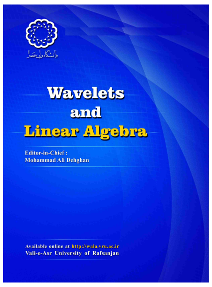
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۹۳-۲۱۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

ضرب تانسوری قاب‌های با اضافی یکنواخت

احمد احمدی*[آ]، سمیه افشار جهانشاهی[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، استان هرمزگان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۰ شهریور ۱۴۰۱
پذیرفته شده: ۷ بهمن ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:

قاب، ضرب تانسوری،
قاب با اضافی یکنواخت،
فضای هیلبرت.

چکیده

برای حل مشکلاتی که در کاربرد قاب در زمینه های مختلف علوم به وجود می‌آمدند انواع مختلفی از قاب معرفی شدند. به دلیل مشکلاتی مانند گم شدن یا جابجایی ضرایب قاب که در حین انتقال سیگنال اتفاق می افتاد قاب‌های با اضافی یکنواخت پدیدآمدند. ضرب تانسوری عنصر اصلی در پردازش سیگنال، به منظور گسترش روش‌های یک بعدی در فیلترگذاری و فشرده سازی صدا، به ابعاد بالاتر و استفاده از آنها در پردازش تصاویر است. در این مقاله، روشی برای ساختن قاب‌های با اضافی یکنواخت به کمک ضرب تانسوری قاب‌ها معرفی خواهد شد و به کمک معیار کمی حشو به مقایسه این روش با روش‌های دیگر ساختن قاب‌های با اضافی یکنواخت که بر اساس اجتماع قاب‌ها بیان شده است، ارائه می شود.

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

الگوریتم‌ها و ابزارهای پردازش سیگنال بخش مهمی از تکنولوژی قرن بیستم را تشکیل می‌دهد. طیف وسیعی از الگوریتم‌های زیربنایی ارتباطات تلفن همراه، تصویربرداری پزشکی، ارائه تصویر برای بازی‌ها و بسیاری از فن‌آوری های دیگر از پردازش سیگنال استفاده می‌کنند. در حقیقت پردازش سیگنال مانند چسبی است که تکنولوژیهای بسیاری را کنار هم قرار می‌دهد. در حدود ۵۰ سال، پردازش سیگنال متعلق به رشته‌های مهندسی بود اما امروزه، انقلاب دیجیتال نیاز به ریاضیات برای مواجهه با مسائل سخت و طراحی الگوریتم‌های جدید و پالایش روش‌های موجود را افزایش داده است. این موضوع تعاملی غنی و بارور بین هر دو زمینه ریاضیات و مهندسی را ایجاد کرد. نمونه بارز آن مفهوم قاب است که به عنوان پس زمینه‌ای برای نظریه نمونه‌گیری و پردازش سیگنال ایجاد شده است. قاب‌ها در فضای هیلبرت اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شیفر برای بازسازی سیگنال توسط ضرایب فوریه معرفی شدند[۸]. در سال ۱۹۹۸، پیتر کاسازا بسیاری از نتایج نظریه قاب را گسترش داد [۴] و از آن به بعد قاب‌ها محبوب شدند به گونه‌ای که در سی سال گذشته، نظریه قاب به یک تحقیق جذاب و ابزاری قدرتمند برای مطالعاتی از جمله نظریه کدگذاری [۱۳]،شبکه‌های حسگر بی‌سیم [۵] و... تبدیل شد. برای حل مشکلاتی که در کاربرد قاب در زمینه های مختلف علوم به وجود می‌آمدند انواع مختلفی از قاب همانند قاب‌های همجوشی[۱]، قاب‌های تعمیم یافته [۲] و ... معرفی شدند. به دلیل مشکلاتی مانند گم شدن یا جابجایی ضرایب قاب که در حین انتقال سیگنال اتفاق می افتاد قاب‌های با اضافی یکنواخت معرفی شدند. این قاب‌ها اولین بار در [۶]توسط کاسازا تحت عنوان” قابهای m-محوشدگی “ معرفی شدند و توسط هان ”قاب m-اضافی یکنواخت“ نامیده شدند[۱۰] . قاب با m-اضافی یکنواخت قابی است که در برابر حذف هر m بردار از آن مقاوم و با حذف آنها باز هم قاب هستند. این قاب‌ها به طور گسترده در پردازش سیگنال پراکنده، انتقال داده و ... مورد استفاده قرار گرفته اند. در این مقاله روش‌های ساخت قاب‌های با اضافی یکنواخت مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در بخش اول، تعاریف اولیه‌ای از قاب و قاب‌های با اضافی یکنواخت بیان خواهند شد . در بخش دوم روش‌هایی که تاکنون برای ساختن قاب‌های با

آدرس ایمیلها: ahmadi_a@hormozgan.ac.ir (احمد احمدی)، afshar.phd@hormozgan.ac.ir (سمیه افشار جهانشاهی).

http://doi.org/10.22072/wala.2023.561279.1397

[1] Fusion frames
[2] g-frames

اضافی یکنواخت معرفی شده‌اند، بررسی می‌شوند. سپس روشی بر اساس ضرب تانسوری قاب‌های با اضافی یکنواخت بیان خواهد شد و به بررسی و مقایسه حشو قاب تولید شده با این روش و سایر روش‌ها می‌پردازیم.

۲. مفاهیم بنیادی

در ابتدا تعاریف اولیه از قاب و قاب‌های با اضافی یکنواخت بیان می‌شوند. برای اطلاعات بیشتر درباره قاب‌ها می توانید به [۷] مراجعه کنید. قاب‌ها تعمیم پایه‌های متعامد در فضاهای هیلبرت هستند. یک قاب همانند پایه متعامد یکه این امکان را فراهم می‌کند تا هر عضو فضای هیلبرت به شکل ترکیب خطی نامتناهی از عناصر قاب نوشته شود تا برخلاف شرایط پایه، ضرایب در این ترکیب منحصر به فرد نباشند. در این مقاله مجموعه اندیس‌گذار متناهی یا نامتناهی است و برای عدد مثبت M مجموعه $\{۱, \dots, M\}$را با $[M]$ نشان می‌دهیم. همچنین $\mathcal{H}^N$ فضای هیلبرت با بعد متناهی N است.

تعریف ۱.۲. خانواده‌ای از بردارهای $\Phi = \{\phi_i\}$در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ ، یک قاب گفته می‌شود اگر ثابت‌های $\circ < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^۲ \leq \sum_{n=۱}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^۲ \leq B\|f\|^۲. \qquad (۱.۲)$$

به اعداد A و B به ترتیب کران پائین و بالای قاب گفته می‌شود. یک قاب ''تنگ [۳]'' گفته می‌شود اگر $A = B$ و پارسوال گفته می‌شود اگر$A = B = ۱$. اگر سمت راست نامساوی (۱.۲) برقرار باشد در این صورت به دنباله $\{\phi_i\}$ ، بسل [۴] گفته می‌شود همچنین به دنباله $\{\langle f, \phi_n \rangle\}$ ضرایب قاب بردار $f \in \mathcal{H}$تحت قاب Φ گفته می‌شود[۷].

قاب، مجموعه‌ای دارای حشو است . به این معنی که نسبت به پایه اعضای بیشتری دارد ولی همانند پایه، هر عضو فضا را به شکل ترکیب خطی از سایر اعضا بیان می‌کند. دلیل اصلی کاربردهای فراوان قاب حشو آن است. امروزه حشو، هم به عنوان یک مفهوم ریاضی و هم به عنوان روشی برای پردازش

[3]tight
[4]Bessel

سیگنال ظاهر می‌شود. حشو قاب‌ها مقاومت در برابر اختلال، خطاهای کمی‌سازی و محو شدگی در انتقال سیگنال را تضمین می‌کند[۱۲].

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ یک قاب در $\mathcal{H}^N$ باشد و $\mathbb{S} = \{f \in \mathcal{H}^N : \|f\| = 1\}$ گوی واحد باشد تابع حشو $\mathcal{R}_\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ به صورت

$$\mathcal{R}_\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} \|P_{\langle\phi_i\rangle}(f)\|^2$$

تعریف می‌شود که در آن $\langle\phi_i\rangle$، فضای تولید شده توسط ϕ_i و $P_{\langle\phi_i\rangle}$ تصویر متعامد روی $\langle\phi_i\rangle$ است. هم‌چنین حشو بالایی قاب را با

$$\mathcal{R}_\Phi^+ = max_{f\in\mathbb{S}}(\mathcal{R}_\Phi(f))$$

و حشو پائینی آن را با

$$\mathcal{R}_\Phi^- = min_{f\in\mathbb{S}}(\mathcal{R}_\Phi(f))$$

تعریف می‌کنند. قاب دارای حشو یکنواخت است اگر $\mathcal{R}_\Phi^+ = \mathcal{R}_\Phi^-$.

قضیه ۳.۲. *اگر $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ یک قاب در $\mathcal{H}^N$ باشد در این صورت*

الف)

$$0 < \mathcal{R}_\Phi^- \leq \mathcal{R}_\Phi^+ < \infty.$$

ب) برای هر قاب ψ داریم

$$\mathcal{R}_{\Phi\cup\Psi}^+ \leq \mathcal{R}_\Phi^+ + \mathcal{R}_\Psi^+, \qquad \mathcal{R}_{\Phi\cup\Psi}^- \geq \mathcal{R}_\Phi^- + \mathcal{R}_\Psi^-.$$

تعریف ۴.۲. [۱۰] فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. دنباله $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^N$ را یک قاب با m-اضافی[5] گویند اگر زیرمجموعه mعضوی σ از $[M]$ که $0 < m \leq M - N$ وجود داشته باشد به طوری که $\{\phi_i\}_{i\in[M]\setminus\sigma}$یک قاب در $\mathcal{H}^N$ باشد.

[5] m-excess

تعریف ۵.۲. [۱۰] فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. دنباله $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^N$ را یک قاب با m-اضافی یکنواخت [۶] گویند اگر برای هر زیرمجموعه mعضوی σ از $[M]$ که $0 < m \leq M - N$ ، $\{\phi_i\}_{i\in[M]\setminus\sigma}$یک قاب در$\mathcal{H}^N$ باشد. قاب‌های با m-اضافی یکنواخت در برابر حذف هر m بردار مقاوم هستند.

نوع خاصی از قاب‌های با اضافی یکنواخت قاب‌های تنک کامل [۷] هستند که نقشی اساسی در پردازش سیگنال پراکنده دارند.

تعریف ۶.۲. [۱۰] قاب $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ را تنک کامل یا کاملا پراکنده می‌گویند اگر با حذف هر $M - N$بردار یک قاب داشته باشیم. یعنی برای هر $\sigma \subset [M]$ که $|\sigma| = M - n$ است دنباله $\{\phi_i\}_{i\in[M]\setminus\sigma}$ یک قاب در $\mathcal{H}^N$ باشد.

در حقیقت قاب‌های کاملا تنک مجموعه‌های مولدی هستند که هر زیرمجموعه آن که هم‌اندازه با بعد فضا باشد، یک پایه است. این قاب‌ها ابزار مناسبی در روش‌های انتقال سیگنال‌هایی که در برابر اختلال مقاوم هستند، فراهم می‌کند[۱]. با توجه به تعاریف ۴.۲ و ۵.۲ هر قابی با m-اضافی یکنواخت باشد m-اضافی هم هست اما عکس آن لزوما برقرار نیست.
گزاره بعد، ارتباط قاب‌های با اضافی یکنواخت و تنک کامل را بیان می کند.

گزاره ۷.۲. *[۱۰] دنباله $\{\phi_i\}_{i\in[M]}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^N$ یک قاب تنک کامل است اگر وتنها اگر با $M - n$- اضافی یکنواخت باشد.*

فضای عملگرهای هیلبرت-اشمیت از زمینه‌های مورد علاقه فیزیکدانان است. این فضا هیلبرت است و به نوعی شبیه به فضای اقلیدسی است. خصوصا این‌که امکان تشخیص این‌که کدام دو عضو فضا متعامد هستند را دارا است.

تعریف ۸.۲. [۹] عملگر کران‌دار $Q : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ را هیلبرت-اشمیت گویند اگر برای هر پایه متعامد یکه $\{e_i\}_{i\in I}$ در فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}_1$ ، $\sum_{i\in I} \|Q(e_i)\|^2 < \infty$. فرض کنید $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای هیلبرت

[6] m- uniform excess
[7] full spark

به ترتیب با پایه‌های متعامد یکه $\{e_i\}_{i\in I}$ و $\{u_i\}_{i\in I}$ باشند. برای عملگرهای هیلبرت- اشمیت Q_1, Q_2 ضرب داخلی هیلبرت - اشمیت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle Q_1, Q_2\rangle_{\mathcal{HS}} = \sum_{i\in I}\langle Q_1(u_i), Q_2(u_i)\rangle.$$

و نرم القاشده توسط این ضرب داخلی که نرم هیلبرت-اشمیت نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|Q\|_{\mathcal{HS}} = \sqrt{\sum_{i\in I}\|Q(u_i)\|^2}.$$

مجموعه همه نگاشت‌های پادخطی $Q : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ به طوری که $\|Q\|_{\mathcal{HS}} < \infty$ با $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ نشان داده می شود و ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ گفته می شود که با ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت، یک فضای هیلبرت خواهد بود.

گزاره ۹.۲. *برای هر $f, k \in \mathcal{H}_1$ و $g, h \in \mathcal{H}_2$ داریم*

$$\langle f\otimes g, k\otimes h\rangle_{\mathcal{HS}} = \langle f, k\rangle_{\mathcal{H}_1}\langle g, h\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

و

$$\|f\otimes g\|_{\mathcal{HS}} = \|f\|\|g\|.$$

قضیه ۱۰.۲. *[۱۱] اگر $\{\phi_i\}_{i\in I}$ و $\{\psi_j\}_{j\in J}$ به ترتیب، قاب‌هایی برای $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ باشند در این صورت $\{\phi_i\otimes\psi_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ یک قاب برای $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ است.*

۳. نتایج اصلی

در این بخش روش‌هایی را که به کمک آن‌ها می‌توان قاب‌های m-اضافی یکنواخت را ساخت، مورد بررسی قرار می‌دهیم و به کمک معیار کمی حشو ، به دنبال بهترین روش برای ساختن این نوع از قاب‌ها هستیم. در حقیقت به دنبال الگوریتمی برای ساختن قاب‌های با اضافی یکنواخت می‌باشیم.

۱.۳. *ساخت قاب‌های با اضافی یکنواخت به‌کمک پایه متعامد یکه*

با ساده‌ترین روش برای ساخت این نوع از قاب‌ها شروع می‌کنیم. ابتدا به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال ۱.۳. فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{N}$پایه متعامد یکه $\mathcal{H}^N$ باشد. اعداد دلخواه $\alpha_1,\ldots\alpha_N$ که $\alpha_i \neq 0$ است را در نظر بگیرید و قرار دهید $e_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$ در این صورت دنباله $\{e_i\}_{i=1}^{N+1}$ یک قاب ۱- اضافی یکنواخت است. علاوه بر این، اگر اعداد غیرصفر دیگری مانند β_i وجود داشته باشد که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $\alpha_i\beta_j \neq \alpha_j\beta_i$ در این صورت دنباله $\{e_1,\ldots,e_N, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{N} \beta_j e_j\}$ یک قاب ۲- اضافی یکنواخت است. زیرا با حذف هر دو بردار باز هم قاب است. به عنوان مثال فرض کنید e_1 و e_2 حذف شده باشند. بنابراین ماتریس نمایش قاب حاصل به صورت

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_N & \beta_N \end{bmatrix}$$

چون $det(T) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ ماتریس T وارون‌پذیر است و در نتیجه دنباله $\{e_1,\ldots,e_N\}$ یک قاب (پایه) خواهد بود.

با توجه به مثال‌های گفته شده اولین روش ساختن قاب‌هایی که اضافی یکنواخت دارند به صورت زیر است:

نوع اول

برای با m- اضافی یکنواخت بودن قابی مانند $\{f_i\}_{i=1}^{M}$ باید

الف) تعداد بردارهای قاب در شرط $M \geq m + N$ صدق کند.

ب) بردارهای قاب به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f_i = e_i, \qquad i = 1,\ldots,N$$

$$f_{N+j} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} e_j, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

که در آن $\{\alpha_{i,j}\}$ مجموعه‌ای از اعداد غیرصفر است.

در این روش، اگر $M = N + m$ باشد قاب m-اضافی یکنواخت با حداقل تعداد بردار به دست می‌آید. به عنوان مثال قاب $\{e_1, e_2, e_1 + e_2, 3e_1 + 2e_2\}$ قاب ۲- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^2$ است. قاب‌هایی که با روش اول ساخته می‌شوند تنک کامل نیز هستند. قضیه بعد درستی این موضوع را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۳. *[۲]*
فرض کنید $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ یک پایه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^N$ باشد و $T = (t_{i,j})$ یک ماتریس $N \times M$ باشد، با این ویژگی که هر زیر ماتریس مربعی از T وارون‌پذیر باشد. قاب تعریف شده توسط

$$\phi_{N+j} = \sum_{i=1}^{N} t_{i,j} \phi_i, \qquad j = 1, \ldots, M$$

یعنی $\{\phi_i\}_{i=1}^{N+M}$ یک قاب تنک کامل است.

حشو در این روش یکنواخت نیست و با توجه به قضیه ۲.۳ در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$0 < \mathcal{R}^- < \frac{M+N}{N} < \mathcal{R}^+ < M.$$

نوع دوم
روش دیگری که به کمک آن می‌توان قاب m-اضافی یکنواخت ساخت تکرار $m + 1$ مرتبه از بردارهای پایه است. بنابراین اگر $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ پایه متعامد یکه فضای هیلبرت $\mathcal{H}^N$ باشد قاب

$$\{e_1, \ldots, e_1, e_2, \ldots, e_2, \ldots, e_N, \ldots, e_N\}$$

که در آن هر e_i، $m + 1$ مرتبه تکرار شده است یک قاب m-اضافی یکنواخت می‌باشد. قابی که با این روش ساخته می‌شود دارای حشو یکنواخت است و $\mathcal{R}^- = \mathcal{R}^+ = m + 1$.

۲.۳. *ساخت قاب‌های با اضافی یکنواخت به‌کمک قاب‌های با اضافی یکنواخت دیگر*

نوع سوم

می‌توان از اجتماع چند قاب با اضافی یکنواخت، قاب‌های با اضافی یکنواخت دیگر ساخت. قضیه بعد میزان اضافی یکنواخت قاب حاصل از اجتماع دو قاب با m_1- اضافی یکنواخت و m_2 اضافی یکنواخت را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۳. *[۱۴] فرض‌کنید Φ و Ψ به ترتیب دو قاب m_1-اضافی یکنواخت و m_2- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^N$ باشند. در این صورت $\Gamma = \Phi \cup \Psi$ یک قاب $m_1 + m_2 + 1$-اضافی یکنواخت است. حشو قاب Γ در روابط زیر صدق می‌کند:*

$$\mathcal{R}_\Gamma^+ \geq \mathcal{R}_\Phi^+ + \mathcal{R}_\Psi^+, \qquad \mathcal{R}_\Gamma^- \geq \mathcal{R}_\Phi^- + \mathcal{R}_\Psi^-.$$

مثال ۴.۳. قاب‌های $\Phi = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ و $\Psi = \{e_1, e_2, e_1 + 2e_2, e_1\}$ دو قاب ۱- اضافی یکنواخت و $\Gamma = \Phi \cup \Psi = \{e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1, e_2, e_1 + 2e_2, e_1\}$ یک قاب ۳- اضافی یکنواخت در هستند. تابع حشو قاب به صورت

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\Phi(f) &= \sum_{i=1}^{3} |\langle f, \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}\rangle|^2 \\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\rangle|^2\end{aligned}$$

برای قاب Φ داریم $\mathcal{R}_\Phi^+ = 2$ و $\mathcal{R}_\Phi^- = 1$ و همچنین برای قاب Ψ داریم $\mathcal{R}_\Psi^+ = 3$ و $\mathcal{R}_\Psi^- = 1$.
تابع حشو قاب $\Phi \cup \Psi$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\Phi\cup\Psi}(f) &= \sum_{i=1}^{3} |\langle f, \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{4} |\langle f, \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|}\rangle|^2 \\ &= 3|\langle f, e_1\rangle|^2 + 2|\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\rangle|^2 + |\langle f, \frac{e_1 + 2e_2}{\sqrt{5}}\rangle|^2\end{aligned}$$

است که با توجه به آن مقادیر حشو بالایی و حشو پائینی دارای مقادیر $\mathcal{R}_{\Phi\cup\Psi}^+ = \frac{37}{10}$ و $\mathcal{R}_{\Phi\cup\Psi}^- = \frac{33}{10}$.

۳.۳. *ساخت قاب با اضافی یکنواخت به‌کمک ضرب تانسوری*

نوع چهارم

در این روش می‌خواهیم از ضرب تانسوری دو قاب با اضافی یکنواخت کمک گرفته و قاب‌های با اضافی یکنواخت در فضاهای دیگر به‌دست آوریم. در اولین قضیه این بخش، ارتباط بین اضافی یکنواخت دو قاب و قاب حاصل از ضرب تانسوری آن‌ها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری دو قاب با اضافی یکنواخت $m_۱$ و $m_۲$ قابی با اضافی یکنواخت $m_۱ + m_۲ + m_۱m_۲$ است.

قضیه ۵.۳. *اگر $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in[M_۱]}$قاب با $m_۱$- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^{N_۱}$ و $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in[M_۲]}$ قاب با $m_۲$- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^{N_۲}$ باشند آنگاه $\Phi\otimes\Psi = \{\phi_i\otimes\psi_j\}_{(i,j)\in[M_۱]\times[M_۲]}$ قاب با $m_۱ + m_۲ +$ $m_۱m_۲$- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^{N_۱}\otimes\mathcal{H}^{N_۲}$ است.*

اثبات. فرض کنید $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in[M_۱]}$ یک قاب با $m_۱$ اضافی یکنواخت باشد پس برای هر زیر مجموعه $\sigma_۱$ از $[M_۱]$ که $|\sigma_۱| = m_۱ + ۱$ باشد، کامل نیست بنابراین بردار غیرصفر f در $\mathcal{H}^{N_۱}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in [M_۱]\setminus\sigma_۱$، $\langle f,\phi_i\rangle = ۰$. به همین ترتیب برای هر زیرمجموعه $m_۲ + ۱$ عضوی $\sigma_۲$ از $[M_۲]$، بردار $g \neq ۰$ در $\mathcal{H}^{N_۲}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in [M_۲]\setminus\sigma_۲$، $\langle g,\psi_i\rangle = ۰$. است. از آنجائی‌که $f\otimes g \neq ۰$ است و بنا به گزاره ۹.۲

$$\langle f\otimes g,\phi_i\otimes\psi_j\rangle = \langle f,\phi_i\rangle\langle g,\psi_j\rangle$$

پس برای هر $\sigma \subset [M_۱]\times[M_۲]$ که $|\sigma| = (m_۱+m_۲+m_۱m_۲)+۱$ دنباله $\{\phi_i\otimes\psi_j\}_{(i,j)\in[M_۱]\times[M_۲]\setminus\sigma}$ کامل نیست. حال فرض کنیم $Q \in \mathcal{H}^{N_۱}\otimes\mathcal{H}^{N_۲}$ و $\{u_k\}_{k=۱}^{N^۲}$پایه متعامد یکه $\mathcal{H}^{N_۲}$ باشد. اگر $\sigma \subset [M_۱]\times[M_۲]$ زیر مجموعه دلخواهی باشدکه $|\sigma| = (m_۱ + m_۲ + m_۱m_۲)$ است و برای هر

$(i,j) \in [M_1] \times [M_2] \setminus \sigma$ داشته باشیم $\langle Q, \phi_i \otimes \psi_i \rangle = 0$ در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{N_2} \langle Q(u_k), \phi_i \otimes \psi_j(u_k) \rangle = \sum_{k=1}^{N_2} \langle Q(u_k), \langle \psi_j, u_k \rangle \phi_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N_2} \langle \langle u_k, \psi_j \rangle Q(u_k), \phi_i \rangle = \langle Q \sum_{k=1}^{N_2} \langle u_k, \psi_j \rangle u_k, \phi_i \rangle \\ &= \langle Q\psi_j, \phi_i \rangle. \end{aligned}$$

پس برای هر $i \in [M_1] \setminus \sigma_1$ داریم $\langle Q\psi_j, \phi_i \rangle = 0$. قاب Φ با m_1- اضافی یکنواخت است برای هر $j \in [M_2] \setminus \sigma_2$ ، $Q\psi_j = 0$ و به دلیل m_2-اضافی یکنواخت بودن Ψ، می‌توان نتیجه گرفت $Q = 0$ است. $\square$

مثال ۶.۳. فرض کنید $\Phi = \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_2\}$ قاب ۱- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^2$ باشد و $\Psi = \{e_1, e_2, , e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ قاب ۱- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^3$ باشد بنابراین

$$\Phi \otimes \Psi = \{\gamma_i\}_{i=1}^{12} = \{e_1 - e_4, e_2 - e_5, e_3 - e_6, \sum_{i=1}^{3} e_i - \sum_{i=4}^{6} e_i, e_2 + e_5, e_3, e_6, \sum_{i=1}^{6} e_i, e_4, e_5, e_6, \sum_{i=4}^{6} e_i\}$$

یک قاب ۳- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^3 \cong \mathcal{H}^6$ است. این قاب ۴- اضافی یکنواخت نیست. به عنوان مثال اگر $\sigma = \{1, 4, 5, 8\}$ انتخاب شود در این صورت برای هر $i \in \sigma^c$ و $f = e_1 \in \mathcal{H}^6$ داریم $\sum_{i \in \sigma^c} |\langle f, \gamma_i \rangle|^2 = 0$.

در مثال قبل هر دو قاب Φو Ψ تنک کامل هستند بنابراین ضرب تانسوری دو قاب تنک کامل لزوما تنک کامل نیست. در گزاره بعد، تنها حالتی که ضرب تانسوری دو قاب تنک کامل، تنک کامل است را بیان می‌کنیم.

گزاره ۷.۳. *فرض کنیم $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in [M_1]}$ و $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in [M_2]}$ قاب‌های تنک کامل به ترتیب در $\mathcal{H}^{N_1}$ و $\mathcal{H}^{N_2}$ باشند در این صورت ضرب تانسوری Φ و Ψ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^{N_1} \otimes \mathcal{H}^{N_2}$ تنک کامل است اگر و تنها اگر هر دو پایه باشند.*

اثبات. فرض کنیم Φو Ψ تنک کامل باشند، بنا به گزاره ۷.۲، داریم: $m_1 = M_1 - N_1, m_2 = M_2 - N_2$ و حال اگر $\Phi \otimes \Psi$ در $\mathcal{H}^{N_1} \otimes \mathcal{H}^{N_2}$ تنک کامل باشد باید $M_1M_2 - N_1N_2$ -اضافی یکنواخت باشد. پس بنا به قضیه ۵.۳ داریم

$$(M_1 - N_1) + (M_2 - N_2) + (M_1 - N_1)(M_2 - N_2) = M_1M_2 - N_1N_2$$

و در نتیجه $(1 - N_1)(M_2 - N_2) + (1 - N_2)(M_1 - N_1) = 0$ بنابراین $M_1 = N_1, M_2 = N_2$.

و این یعنی این‌که Φ و Ψ هر دو پایه باشند ضرب تانسوری آن‌ها نیز پایه است و پایه‌ها، قاب تنک کامل هستند.

$\square$

در قضیه بعد، کرانی برای حشو بالایی و پائینی ضرب تانسوری دو قاب بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۳. *اگر $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in[M_1]}$ و $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in[M_2]}$ به ترتیب دو قاب در فضای هیلبرت متناهی $\mathcal{H}^{N_1}$ و $\mathcal{H}^{N_2}$ باشند در این صورت $\mathcal{R}^+_{\Phi\otimes\Psi} = \mathcal{R}^+_\Phi\mathcal{R}^+_\Psi$ و $\mathcal{R}^-_{\Phi\otimes\Psi} = \mathcal{R}^-_\Phi\mathcal{R}^-_\Psi$*

اثبات. فرض کنیم $\mathbb{S}_1$و $\mathbb{S}_2$به ترتیب گوی واحد در $\mathcal{H}^{N_1}$ و $\mathcal{H}^{N_2}$ باشد. بنا به تعریف حشو بالایی تابع حشو، $\mathcal{R}^+_\Phi = max_{h\in\mathbb{S}_1}\mathcal{R}_\Phi(h)$ بنابراین $f \in \mathbb{S}_1$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $h \in \mathbb{S}_1$ داریم $\mathcal{R}_\Phi(h) \leq \mathcal{R}_\Phi(f)$. هم‌چنین $g \in \mathbb{S}_2$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $k \in \mathbb{S}_2$ داریم $\mathcal{R}_\Psi(k) \leq \mathcal{R}_\Psi(g)$. علاوه بر این، $f \otimes g$ عضوی از $\mathcal{H}^{N_1} \otimes \mathcal{H}^{N_2}$ است و $||f \otimes g|| = ||f||||g|| = 1$ و برای هر

$h \in \mathbb{S}_1, k \in \mathbb{S}_2$داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^+_\Phi \mathcal{R}^+_\Psi &= \mathcal{R}_\Phi(f)\mathcal{R}_\Phi(g) \geq \mathcal{R}_\Phi(h)\mathcal{R}_\Psi(k) \\
&= \sum_{i\in[M_1]} |\langle h, \frac{\phi_i}{||\phi_i||}\rangle|^2 \sum_{j\in[M_2]} |\langle k, \frac{\psi_j}{||\psi_j||}\rangle|^2 \\
&= \sum_{i\in[M_1]} \sum_{j\in[M_2]} |\langle h, \frac{\phi_i}{||\phi_i||}\rangle|^2 |\langle k, \frac{\psi_j}{||\psi_j||}\rangle|^2 \\
&= \sum_{i\in[M_1]} \sum_{j\in[M_2]} |\langle h\otimes k, \frac{\phi_i\otimes\psi_j}{||\phi_i\otimes\psi_j||}\rangle|^2 \\
&= \mathcal{R}_{\Phi\otimes\Psi}(h\otimes k)
\end{aligned}$$

در نتیجه $\mathcal{R}^+_\Phi \mathcal{R}^+_\Psi = max_{h\in\mathbb{S}_1, k\in\mathbb{S}_2}\mathcal{R}_{\Phi\otimes\Psi}(h\otimes k)$ وبنابراین $\mathcal{R}^+_\Phi \mathcal{R}^+_\Psi = \mathcal{R}^+_{\Phi\otimes\Psi}$. با استدلالی مشابه، رابطه حشو پائینی قاب‌ها و قاب حاصل از ضرب تانسوری آن‌ها اثبات می‌شود. □

در مثال بعد، با استفاده از قضایای ۵.۳ و ۸.۳ از دو قاب ۱- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^2$، قاب ۱-اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^4$ خواهیم ساخت و حشو آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۹.۳. قاب‌های $\Phi = \{e_1, e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ و $\Phi = \{e_1, e_2, 2e_1 + e_2\}$ در$\mathcal{H}^2$ ۱- اضافی یکنواخت هستند. مقادیر حشو بالائی و پائینی آن‌ها به صورت زیر است

$$\mathcal{R}^+_\Phi = \frac{5}{2}, \mathcal{R}^-_\Phi = \frac{3}{2}, \mathcal{R}^+_\Psi = 2, \mathcal{R}^-_\Psi = \frac{6}{5}.$$

ضرب تانسوری این قاب‌ها، قاب ۳- اضافی یکنواخت $\Phi\otimes\Psi$ ساخته می‌شود که

$$\Phi\otimes\Psi = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_4, 2e_1+e_2, 2e_1+e_2, 2e_3+e_4, e_1+e_3, e_2+e_4, 2e_1+e_2+2e_3+e_4\}$$

با محاسباتی ساده $\mathcal{R}^+_{\Phi\otimes\Psi} = 5$ و $\mathcal{R}^-_{\Phi\otimes\Psi} = \frac{9}{5}$ بدست می‌آید. که موید قضیه قبل است.
حال اگر قاب ۳- اضافی یکنواختی که از اجتماع این دو قاب ۱- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^2$ به‌دست

می‌آید را در نظر بگیریم بنابراین

$$\Phi \cup \Psi = \{e_۱, e_۱, e_۲, e_۱ + e_۲, ۲e_۱ + e_۲, e_۱, e_۲, ۲e_۱ + e_۲\}$$

برای این قاب داریم $\mathcal{R}^{+}_{\Phi\cup\Psi} = \frac{۴۴}{۱۰}$ و $\mathcal{R}^{-}_{\Phi\cup\Psi} = \frac{۲۷}{۱۰}$ خواهد بود.
در مثال قبل به کمک ضرب تانسوری، از دو قاب ۱- اضافی یکنواخت توانستیم قاب ۳- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^۴$ بسازیم. حال اگر از روش سوم یعنی اجتماع دو قاب ۱- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^۴$ بخواهیم قاب ۳- اضافی یکنواخت بسازیم حالت‌های زیر را داریم:

الف) می‌توان اجتماع دو قاب از نوع اول را در نظر گرفت.

ب) اجتماع دو قاب از نوع دوم در نظر گرفته شود

ج) و یا ترکیبی از هر دو روش داشته باشیم

۴.۳ . *الگوریتم ساخت قاب‌های اضافی یکنواخت*

هر کدام از روش‌های گفته شده برای ساخت قاب‌های اضافی یکنواخت دارای مزایا و معایب خاص خودشان هستند و در زمان استفاده گاهی یکی از روش‌ها قابل استفاده نیست و یا استفاده از یکی از آن‌ها نسبت به روش دیگر حشو کمتر یا بیشتری تولید می‌کند. میزان حشو مورد قبول در هر روشی، به مورد استفاده آن قاب بستگی دارد. حشو بالای قاب، مقاومت قاب را در برابر محوشدگی ضرایب قاب، اختلال و یا جابه‌جایی ضرایب در هنگام انتقال یک سیگنال بالا می‌برد و حشو کمتر قاب، میزان مصرف انرژی را پایین می‌آورد. بنابراین بر اساس اینکه قاب اضافی یکنواخت تولید شده برای چه موضوعی استفاده خواهد شد آن قاب و روش تولید کردن آن ارجحیت دارد. برخی مزایا و معایب هر کدام از روش‌های ساخت قاب اضافی یکنواخت در ادامه بیان خواهد شد.

الف) یکی از برتری‌های روش ضرب تانسوری قاب‌های اضافی یکنواخت بر روش اجتماع، توانایی آن در طراحی قاب برای فضاهای با ابعاد مختلف است. به عنوان مثال با داشتن دو قاب ۱- اضافی یکنواخت در فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}^۲$ و $\mathcal{H}^۳$، با ضرب تانسوری می‌توان قاب‌های ۳- اضافی یکنواخت در $\mathcal{H}^۲ \otimes \mathcal{H}^۲ \cong \mathcal{H}^۴$ و $\mathcal{H}^۲ \otimes \mathcal{H}^۳ \cong \mathcal{H}^۶$ و $\mathcal{H}^۳ \otimes \mathcal{H}^۳ \cong \mathcal{H}^۹$ ساخت در صورتی

که با روش اجتماع تنها می‌توان در همان فضاهای $\mathcal{H}^2$ و $\mathcal{H}^3$ قاب ۳- اضافی یکنواخت به‌دست آورد.

ب) روش ضرب تانسوری را عملاً در حالتی که بعد فضا یک عدد اول باشد نمی‌توان به‌کار برد و باید از یکی از روش‌های اول تا سوم استفاده کرد.

ج) بعضی از درجات اضافی یکنواخت را با برخی روش‌ها نمی‌توان تولید کرد. به عنوان مثال، قاب ۱- اضافی یکنواخت را با روش اجتماع نمی‌توان به‌دست آورد و قاب ۴- اضافی یکنواخت را با ضرب تانسوری نمی‌توان ساخت. با توجه به روش‌ها و مثال‌های گفته شده الگوریتمی برای ساختن قاب‌های با اضافی یکنواخت ارائه خواهد شد. این الگوریتم بر اساس ابعاد فضای هیلبرت مورد بحث، در دو حالت بیان خواهد شد. ابتدا به صورت خلاصه مراحل این الگوریتم را توضیح می‌دهیم سپس دستورات این الگوریتم ارائه خواهد شد.

فرض کنید $\mathcal{H}^n$ یک فضای هیلبرت با پایه متعامد یکه $A_0^{(1)} = e_1, \dots, e_n$ باشد و $C = \sum_{i=1}^{n} e_i$ را در نظر بگیرید. در این الگوریتم، بعد فضا و میزان اضافی یکنواخت یعنی n و m به عنوان مقادیر ورودی انتخاب می‌شوند و در فضای $\mathcal{H}^n$ قاب با m- اضافی یکنواخت ساخته خواهد شد.

حالت اول) اگر n عدد اول باشد:

گام اول) قرار دهید $m = 1$ و $A_1^{(2)}[n] = e_1, \dots, e_n, e_1, \dots, e_n$ و $A_1^{(1)}[n] = A_0^{(1)}, C$ و $\{A_1^{(1)}[n]\}$ و $\{A_1^{(2)}[n]\}$ را در خروجی چاپ کنید. قرار دهید $m = m + 1$ و به گام بعد بروید.

گام دوم) برای $p = 1, \dots, 2^{m-1}$ و $j = 1, \dots, 2^{m-1}$ قرار دهید $A_m^{(p)}[n] = A_{m-1}^{(j)}[n], A_0^{(1)}$ و برای $p = 2^{m-1} + 1, \dots, 2^m$ و $j = 1, \dots, 2^{m-1}$ قرار دهید $A_m^{(p)}[n] = A_{m-1}^{(j)}[n], C$ و $\{A_m^{(p)}[n]\}$ در خروجی چاپ شود. اگر قاب با اضافی یکنواخت بزرگتر مدنظر است به گام بعدی بروید. در غیر این‌صورت الگوریتم به پایان می‌رسد.

گام سوم) قرار دهید $m = m + 1$ و به گام دوم بروید.

حالت دوم) فرض کنید n عدد مرکب و $n = n_1 \times n_2$ تجزیه آن به عوامل اول باشد. فرض کنیم $A_0^{(0)} = e_1, \dots, e_n$ پایه متعامد یکه $\mathcal{H}^n$ و $A_0^{(0)} = e_1, \dots, e_{n_1}$ و $A_0^{(0)} = e_1, \dots, e_{n_2}$ به ترتیب پایه‌های

متعامد یکه $\mathcal{H}^{n_1}$ و $\mathcal{H}^{n_2}$ باشند. برای $i, j = 1, \ldots, [\frac{m}{2}]-1$ و $k = 1, \ldots, m$ اگر $k \neq i+j+ij$ باشد، مراحل همانند گام دوم در حالت اول خواهد بود. ولی اگر $k = i + j + ij$ باشد برای $p = 1, \ldots, 2^{i+j}$ و $f = 1, \ldots, 2^i$ و $g = 1, \ldots, 2^j$ قرار دهید $A_k^{(p)}[n] = A_i^{(f)}[n_1] \otimes A_j^{(g)}[n_2]$.

۴. الگوریتم

به عنوان ورودی مقادیر m و n و پایه متعامد یکه فضا یعنی $A_\circ^{(1)} = e_1, \ldots, e_n$ را وارد کنید. و قرار دهید $C = \sum_{i=1}^n e_i$ اگر عدد n اول باشد داریم:

for $k = 1, \ldots, m$ **do**
  for $p = 1, \ldots, 2^{k-1}$ **do**
    for $j = 1, \ldots, 2^{k-1}$ **do**
      $A_k^{(p)}[n] = A_{k-1}^{(j-1)}[n], A_\circ^{(\circ)}[n]$
    end for
  end for
end for
for $p = 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k$ **do**
  for $j = 1, \ldots, 2^{k-1}$ **do**
    $A_k^{(p)}[n] = A_{k-1}^{(j-1)}[n], C$
  end for
end for

فرض کنید n عدد مرکب و $n = n_1 \times n_2$ تجزیه آن به عوامل اول باشد. و پایه‌های $A_\circ^{(\circ)} = e_1, \ldots, e_n$ متعامد یکه فضای $\mathcal{H}^n$ و $A_\circ^{(\circ)} = e_1, \ldots, e_{n_1}$ و $A_\circ^{(\circ)} = e_1, \ldots, e_{n_2}$ به ترتیب پایه‌های متعامد یکه $\mathcal{H}^{n_1}$ و $\mathcal{H}^{n_2}$ باشند را وارد کنید. و قرار دهید $C = \sum_{i=1}^n e_i$.

for $i = 1, \ldots, [\frac{m}{2}] - 1$ **do**
  for $j = 1, \ldots, [\frac{m}{2}] - 1$ **do**
    for $k = 1, \ldots, m$ **do**
      if $k \neq i + j + ij$ **then**

for $p = ۱, \ldots, ۲^{k-۱}$ **do**

  for $j = ۱, \ldots, ۲^{k-۱}$ **do**

    $A_k^{(p)}[n] = A_{k-۱}^{(j-۱)}[n], A_۰^{(۱)}[n]$

  end for

end for

for $p = ۲^{k-۱} + ۱, \ldots, ۲^k$ **do**

  for $j = ۱, \ldots, ۲^{k-۱}$ **do**

    $A_k^{(p)}[n] = A_{k-۱}^{(j-۱)}[n], C$

  end for

end for

for $p = ۲^k + ۱, \ldots, ۲^{k+۱}$ **do**

  for $l = ۱, \ldots, ۲^{k-۱}$ **do**

    $A_k^{(p)}[n] = A_۰^{(۱)}[n_۱] \otimes A_k^{(l)}[n_۲]$

  end for

end for

for $p = ۲^{k+۱} + ۱, \ldots, k۲^k$ **do**

  for $l = ۱, \ldots, ۲^k$ **do**

    $A_k^{(p)}[n] = A_k^{(l)}[n_۱] \otimes A_۰^{(۲)}[n_۲]$

  end for

end for

else

  if $k = i + j + ij$ **then**

    for $p = ۱, \ldots, ۲^{i+j}$ **do**

      for $f = ۱, \ldots, ۲^i$ **do**

        for $g = ۱, \ldots, ۲^j$ **do**

          $A_k^{(p)}[n] = A_i^{(f)}[n_۱] \otimes A_j^{(g)}[n_۲]$

```
                    end for
                 end for
              end for

              print{A_k^(p)[n]}
           end if
        end if
     end for
  end for
end for
```

۵. تشکر وقدردانی

نویسندگان از داوران گرامی این مقاله به خاطر مطالعه دقیق و پیشنهادهاي سازنده ایشان که موجب بهبود کیفیت مقاله شده است، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[۱] B. Alexeev، J. Cahill and D. Mixon، Full spark frames، *J. Fourier Anal. Appl.*، ۱۸(۶) (۲۰۱۲)، ۱۱۶۷–۱۱۹۴.

[۲] Lj. Arambasic and D. Bakic، Expansions from frame coefficients with erasures، http://arxiv.org/abs/۱۶۰۲۰۱۶۵۶..

[۳] B.G. Bodmann، P.G. Casazza and G. Kutyniok، Upper and lower redundancy of finite frames، *Proc. Conf. Inf. Sci. Syst.*، (۲۰۱۰)، ۱–۶.

[۴] P.G. Casazza، The art of frame theory، *Taiwan. J. Math.*، ۴ (۲۰۰۰)، ۱۲۹–۲۰۲.

[۵] P.G. Casazza، A. Heinecke، K. Kornelson، Y.Wang and Z. Zhou، Necessary and sufficient conditions to perform spectral tetris، *Linear Algebra and Applications*، ۴۳۸(۵) ،(۲۰۱۳) ۲۲۳۹– ۲۲۵۵.

[۶] P.G. Casazza and J. Kovacevic، Uniform tight frames with erasures، *Adv. Comput. Math*، ۱۸(۲-۴) ،(۲۰۰۳) ۳۸۷–۴۳۰.

[۷] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*، Birkhauser، Boston، ۲۰۱۲.

[۸] R.J. Duffin and A.C. Shaeffer، A class of nonharmonic Fourier series، *Transactions of the American Mathematical Society*، ۷۲(۲) ،(۱۹۵۲) ۳۴۱–۳۶۶.

[۹] G.B. Folland، *A Course in Abstract Harmonic Analysis*، CRC Press BOCA Raton، Florida، ۱۹۹۵.

[۱۰] D.G. Han and W.C. Sun، Reconstruction of signals from frame coefficients with ereasures at unknown locations، *IEEE Trans. Inform. Theory*، ۶۰ ،(۲۰۱۴) ۴۰۱۳–۴۰۲۵.

[۱۱] A. Khosravi، Frames and bases in tensor product of Hilbert space، *Int. Math. J.*، ۶ ،(۲۰۰۳) ۵۲۷–۵۳۷.

[۱۲] J. Kovacevic and A. Chebira، *An Introduction to Framrs، Foundations and Trends in Signal Processing*، ۲(۱) ،(۲۰۰۸) ۱–۹۴.

[۱۳] J. Leng، D. Han and T. Huang، Optimal dual frames for communication coding with probabilistic erasure، *IEEE Transaction on Signal Processing*،۵۹(۱۱) ،(۲۰۱۱) ۵۳۸۰–۵۳۸۹.

[۱۴] X. Xiao، G. Zhou and Y. Zhu، Uniform excess frames in Hilbert spaces، *Results Math*، ۷۳ ،(۲۰۱۸) ۱۰۸.