha = 0.2$ و مقادیر مختلف n و k .

k	n	$\ error\ _2$	$\ error\ _1$	$\ error\ _\infty$
۳	۱	$7.8800e-2$	$1.7520e-1$	$6.5200e-2$
۳	۲	$1.7200e-2$	$1.3800e-2$	$6.4000e-3$
۴	۱	$8.7000e-3$	$1.8800e-2$	$7.5000e-3$
۴	۲	$3.0640e-4$	$6.1375e-3$	$2.4062e-4$
۴	۴	$1.2348e-4$	$1.8392e-3$	$1.101e-4$
۵	۱	$2.8398e-12$	$3.7104e-13$	$1.3589e-13$

مثال ۴.۶. مسأله‌ی زیر یک مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی معمولی خطی، با مرتبه‌ی کسری است و جزو دسته‌ی معادلات (۱.۱) است

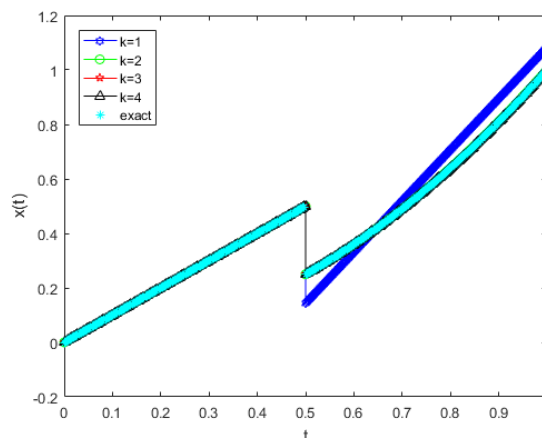
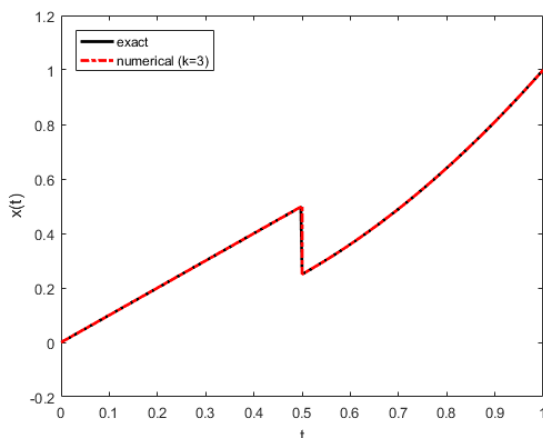
$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + g(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - t^2, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

جواب دقیق مسأله فوق به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ بصورت زیر است

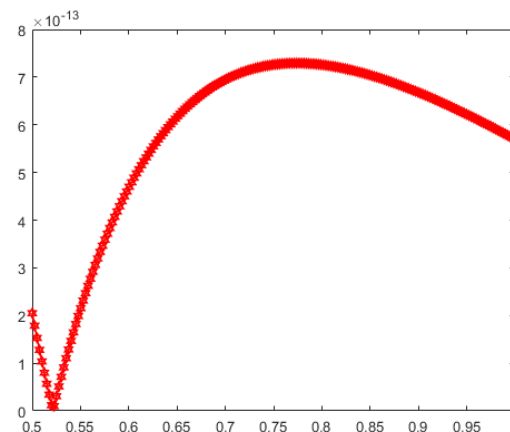
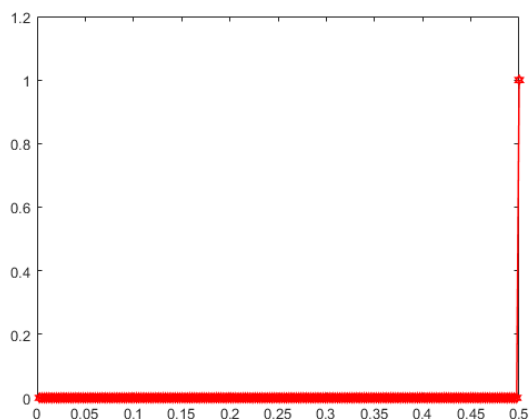
$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{1}{\alpha}), \\ t^2, & t \in [\frac{1}{\alpha}, 1], \end{cases}$$

که بوضوح دارای ناپیوستگی در نقطه میانی بازه، یعنی $t = \frac{1}{\alpha}$ می‌باشد.

با در نظر گرفتن $\alpha = 0.5$ و فرض اینکه نقطه ناپیوستگی یکی از نقاط شبکه‌ای است، به حل مسأله فوق با روش گالرکین ناپیوسته موضعی همانند مثالهای قبل می‌پردازیم. در شکل (۷) قسمت چپ، ابتدا ترسیم نمودار شامل جواب واقعی مسأله و جواب تقریبی آن به ازای $\alpha = 0.5$ ، $n = 2$ و با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه $k = 3$ به نمایش گذاشته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود روش گالرکین ناپیوسته موضعی تقریب مناسبی برای جواب مسأله بخصوص در نزدیکی نقطه ناپیوسته $t = \frac{1}{\alpha}$ بدست می‌دهد. در شکل مشابه قسمت راست، نمودار جواب واقعی مسأله به همراه جواب‌های عددی به ازای مقادیر مختلف $k = 1, 2, 3, 4$ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود به ازای $k = 1$ ، یعنی با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه یک برای تقریب جواب مسأله روی بازه $[\frac{1}{\alpha}, 1]$ که یک چندجمله‌ای‌های درجه دو می‌باشد، تقریب مطلوبی حاصل نمی‌شود. اما به ازای مقادیر دیگر k جواب‌های تقریبی نزدیک به جواب واقعی مسأله نتیجه می‌شوند. به عبارتی تقریب مطلوب و کافی نه تنها به ازای چندجمله‌ای‌های درجه دو بلکه فقط به ازای دو زیربازه شامل نقطه ناپیوستگی و با روش گالرکین ناپیوسته موضعی بدست می‌آید. توجه کنید روش فوق براحتی برای مسایل با بیش از یک نقطه ناپیوستگی قابل تعمیم است. برای توصیف بیشتر در شکل (۸) می‌توانید خطای نسبی روش گالرکین ناپیوسته موضعی را برای مثال (۴.۶) به ازای $k = 2$ و با دو زیربازه I_1 و I_2 با $\alpha = 0.1$ قابل مشاهده است. در حالیکه شکل سمت چپ خطای نسبی روی زیربازه I_1 را نشان می‌دهد، شکل سمت راست نمودار خطای نسبی روی زیربازه I_2 را ترسیم نموده است. بوضوح خطای نسبی روی دو زیربازه فوق به استثنای نقطه ناپیوستگی خیلی ناچیز و تقریباً صفر است.



شکل ۷: نمودار مثال (۴.۶) شامل جواب واقعی و جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0.5$ و $n = 2$ و $k = 1, 2, 3, 4$.



شکل ۸: نمودار مجزای خطای نسبی برای مثال (۴.۶) به ازای $\alpha = 0.1$ و $n = 2$ روی زیربازه‌های I_1 و I_2 .

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه و بررسی روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه‌ی کسری پرداخته شد. با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر، روش فوق بصورت عملی پیاده‌سازی شد و کارایی و دقت آن برای دو دسته از معادلات خطی و غیرخطی در قالب مثال‌های (۱.۶) - (۴.۶) مورد ارزیابی قرار گرفت. همانطور که از شکل‌ها و جدول‌ها استنباط می‌شود، می‌توان با انتخاب مناسب تعداد زیربازه‌ها و بکارگیری درجه مناسب از چندجمله‌ای‌ها روی هر زیربازه، به دقت مطلوب و از پیش تعیین شده رسید. در مثال (۴.۶) روش فوق برای یک مسأله‌ی مقدار اولیه شامل جواب دقیق با

یک نقطه ناپیوستگی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و کارایی روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای این مسایل احراز شد. بکارگیری این روش برای مسایل با تعداد دلخواه نقاط ناپیوستگی قابل اعمال است. بنابراین، از روش گالرکین ناپیوسته موضعی می‌توان به عنوان یک روش کارا و انعطاف‌پذیر برای حل دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل کسری و از مرتبه دلخواه استفاده کرد؛ برای معادلات مراتب بالاتر، استفاده از کامپیوترهای موازی منجر به کاهش محاسبات می‌شود. همچنین بکارگیری این روش برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری (شامل شوک و ناپیوستگی)، معادلات انتگرالی و دیفرانسیل-انتگرالی با هسته تباهیده [۴، ۵] در حال روبه رشد می‌باشد و می‌توان از آن برای حل مسایل کاربردی بهره گرفت. برای معادلات دیفرانسیل کسری که دارای جواب بصورت یک تابع کسری هستند استفاده از توابع پایه‌ای متناظر کسری نیز می‌تواند جالب توجه باشد و موضوع تحقیقات نویسندگان می‌باشد.

قدردانی

نویسندگان مقاله از رهنمودهای مفید داوران (بی‌نام) تشکر و قدردانی می‌نمایند که موجب بهبود و اعتلای این مقاله شده است.

مراجع

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1972.
- [2] W. Deng and J.S. Hesthaven, Local discontinuous Galerkin method for fractional ordinary differential equations, *BIT*, **55** (2015), 967–985.
- [3] K. Diethelm, N.J. Ford and A.D. Freed, A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dyn.*, **29** (2002), 3–22.
- [4] F. Fakhar-Izadi and M. Dehghan, Fully spectral collocation method for nonlinear parabolic partial integro-differential equations, *Appl. Numer. Math.*, **33** (2018), 99–120.
- [5] F. Fakhar-Izadi and M. Dehghan, Space–time spectral method for a weakly singular parabolic partial integro-differential equation on irregular domains, *Comput. Math. Appl.*, **67** (2014), 1884–1904.

- [6] J.S. Hesthven and T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*, New York, Springer, 2008.
- [7] A.A. Kilbas, H.M. Erivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, New York, Elsevier Science Inc, 2006.
- [8] C.P. Li, F.H. Zeng, The finite difference methods for fractional differential equations, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **34**(1) (2013), 142–179.
- [9] K. Pal, F. Liu and Y. Yan, Numerical solutions for fractional differential equations by extrapolation, *Lecture Notes in Computer Science, Springer series*, Vol. 9045, (2015), 299–306.
- [10] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [11] Q. Xu and J.S. Hesthaven, Discontinuous Galerkin method for fractional convection-diffusion equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **52** (2014), 405–423.
- [12] L. Zhao and W. Deng, Jacobian-predictor-corrector approach for fractional differential equations, *Adv. Comput. Math.*, **40** (2014), 137–165.