موجک‌ها و جبرخطی ۶(۲) (۱۳۹۸) ۱۳۷-۱۲۵

Wavelets and Linear Algebra

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

خواص جدید نگاشتهای بدست آمده توسط p-قابها روی فضاهای باناخ

الناز اسگویی[*][آ]، **اصغر رحیمی**[ب]

[آ] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران*

[ب] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۳۱ اردیبهشت ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۲۳ تیر ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی جمال

کلمات کلیدی:
قاب، p-قاب، نگاشت یکنوا، نگاشت وادارنده، نگاشت فزاینده.

چکیده

p-قابها روی فضاهای باناخ توسیع مستقیمی از قابها روی فضاهای هیلبرت می‌باشند. برخلاف انواع دیگر قابها، نگاشت p-قابها به دلیل خطی نبودن نگاشت دوگانی، خاصیت خطی و عملگری خود را از دست داده و مانند یک نگاشت غیر خطی از فضای باناخ X به دوگان آن عمل می‌کند. در این مقاله با گذاشتن شرایطی روی p-قابها خواصی از نگاشت p-قاب مانند بطور ضعیف پیوستگی، یکنوایی و وادارنده بودن بررسی می شود. همچنین با ترکیب عملگر تجزیه U با الحاق عملگر $T^{\perp}$، خواص فزایندگی و طولپایی عملگر $U(T^{\perp})^{*}$ بررسی می‌شود.

[*] نویسنده مسئول

۱. مقدمه

مفهوم قاب‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین [1] و شِفِر [2] در موضوع آنالیز غیرهارمونیک مطرح شد [۱۱]. مطالعات دافین و شِفِر کاربرد زیادی نداشت تا اینکه در سال ۱۹۸۶ دابشیز، [3] گراسمان [4] و مایر [5] مفهوم قابها را در زمینه تبدیلات گابور و موجک بکار بردند [۹]. پس از آن نظریه قابها بطور گسترده و عمیق توسط بسیاری از افراد مطالعه شد و در بسیاری از علوم مانند پردازش سیگنال، پردازش تصویر، کدگذاری و سیستمهای اینترنت و موبایل مورد استفاده قرار گرفت [۱۹، ۱۵، ۱۳، ۸].

نظریه قابها روی فضاهای هیلبرت بطور وسیعی روی فضاهای باناخ توسعه داده شده است. در سال ۱۹۹۰ گروچنیگ، [6] الدروبی، [7] سانگ [8] و تنگ [9] [۱۴، ۱] مفهوم قابها را روی فضاهای باناخ مطالعه کرده و دو نوع مختلف از قابها را روی فضاهای باناخ تحت عنوان قابهای باناخ و p-قابها مطرح نمودند. پس از آنها کریستینسن [10] و استوا [11] [۷] مفهوم p-قابها را روی فضاهای باناخ مطالعه کرده و هر عضو فضای باناخ را با استفاده از دنباله p-قاب بازسازی کردند. عارفی جمال و محمدخانی مفهوم دوگان p-قابها را مطرح نموده و رابطه بازنویسی شده کریستینسن را به کمک مفهوم دوگان بدست آوردند [۲]. فاروقی و اسگویی مفهوم p-قابهای پیوسته را مطرح کرده و نتایج مهمی در این زمینه ارائه داده‌اند که از جمله رابطه بازنویسی ذکر شده را به کمک p-قابهای پیوسته و قابهای باناخ بدست آورده و خواص نگاشتی نگاشت قاب را روی فضاهای باناخ بررسی کرده‌اند. [۱۸، ۱۲].

در مطالعه قابها، عملگرهای مرتبط با آنها بسیار مورد توجه بوده و به عنوان ابزاری بسیار نیرومند مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از عملگرهای وابسته به قابها عملگر قاب می‌باشد که بدلیل خواص خطی،

آدرس ایمیلها: e.osgooei@uut.ac.ir (الناز اسگویی)، rahimi@maragheh.ac.ir (اصغر رحیمی)

[1]Duffin
[2]Schaeffer
[3]Daubechies
[4]Grossmann
[5]Meyer
[6]Gröchenig
[7]Aldroubi
[8]Sung
[9]Tang
[10]Christensen
[11]Stoeva

کرانداری، معکوس پذیری، مثبت و خودالحاق بودن بیشتر مورد توجه می‌باشد. اما در مورد p-قابها این نگاشت متفاوت بوده و بدلیل خطی نبودن نگاشت دوگانی [۱۲] خاصیت خطی و عملگری خود را از دست می‌دهد.

در این مقاله با ایده گرفتن از نتایج استوا در [۲۲] که معکوس پذیری و مثبت بودن نگاشت قاب S را روی فضاهای باناخ مطالعه نموده است، خواص متفاوتی از نگاشت p-قاب S بررسی شده است. در بخش اول این مقاله، تعاریف مقدماتی قاب‌ها آورده شده و سپس اشاره‌ای کوتاه به تعاریف p-قابها می‌شود. در بخش دوم با توجه به شرایطی که روی p-قابها گذاشته می‌شود، خواص متفاوتی از نگاشت p-قاب مانند بطور ضعیف پیوستگی، [۱۳] یکنوایی [۱۴] و وادارنده بودن [۱۵] بررسی می‌شود. در بخش سوم عملگر جدیدی از ترکیب عملگر تجزیه U و الحاق عملگر وارون $(T^{\perp})$ روی فضای ℓ^p بدست می‌آید که خاصیت فزایندگی [۱۶] این عملگر بسیار مورد توجه است.

در سراسر این مقاله X یک فضای باناخ و X^* دوگان آن می‌باشد.

تعریف ۱.۱. [۶] دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ یک قاب برای فضای هیلبرت H گفته می‌شود هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشد بطوریکه

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H, \tag{1.1}$$

مقادیر ثابت A, B به ترتیب کرانهای پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ یک دنباله بسل برای H نامیده می‌شود اگر در عبارت (۱.۱) نابرابری سمت راست برقرار باشد.

فرض کنیم $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل برای H باشد. دراینصورت عملگر

$$T : \ell^2 \to H, \quad T\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i,$$

[12] duality mapping
[13] weakly continuous
[14] monotone
[15] coercive
[16] accretive

عملگر ترکیب و الحاق آن به صورت

$$T^* : H \to \ell^2, \quad T^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty},$$

عملگر تجزیه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. [۷] دنباله $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$ یک p-قاب ($1 < p < \infty$) برای فضای باناخ X نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند بطوریکه

$$A\|f\| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g_i, f\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leq B\|f\|, \quad f \in X, \tag{۲.۱}$$

دنباله $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله p-بسل نامیده می‌شود هرگاه نابرابری سمت راست در (۲.۱) برقرار باشد.

اگر $X^* \supseteq \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X باشد. آنگاه عملگرهای

$$U : X \to \ell^p, \quad Uf = \{\langle g_i, f\rangle\}_{i=1}^{\infty},$$

و

$$T : \ell^q \to X^*, \quad T\{d_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i g_i,$$

خوشتعریف و کراندارند. عملگرهای U و T را به ترتیب عملگرهای تجزیه و ترکیب $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامند. اگر $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب و یا فقط یک دنباله p-بسل باشد دراینصورت U, T عملگرهای کراندار می‌باشند.

لم ۳.۱. *[۷] فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله p-بسل باشد در اینصورت گزاره‌های زیر برقرارند:*
(۱) $U^* = T$.
(۲) $U \subseteq T^*$، به این معنی‌که T^* توسیعی از U است و اگر X انعکاسی باشد، آنگاه $U = T^*$.

توجه شود که برای تعریف نگاشت p-قاب، به نگاشتی از فضای باناخ ℓ^p بتوی فضای باناخ ℓ^q نیاز است. برای رسیدن به این هدف از نگاشت دوگانی استفاده می‌شود.

ابتدا یادآوری می شود که فضای باناخ X

-محدب اکید [17] نامیده می‌شود در صورتیکه بازای $x, y \in X$ اگر $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = ۱$، آنگاه بازای $\lambda \in (۰, ۱)$، $\|\lambda x + (۱ - \lambda)y\| < ۱$ [۲۲، ۱۷].

-محدب یکنواخت [18] نامیده می‌شود درصورتیکه فرضیات $X \supset \{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$، $X \supset \{y_i\}_{i=۱}^{\infty}$، $\|x_i\| \leq ۱$، $\|y_i\| \leq ۱$ و $\lim_{i\to\infty} \|x_i + y_i\| = ۲$ نتیجه دهد که $\lim_{i\to\infty} \|x_i - y_i\| = ۰$ [۲۲، ۱۷].

نگاشت ϕ_X از X بتوی مجموعه زیرمجموعه‌های X^* تعریف شده بصورت

$$\phi_X x = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \|x\|^۲ = \|x^*\|^۲\},$$

نگاشت دوگانی روی X نامیده می‌شود [۲۲، ۱۷]. با استفاده از قضیه هان باناخ، بازای هر $x \in X$، $\phi_X x$ یک مجموعه ناتهی بوده و $\phi_X ۰ = ۰$. فضای باناخ X هموار [19] نامیده می‌شود هرگاه $\phi_X(x)$ برای هر $x \in X$ یک مجموعه تک عضوی باشد [۲۲، ۱۷].

گزاره ۴.۱. *[۲۲، ۱۰] اگر X یک فضای باناخ باشد گزاره‌های زیر برقرارند:*

(۱) اگر X^* محدب اکید باشد، آنگاه برای هر $x \in X$، $\phi_X x$ یک مجموعه تک عضوی است.

(۲) اگر X و X^* محدب اکید بوده و X انعکاسی باشد دراینصورت ϕ_X دوسویی است.

گزاره ۵.۱. *[۲۲، ۱۷] فرض کنید $۱ < p, q < \infty$ بطوریکه $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ و $X = \ell^p$. در آن صورت X محدب یکنواخت بوده و هموار است. همچنین، برای هر عنصر غیر صفر $x = \{x_i\}_{i=۱}^{\infty} \in \ell^p$ خواهیم داشت $\phi_{\ell^p}(x) = x^*$ که در آن $x^* = \{x_i^*\}_{i=۱}^{\infty} \in \ell^q$ و*

$$x_i^* = \|x\|_{\ell^p}^{۲-p} |x_i|^{p-۱} sgn(x_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

تعریف ۶.۱. [۲۲] فرض کنید $\{g_i\}_{i=۱}^{\infty} \subseteq X^*$ یک p-قاب برای X باشد. نگاشت : $S := T\phi_{\ell^p} U$

[17] strictly convex
[18] uniformly convex
[19] smooth

$X \to X^*$ نگاشت p-قاب برای $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود و

$$\langle Sf, f\rangle = \langle T\phi_{\ell^p}Uf, f\rangle = \langle \phi_{\ell^p}Uf, Uf\rangle = \| Uf \|_p^2 = (\sum_{i=1}^{\infty} | \langle g_i, f\rangle |^p)^{\frac{2}{p}}.$$

۲. خواص القا شده به نگاشت S توسط p-قابها

دراین بخش با در نظر گرفتن اینکه $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ یک p-قاب برای X است، خواصی از نگاشت S مطالعه می‌شود. در واقع، شرایطی که تحت آن، نگاشت S می‌تواند بطورضعیف پیوسته، یکنوا و وادارنده باشد، بررسی می‌گردد.

تعریف ۱.۲. [۵، ۲۰] نگاشت $A : X \to X^*$ یکنوا نامیده می‌شود هرگاه بازای هر $x, y \in X$

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0.$$

لم ۲.۲. *[۱۶] فرض کنید X یک فضای باناخ هموار و ϕ_X نگاشت دوگانی روی آن باشد. دراینصورت*

$$\langle \phi_X x - \phi_X y, x - y\rangle \geq 0.$$

گزاره ۳.۲. *فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$ یک p-قاب برای X باشد. دراینصورت گزاره‌های زیر برقرارند:*
(۱) نگاشت p-قاب S بطور ضعیف پیوسته است.
(۲) نگاشت p-قاب S یکنوا است.

اثبات. (۱) از آنجا که ϕ_{ℓ^p} بطور ضعیف پیوسته است [۳] و عملگرهای U, T کراندار می‌باشند، بنابراین $S = T\phi_{\ell^p}U$ بطور ضعیف پیوسته است.
(۲) بازای هر $f_1, f_2 \in X$

$$\begin{aligned}\langle S(f_1) - S(f_2), f_1 - f_2\rangle &= \langle T\phi_{\ell^p}U(f_1) - T\phi_{\ell^p}U(f_2), f_1 - f_2\rangle \\ &= \langle \phi_{\ell^p}U(f_1) - \phi_{\ell^p}U(f_2), U(f_1) - U(f_2)\rangle.\end{aligned}$$

از آنجا که ℓ^p یک فضای باناخ هموار است، با استفاده از لم ۲.۲

$$\langle \phi_{\ell^p}(U(f_1)) - \phi_{\ell^p}(U(f_2)), U(f_1) - U(f_2)\rangle \geq 0.$$

بنابراین S یک نگاشت یکنوا می‌باشد. □

تعریف ۴.۲. [۲۰] نگاشت $A : X \to X^*$ یک نگاشت وادارنده است اگر نگاشت $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ موجود باشد بطوریکه $\lim_{s\to+\infty} \tau(s) = +\infty$ و

$$\langle A(u), u\rangle \geq \tau(\|u\|)\|u\|.$$

وادارنده بودن A نتیجه می‌دهد $\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|} = +\infty$.

گزاره ۵.۲. *[۲۰] اگر نگاشت بطور ضعیف پیوسته $A : X \to X^*$ وادارنده باشد، دراینصورت معادله $A(u) = g$، بازای $g \in X^*$ دارای جواب است.*

گزاره ۶.۲. *فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ یک p-قاب برای X با کرانهای A, B باشد. دراینصورت نگاشت p-قاب S وادارنده است.*

اثبات. از آنجا که $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X با کرانهای A, B است، لذا

$$A^2\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B^2\|f\|^2, \quad f \in X.$$

بنابراین برای $f \neq 0$ داریم

$$A^2\|f\| \leq \frac{\langle Sf, f\rangle}{\|f\|} \leq B^2\|f\|.$$

در نتیجه $\lim_{\|f\|\to+\infty} \frac{\langle Sf,f\rangle}{\|f\|} = +\infty$. □

نتیجه ۷.۲. *فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X باشد. دراینصورت معادله $Sf = g$ بازای هر $g \in X^*$ دارای جواب است.*

۳. خاصیت فزایندگی نگاشت $U(T^{\perp})^*$ القا شده توسط p-قابها

در این بخش شرایط مناسب روی p-قابها در نظر گرفته می‌شود که تحت آن عملگر $U(T^{\perp})^*$ بتواند خواصی مانند فزایندگی و طولپایی [۲۰] داشته باشد.

تعریف ۱.۳. [۲۲] فرض کنید X_d یک فضای باناخ دنباله‌ای با دوگان X_d^* باشد. فضای X_d یک BK-فضا می‌باشد هر گاه تابعکهای مولفه‌ای روی X_d پیوسته باشند. X_d یک CB-فضا نامیده می‌شود هر گاه بردارهای متعارف آن یک پایه شودر برای فضا تشکیل دهند و یک RCB-فضا نامیده می‌شود هر گاه انعکاسی بوده و CB-فضا باشد.

از آنجا که $X_d = \ell^p$ و $X_d^* = \ell^q$، RCB-فضا بوده و محدب یکنواخت هستند [۲۲]، نتایج زیر برقرار است:

گزاره ۲.۳. *[۲۲] فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$ یک p-قاب برای X باشد. دراینصورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) عملگر T دارای معکوس راست کراندار است.

(۲) $Ker(T)$ در فضای ℓ^q کامل می‌شود. [۲۱]

اگر فضای M متمم توپولوژیکی [۲۲] *$Ker(T)$ در ℓ^q باشد. در اینصورت $(T|_M)^{-1}$ معکوس راست کراندار T می‌باشد.*

تعریف ۳.۳. [۲۲] فرض کنید X_d یک RCB-فضای محدب اکید باشد بطوریکه X_d^* نیز محدب اکید بوده و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X باشد. همچنین فرض کنید $KerT$ و $(KerT)^{\perp}$ متمم توپولوژیکی یکدیگر در ℓ^q باشد. در اینصورت $T^{\perp} = (T|_{(KerT)^{\perp}})^{-1}$ معکوس راست کراندار T می‌باشد که وجود آن از گزاره ۲.۳ نتیجه می‌شود.

گزاره ۴.۳. *[۲۲] فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعارف کانونی فضای ℓ^q بوده و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X باشد. همچنین فرض کنید $KerT$ و $(KerT)^{\perp}$ متمم توپولوژیکی یکدیگر در ℓ^q بوده و $T^{\perp}$*

[20] isometric

[21] *complemented*

[22] *topological complement*

معکوس راست کراندار T باشد. دراینصورت دنباله $\{(T^{\perp})^{*}e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک q-قاب متعارف $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ بوده و بازای هر $g \in X^{*}$

$$T^{\perp}g = \{T^{\perp}g(e_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{g(T^{\perp})^{*}(e_i)\}_{i=1}^{\infty} \qquad (۱.۳)$$

تعریف ۵.۳. [۴] فرض کنید X یک فضای باناخ و K زیرمجموعه ای از X باشد. نگاشت $A : X \to X$ یک نگاشت فزاینده نامیده می‌شود هرگاه بازای هر $u, v \in K$

$$\langle \phi_X(u-v), A(u) - A(v) \rangle \geq 0.$$

تعریف ۶.۳. [۲۱] عملگر کراندار $A : X \to X$ عملگر آبلی الحاقی [23] نامیده می شود هر گاه نگاشت دوگانی $\phi_X : X \to X^{*}$ موجود باشد بطوریکه

$$A^{*}\phi = \phi A.$$

قضیه ۷.۳. *فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک p-قاب برای X بوده و فرضیات گزاره ۴.۳ برقرار باشد. همچنین فرض کنید $T^{\perp}T$ یک عملگر آبلی الحاقی بوده و $\langle g_i, S^{-1}g_k \rangle = \delta_{i,k}$. دراینصورت نگاشت $U(T^{\perp})^{*} : \ell^p \to \ell^p$ فزاینده است.*

اثبات. بازای هر $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$

$$\langle \phi_{\ell^p}(x-y), U(T^{\perp})^{*}(x) - U(T^{\perp})^{*}(y) \rangle = \langle T\phi_{\ell^p}(x-y), (T^{\perp})^{*}(x-y) \rangle$$

[23] adjoint abelian

با استفاده از گزاره ۵.۱

$$\begin{aligned}\langle T\phi_{\ell^p}(x-y),(T^\perp)^*(x-y)\rangle &= \langle T(\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\{|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)\}_{i=1}^\infty),(T^\perp)^*(x-y)\rangle\\ &= \langle\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}T(\{|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)\}_{i=1}^\infty),(T^\perp)^*(x-y)\rangle\\ &= \langle\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)g_i,(T^\perp)^*(x-y)\rangle\\ &= \|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\langle T^\perp(\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)g_i),x-y\rangle\\ &= \|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\langle\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)T^\perp(g_i),x-y\rangle \qquad (2.3)\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۵.۱ [۲۲]، $\{(T^\perp)^*e_i\}_{i=1}^\infty=\{S^{-1}g_i\}_{i=1}^\infty$. بنابراین از (۱.۳) و (۲.۳)

$$\begin{aligned}&\langle T\phi_{\ell^p}(x-y),(T^\perp)^*(x-y)\rangle=\\ &\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\langle\textstyle\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)\{g_i((T^\perp)^*e_k)\}_{k=1}^\infty,\{x_k\}-\{y_k\}\rangle=\\ &\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\textstyle\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)\langle\{g_i(S^{-1}g_k)\}_{k=1}^\infty,\{x_k\}-\{y_k\}\rangle=\\ &\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\textstyle\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^{p-1}sgn(x_i-y_i)\langle\{\langle g_i,S^{-1}g_k\rangle\}_{k=1}^\infty,\{x_k\}-\{y_k\}\rangle=\\ &\|x-y\|_{\ell^p}^{2-p}\textstyle\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^p=\|x-y\|_{\ell^p}^2\geq 0.\end{aligned}$$

بنابراین $U(T^\perp)^*$ یک نگاشت فزاینده است. □

گزاره ۸.۳. *فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ یک p-قاب برای X بوده و فرضیات قضیه ۷.۳ برقرار باشد. در اینصورت $U(T^\perp)^*$ یک عملگر طولپای است.*

اثبات. بازای هر $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$

$$\begin{aligned}
\|U(T^{\perp})^*(x)\|_{\ell^p} &= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle z, U(T^{\perp})^*(x)\rangle| \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle Tz, (T^{\perp})^*(x)\rangle| \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle T^{\perp}Tz, x\rangle| \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle \{(Tz)(T^{\perp})^*(e_k)\}_{k=1}^{\infty}, x\rangle\ | \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle \{(Tz)(T^{\perp})^*(e_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\rangle\ | \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} |\langle \{(Tz)(S^{-1}g_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\rangle\ | \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(x_k)}(Tz)(S^{-1}g_k) \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k}\langle \sum_{i=1}^{\infty} z_i g_i, S^{-1}g_k\rangle \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} (\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \sum_{i=1}^{\infty} z_i\langle g_i, S^{-1}g_k\rangle) \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} \langle \{z_k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \rangle \\
&= \sup_{z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^q, \|z\|\leq 1} \langle z, x, \rangle = \|x\|_{\ell^p}.
\end{aligned}$$

□

تشکر و قدردانی

بدینوسیله از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران گرامی و همچنین اعضای محترم هیأت تحریریه‌ی مجله که در بهبود نتایج مقاله مؤثر بودند کمال تشکر و قدردانی را می‌نماییم.

مراجع

[1] A. Aldroubi, Q. Sung and W. Tang, P-frames and shift invariant subspaces of L^p, *J. Fourier Anal. Appl.*, **7** (2001), 1-–22.

[2] A.A. Arefijamaal and L. Mohammadkhani, On duals of p-frames, *Involve*, **6**(3) (2013), 301–309.

[3] T.D. Benavide, G.L. Acedo and H.K. Xu, Qualitative and quantitative properties for the space $\ell_{p,q}$, *Houston J. Math.*, **22**(1) (1996), 89–100.

[4] F.E. Browder, Nonlinear mappings of non-expansive and accretive type in Banach spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **73** (1967), 875–882.

[5] F.E. Browder and P. Hess, Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **11** (1972), 251–294.

[6] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Basis*, Birkhäuser, Boston, 2016.

[7] O. Christensen and D.T. Stoeva, P-frames in separable Banach spaces, *Adv. Comput. Math.*, **18** (2003), 117–126.

[8] C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press Inc., USA, 1992.

[9] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 1271–1283.

[10] S.S. Dragomir, Semi-Inner Products and Applications, Nova Science Publishers, Australia, 2004.

[11] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.

[12] M.H. Faroughi and E. Osgooei, Continuous p-Bessel mappings and continuous p-frames in Banach spaces, *Involve*, **4**(2) (2011), 167–186.

[13] D. Gabor, Theory of communications, *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, **93** (1946), 429-–457.

[14] I.K. Grochenig, Describing functions: Atomic decompositions versus frames, *Monatsh. Math.*, **112** (1991), 1-–41.

[15] I.K. Grochenig, *Foundation of Time Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[16] M.H. Hsu, W. Takahashi and J.Ch. Yao, *Genrralized hybrid mappings in Hilbert spaces and Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **16**(1) (2012), 129–149.

[17] R. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Interscience

Publication, USA, 1976.

[18] E. Osgooei, G-vector-valued sequence space frames, *Kyungpook Math. J.*, **56** (2016), 793–806.

[19] P. Oswald, *Multilevel Finite Element Approximation: Theory and Application*, Teubner Skr. Numerik, Teubner, Stuttgart, 1994.

[20] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhauser, London, 2005.

[21] J.G. Stampfli, Adjoint abelian operators on Banach space, *Can. J. Math.*, **21** (1969), 505–512.

[22] D.T. Stoeva, Generalization of the frame operator and the canonical dual frame to Banach spaces, *Asian-Eur. J. Math.*, **1**(4) (2008), 631–643.