موجک‌ها و جبرخطی ۵(۳) (۱۳۹۸) ۹۵-۱۱۱

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

بررسی همگرایی روش GMRES برای ماتریس‌های همراه بلوکی از طریق غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار

زهرا پوربور عظیمی اول[آ]، غلامرضا آقاملائی[*ب]

[آ]بخش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان، کرمان، ایران

[ب]بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۸ مرداد ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۲۳ مهر ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸

ادیتور رابط: فاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:
روش GMRES، غلاف عددی چندجمله‌ای وار، چندجمله‌ای ماتریسی، ماتریس همراه بلوکی، خطی سازی همراه.

چکیده

دراین مقاله، با استفاده از غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار [۱] ماتریس‌ها، به بررسی همگرایی روش شروع مجدد GMRES برای دستگاه‌های معادلات خطی که ضرایب آن‌ها ماتریس‌های همراه بلوکی چندجمله‌ای‌های ماتریسی یکین [۲] هستند، پرداخته شده است. همچنین، رابطه‌ی بین غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار یک چندجمله‌ای ماتریسی و غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار خطی سازی همراه آن نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

فرض کنید

$$Q(\lambda) = A_m\lambda^m + \cdots + A_۱\lambda + A_۰ \qquad (۱.۱)$$

یک چندجمله‌ای ماتریسی باشد، که در آن $A_i \in \mathbb{M}_n$ $(i = ۰, ۱, \ldots, m)$، $A_m \neq ۰$ و λ متغیری مختلط است. اعداد m و n به ترتیب، درجه و مرتبه‌ی $Q(\lambda)$ نامیده می‌شوند. اگر تمام ضرایب A_i در چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda)$ هرمیتی باشند، $Q(\lambda)$ خودالحاق نامیده می‌شود. همچنین، اگر $A_m = I_n$، آنگاه چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda)$ یکین نامیده می‌شود.

عدد مختلط $\lambda_۰ \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه برای چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda)$، معرفی شده در رابطه (۱.۱)، نامیده می‌شود هرگاه بردار ناصفری مانند $x \in \mathbb{C}^n$ موجود باشد به طوری که $Q(\lambda_۰)x = ۰$. در این صورت، x یک بردار ویژه‌ی $Q(\lambda)$ متناظر با مقدار ویژه‌ی $\lambda_۰$ نامیده می‌شود و مجموعه تمام مقادیر ویژه‌ی $Q(\lambda)$، طیف $Q(\lambda)$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sigma[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : \mathtt{det}(Q(\mu)) = ۰\}.$$

چندجمله‌ای‌های ماتریسی در بسیاری از شاخه‌های علوم کاربرد دارند؛ به عنوان مثال، تحلیل طیفی یک چندجمله‌ای ماتریسی در مطالعه‌ی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت به کار می‌آید؛ برای اطلاعات بیشتر می‌توانید [۶] را ببینید.

فرض کنید $Q(\lambda)$ همان چندجمله‌ای ماتریسی معرفی شده در رابطه (۱.۱) باشد. بعلاوه فرض کنید $k \in \mathbb{N}$. غلاف عددی چندجمله‌ای وار از مرتبه‌ی k برای $Q(\lambda)$ به صورت زیر معرفی و نمایش داده می‌شود:

آدرس ایمیلها: zahraazimi1@gmail.com (زهرا بور بور عظیمی اول)، aghamollaei@uk.ac.ir (غلامرضا آقاملائی).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.91660.1189

۱ polynomial numerical hulls
۲ singular

$$V^k[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : |p(\circ)| \leq \|p(Q(\mu))\|, \forall p \in \mathbb{P}_k\},$$

همچنین، غلاف عددی چندجمله‌ای وار $Q(\lambda)$ به صورت زیر معرفی و نمایش داده می‌شود:

$$V[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : |p(\circ)| \leq \|p(Q(\mu))\|, \forall p \in \mathbb{P}\},$$

که در آن $\mathbb{P}_k$ مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های اسکالر از درجه حداکثر k و $\mathbb{P}$ مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های اسکالر و $\|.\|$ نرم ماتریسی طیفی (یعنی برای $A \in \mathbb{M}_n$، $\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$، که در آن $\|x\| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$) می‌باشند. در حالت خاص، برای چندجمله‌ای ماتریسی خطی $Q(\lambda) = \lambda I - A$، که در آن $A \in \mathbb{M}_n$، $V^k[Q(\lambda)]$ با غلاف عددی چندجمله‌ای وار ماتریس A از مرتبه‌ی k برابر است؛ یعنی:

$$V^k[Q(\lambda)] = V^k(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |p(\lambda)| \leq \|p(A)\|, \ \forall \ p \in \mathbb{P}_k\},$$

که این خود یک ابزار برای بررسی و تخمین $\|f(A)\|$ برای انواع مختلفی از توابع f می‌باشد؛ برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۷] رجوع کنید. همچنین جهت کسب اطلاعات بیشتر در خصوص غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار چندجمله‌ای‌های ماتریسی می‌توان به [۱] و [۱۳] مراجعه کرد.

به راحتی دیده می‌شود که برای هر $A \in \mathbb{M}_n$،

$$V^1(A) = W(A) := \{x^*Ax \ : \ x \in \mathbb{C}^n, \ x^*x = 1\}.$$

این مجموعه به برد عددی ماتریس A مشهور است که کاربردهای مهمی در کوانتم دارد؛ برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۸] و منابع آن مراجعه کرد. از این نقطه نظر و با توجه به اینکه برای هر $\mu \in \mathbb{C}$، $Q(\mu)$ ماتریسی در $\mathbb{M}_n$ است، لذا غلاف عددی چندجمله‌ای وار از مرتبه‌ی k برای $Q(\lambda)$ در زیر صدق می‌کند:

$$V^k[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : \circ \in V^k(Q(\mu))\}. \tag{۲.۱}$$

همچنین، $V^1[Q(\lambda)]$ با برد عددی $Q(\lambda)$، یعنی:

$$W[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} \ : \ \exists \circ \neq x \in \mathbb{C}^n \ s.t. \ x^*Q(\mu)x = \circ\},$$

منطبق می‌شود که کاربردهای خیلی مهمی در سیستم‌های لرزه‌ای فزون میرا با تعداد متناهی درجه آزادی و همچنین در نظریه‌ی پایداری دارد؛ برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۶] و [۱۰] رجوع کنید.

در ادامه، برخی خواص غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار ماتریس‌ها و چندجمله‌ای‌های ماتریسی را بیان می‌کنیم که در بحث ما مفید خواهند بود.

گزاره ۱.۱. *[۴، ۷]. فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$. در این صورت، احکام زیر درست می‌باشند:*

(الف)

$$V^k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda, \lambda^۲, ..., \lambda^k) \in Conv(W(A, A^۲, ..., A^k))\},$$

که در آن $Conv(.)$ بیانگر غلاف محدب و

$$W(A_۱, A_۲, ..., A_k) = \{(x^*A_۱x, x^*A_۲x, ..., x^*A_kx) : \ x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\},$$

معرف برد عددی توأم ماتریس‌های $(A_۱, A_۲, ..., A_k) \in \mathbb{M}_n^k$ می‌باشند؛

(ب) برای هر ماتریس یکانی $U \in \mathbb{M}_n$، $V^k(U^*AU) = V^k(A)$؛

(ج) $V^k(\alpha A + \beta I) = \alpha V^k(A) + \beta$، که در آن $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$؛

(د) $\sigma(A) = V^m(A) \subseteq \cdots \subseteq V^{k+۱}(A) \subseteq V^k(A) \subseteq \cdots \subseteq V^۱(A) = W(A)$، که در آن m درجه چندجمله‌ای کمین (مینیمال) ماتریس A است؛

(ه) اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه برای هر $k \geq ۲$، $V^k(A) = \sigma(A)$.

گزاره ۲.۱. *[۱۳]. فرض کنید $Q(\lambda)$ همان چندجمله‌ای ماتریسی معرفی شده در رابطه (۱.۱) باشد. در این صورت، احکام زیر درست می‌باشند:*

(الف) $V^k[Q(\lambda)]$ زیر مجموعه‌ای بسته از $\mathbb{C}$ است؛

(ب) $\sigma[Q(\lambda)] = V[Q(\lambda)] \subseteq V^{k+۱}[Q(\lambda)] \subseteq V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^۱[Q(\lambda)] = W[Q(\lambda)]$؛

(ج) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $V^k[Q(\lambda + \alpha)] = V^k[Q(\lambda)] - \alpha$؛

(د) برای هر $۰ \neq \alpha \in \mathbb{C}$، $V^k[Q(\alpha\lambda)] = V^k[Q(\lambda)]$؛

(ه) اگر $U \in \mathbb{M}_n$ *یک ماتریس یکانی باشد، آنگاه* $V^k[U^*Q(\lambda)U] = V^k[Q(\lambda)]$؛

(و) اگر $R(\lambda) = \lambda^m Q(\lambda^{-1}) := A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m$*، آنگاه*

$$V^k[R(\lambda)] \setminus \{0\} = \{\mu^{-1} : \mu \in V^k[Q(\lambda)], \mu \neq 0\}.$$

نتایج این مقاله را در دو بخش (بخشهای ۲ و ۳ زیر) تنظیم کرده‌ایم. در بخش دوم این مقاله، به بررسی ارتباط بین غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار چندجمله‌ای‌های ماتریسی و غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار خطی سازی همراه آن‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم، شرایطی را که در آن غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار خطی سازی همراه یک چندجمله‌ای ماتریسی یکین، یعنی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار یک ماتریس همراه بلوکی شامل صفر می‌باشد، را بررسی می‌کنیم. این موضوع در تحلیل همگرایی روش شروع مجدد GMRES نقش اساسی دارد.

۲. رابطه بین غلاف‌های عددی چندجمله‌ای وار یک چندجمله‌ای ماتریسی و خطی سازی همراه آن

چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$، که در آن $m \geq 2$، را در نظر بگیرید. خطی سازی همراه $Q(\lambda)$ با $L(\lambda)$ نمایش داده شده و یک دسته‌ی خطی از مرتبه‌ی mn بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -A_{m-1} \end{pmatrix}. \qquad (۱.۲)$$

واضح است که

$$\sigma[Q(\lambda)] = \sigma[L(\lambda)].$$

خطی سازی‌های چندجمله‌ای‌های ماتریسی، به ویژه خطی سازی همراه، کاربردهای فراوانی در معادلات دیفرانسیل دارند؛ برای مثال می‌توانید [۶] را ببینید. در [۱۱، قضیه‌ی ۲.۴] ثابت شده است که

$$V^{1}[Q(\lambda)] \cup \{0\} \subseteq V^{1}[L(\lambda)].$$

با توجه به این ایده، در این بخش به مطالعه و بررسی رابطه‌ی $V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^k[L(\lambda)]$ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $Q(\lambda)$ یک چندجمله‌ای ماتریسی همانند (۱.۱) و $L(\lambda)$ خطی سازی همراه $Q(\lambda)$، معرفی شده در رابطه (۱.۲)، باشد. در این صورت، $V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^k[L(\lambda)]$ هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

(الف) $1 \leq k < n$ و $A_0 = A_1 = \cdots = A_{m-2} = 0$؛

(ب) $k \geq n$.

اثبات. فرض کنید شرط (الف) درست باشد و $\mu \in V^k[Q(\lambda)]$. از آنجا که در چنین حالتی، $0 \in \sigma(L(0))$، لذا با توجه به گزاره ۱.۱(د)، $0 \in V^k(L(0))$؛ در نتیجه $0 \in V^k[L(\lambda)]$. بنابراین بدون اینکه به کلیت خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که $\mu \neq 0$. با استفاده از رابطه‌ی (۲.۱)، داریم $0 \in V^k(Q(\mu))$. اکنون بنابر گزاره‌ی ۱.۱(الف)، اعداد حقیقی نامنفی $t_1, t_2, \ldots, t_l$ با مجموع ۱ و بردارهای یکه $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{C}^n$ موجودند به طوری که برای هر $i = 1, 2, \ldots, k$،

$$\sum_{j=1}^{l} t_j x_j^* Q(\mu)^i x_j = 0 \tag{۲.۲}$$

اگر قرار دهیم

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu|^2 + |\mu|^4 + \cdots + |\mu|^{2(m-1)}}} \begin{pmatrix} x_j \\ \mu x_j \\ \vdots \\ \mu^{m-1} x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn},$$

آنگاه برای $j = ۱, \ldots, l$، $y_j^* y_j = ۱$. با یک سری محاسبات ساده داریم:

$$L(\mu) = \begin{pmatrix} \mu I & -I & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & \mu I & \cdots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \mu I & -I \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \frac{Q(\mu)}{\mu^{m-۱}} \end{pmatrix},$$

و برای $i \geq ۲$،

$$L(\mu)^i = \begin{pmatrix} \mu^i I & -i\mu^{i-۱} I & i\mu^{i-۲} I & \cdots & \mu bl_{۱m}(L^{i-۱}(\mu)) - bl_{۲m}(L^{i-۱}(\mu)) \\ \circ & \mu^i I & -i\mu^{i-۱} I & \cdots & \mu bl_{۲m}(L^{i-۱}(\mu)) - bl_{۳m}(L^{i-۱}(\mu)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \ddots & \mu bl_{(m-۱)m}(L^{i-۱}(\mu)) - bl_{mm}(L^{i-۱}(\mu)) \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \frac{Q(\mu)^i}{\mu^{i(m-۱)}} \end{pmatrix},$$

که در آن $bl_{ij}(X)$ معرف (i, j)-امین بلوک با مرتبه‌ی $n \times n$ از ماتریس X با مرتبه‌ی $nm \times nm$ می‌باشد. در این صورت، $y_j^* L(\mu)^i y_j = \sum_{s=۱}^{i} \alpha_s(\mu) x_j^* Q(\mu)^s x_j$، که در آن $i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$ و $\alpha_s(\mu)$ یک تابع بر حسب μ می‌باشد. حال با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲)، برای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $\sum_{j=۱}^{l} t_j y_j^* L(\mu)^i y_j = \circ$ و بنابراین با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱ (الف)، $\circ \in V^k(L(\mu))$ و این نشان می‌دهد که $\mu \in V^k[L(\lambda)]$. در نتیجه اگر حالت (الف) برقرار باشد، آنگاه $V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^k[L(\lambda)]$.

حال اگر شرط (ب) درست باشد، آنگاه با استفاده از گزاره‌ی ۲.۱(ب)، برای هر $k \geq n$، داریم

$$V^k[Q(\lambda)] = \sigma[Q(\lambda)] = \sigma[L(\lambda)] \subseteq V^k[L(\lambda)].$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

در ادامه، فرض کنید $Q(\lambda)$ یک چندجمله‌ای ماتریسی یکین مانند (۱.۱) باشد، یعنی:

$$Q(\lambda) = I_n\lambda^m + A_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + A_۱\lambda + A_۰ \tag{۳.۲}$$

در این حالت، ماتریس همراه بلوکی $Q(\lambda)$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$C \equiv C_Q = \begin{pmatrix} ۰ & I_n & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & I_n \\ -A_۰ & -A_۱ & \cdots & -A_{m-۲} & -A_{m-۱} \end{pmatrix} \in M_{nm}. \tag{۴.۲}$$

توجه کنید که در این حالت، برای چندجمله‌ای ماتریسی یکین $Q(\lambda)$، خطی سازی همراه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\lambda) = I_{mn}\lambda - C,$$

که در آن C همان ماتریس همراه بلوکی معرفی شده در رابطه (۴.۲) می‌باشد. در حالت خاص، اگر $Q(\lambda) = I_n\lambda^m - A$، که در آن $A \in \mathbb{M}_n$، آنگاه ماتریس همراه بلوکی $Q(\lambda)$ با ماتریس دوری بلوکی A

-عاملی مقدماتی منطبق می‌شود؛ یعنی:

$$C_Q = \Pi_A := \begin{pmatrix} \circ & I_n & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & I_n & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & I_n \\ A & \circ & \cdots & \circ & \circ \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{mn}, \qquad (۵.۲)$$

و $L(\lambda) = I_{mn}\lambda - \Pi_A$ خطی سازی همراه آن است. ماتریس‌های دوری بلوکی A -عاملی مقدماتی کاربرد فراوانی در آنالیز لرزه‌ای و معادلات دیفرانسیل دارند؛ برای مثال می‌توانید [۳] و مراجعی که در آن ذکر شده را ببینید. برای چنین چندجمله‌ای‌های ماتریسی، گزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره ۲.۲. *فرض کنید* $Q(\lambda) = I_n\lambda^m - A$، *که در آن* $A \in \mathbb{M}_n$. *در این صورت،*

$$V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^k[L(\lambda)],$$

که در آن $L(\lambda) = I_{mn}\lambda - \Pi_A$ *خطی سازی همراه* $Q(\lambda)$ *می‌باشد.*

اثبات. با استفاده از [۱، قضیه‌ی ۳.۹] و گزاره‌ی ۱.۱(د)، داریم

$$V^k[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu^m \in V^k(A)\} = V^{km}(\Pi_A) \subseteq V^k(\Pi_A) = V^k[L(\lambda)].$$

به این ترتیب نتیجه به دست می‌آید. □

۳. بررسی همگرایی روش شروع مجدد GMRES برای ماتریس‌های همراه بلوکی

یکی از روش‌های مشهور برای حل دستگاه‌های معادلات خطی، روش GMRES می‌باشد که در سال ۱۹۸۶ توسط سد [۳] و شوالتز [۴] [۱۲] معرفی شد. روش مذکور این خاصیت را دارد که در هر مرحله،

[3] Saad
[4] Schultz

مینیمم سازی از نرم بردار مانده را روی یک زیر فضای کرایلف جدید انجام می‌دهد. فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ و $b \in \mathbb{C}^n$. روش GMRES برای حل دستگاه $Ax = b$ با حدس اولیه x_0 برای جواب و بردار مانده متناظر با آن $r_0 = b - Ax_0$، دنباله $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ از بردارهای $x_t \in x_0 + K_t(A, r_0)$، که در آن

$$K_t(A, r_0) := span\{r_0, Ar_0, \dots, A^{t-1}r_0\},$$

زیر فضای کرایلف t ام تولید شده توسط A و r_0 می‌باشد، را تولید می‌کند به گونه‌ای که

$$\|r_t\| = \min_{x \in x_0 + K_t(A, r_0)} \|b - Ax\| = \min_{p \in \mathbb{P}_t(0)} \|p(A)r_0\|,$$

که در آن $r_t = b - Ax_t$ بردار مانده t ام و

$$\mathbb{P}_t(0) = \{p \in \mathbb{P}_t : p(0) = 1\}.$$

هر چه مقدار t افزایش پیدا کند، فضای کرایلفی که جواب در آن جستجو می‌گردد، به فضای جواب واقعی نزدیکتر می‌شود؛ اما در این راستا بعد زیرفضای کرایلف $K_t(A, r_0)$ نیز زیاد شده و این منجر به افزایش هزینه محاسبات می‌شود. در چنین حالتی، از روش شروع مجدد GMRES استفاده می‌کنند. در این روش، مثلاً بعد از k تکرار، x_k را به جای x_0 قرار داده و مجدداً روش GMRES را تکرار می‌کنند. این روش از GMRES را با GMRES(k) نمایش می‌دهند. حال برای $A \in \mathbb{M}_n$، فرض کنید

$$\begin{aligned} \psi_k(A) &= \max_{\|v\|=1} \min_{p \in \mathbb{P}_k(0)} \|p(A)v\|, \\ \varphi_k(A) &= \min_{p \in \mathbb{P}_k(0)} \max_{\|v\|=1} \|p(A)v\|. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

در این صورت، با توجه به [۲، قضیه ۳.۱]، [۵، قضیه ۲.۷] و [۹، قضیه ۳.۱]، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۳. *فرض کنید $A \in M_n$، $\psi_k(A)$ و $\varphi_k(A)$ همان مقادیر معرفی شده در رابطه (۱.۳) باشند. در این صورت،*

(الف) $0 \le \psi_k(A) \le \varphi_k(A) \le 1$؛

(ب) $\|r_{mk}\| \leq [\psi_k(A)]^m$، که در آن r_{mk} معرف بردار مانده GMRES(k) می‌باشد؛

(ج) $\psi_k(A) < ۱$ اگر و تنها اگر $۰ \notin F^k(A)$، که در آن

$$F^k(A) = \{z \in \mathbb{C} : (۰, \ldots, ۰) \in W((A - zI_n), (A - zI_n)^۲, \ldots, (A - zI_n)^k)\};$$

(د) $\varphi_k(A) < ۱$ اگر و تنها اگر $۰ \notin V^k(A)$.

با توجه به قضیه ۱.۳، صفر نقش تعیین کننده‌ای در همگرایی روش شروع مجدد GMRES که همان $GMRES(k)$ می‌باشد، دارد. لذا در این بخش قصد داریم این همگرایی را برای دستگاه $Cx = b$، که در آن C ماتریس همراه بلوکی چندجمله‌ای ماتریسی یکین $Q(\lambda) = I_n\lambda^m + \cdots + A_۱\lambda + A_۰$ می‌باشد، بررسی کنیم. یعنی قصد داریم بدانیم که چه وقت $۰ \in V^k(C)$. در ابتدا قضیه‌ی زیر که در [۱، گزاره ی ۳.۱] نیز آمده است و مرتبط با بحث ما نیز می‌باشد، را به شیوه دیگری اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید C، همانند (۴.۲)، ماتریس همراه بلوکی چندجمله‌ای ماتریسی یکین $Q(\lambda)$ معرفی شده در رابطه‌ی (۳.۲) باشد. در این صورت، برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, m - ۱$،*

$$۰ \in V^k(C).$$

اثبات. ایده اثبات استفاده از گزاره ۱.۱(الف) می‌باشد. چون $۱ \leq k \leq m - ۱$، با انجام محاسبات ساده در می‌یابیم که اولین بلوک سمت چپ و بالای ماتریس‌های C، $C^۲$، ...، C^k همگی ماتریس صفر می‌باشد. در این صورت،

$$e_۱^*Ce_۱ = e_۱^*C^۲e_۱ = \cdots = e_۱^*C^ke_۱ = ۰.$$

لذا $(۰, ۰, \ldots, ۰) \in W(C, C^۲, \ldots, C^k)$. در نتیجه، بنا به گزاره ۱.۱(الف)، اثبات کامل می‌شود. □

در مثال زیر نشان خواهیم داد که در حالت کلی برای $k \geq m$، لزوماً صفر عضوی از $V^k(C)$ نیست. این مثال همچنین نشان می‌دهد که صفر لزوماً عضوی از $V^k[L(\lambda)]$، که در آن $L(\lambda)$ خطی سازی همراه یک چندجمله‌ای ماتریسی مانند $Q(\lambda)$ است، نمی‌باشد.

مثال ۳.۳. فرض کنید $Q(\lambda) = I_۲\lambda^۲ - I_۲$. در این صورت، خطی سازی همراه $Q(\lambda)$ عبارت است از

$$L(\lambda) = I_۴\lambda - \Pi_{I_۲},$$

که در آن $\Pi_{I_۲}$ همان ماتریس معرفی شده در رابطه‌ی (۵.۲) با فرض $A = I_۲$ می‌باشد. در این صورت، با استفاده از [۱، گزاره‌ی ۳.۷] داریم

$$V^۲[L(\lambda)] = V^۲(\Pi_{I_۲}) = \sqrt{\sigma(I_۲)} = \{۱, -۱\}.$$

بنابراین $V^۲[L(\lambda)] = V^۲(\pi_{I_۲}) \notin ۰$.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $Q(\lambda)$، همانند (۳.۲)، یک چندجمله‌ای ماتریسی یکین با ماتریس همراه بلوکی C، همانند (۴.۲)، باشند. در این صورت، گزاره‌های زیر درست هستند:*

(الف) اگر $۰ \in W(A_۰)$، آنگاه $۰ \in V^m(C)$؛

(ب) اگر $۰ \in \sigma(A_۰)$، آنگاه برای هر k، $۰ \in V^k(C)$؛

(ج) اگر $۰ \in V^k(A_۰)$ و برای هر $i = ۱, ..., m-۱$، $A_i = \alpha_i I_n$، که در آن $\alpha_i \in \mathbb{C}$، آنگاه $۰ \in V^{km}(C)$.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف)، از آنجا که $۰ \in W(A_۰)$، لذا بردار یکه‌ی $x \in \mathbb{C}^n$ وجود دارد به طوری که $x^*A_۰x = ۰$. با یک سری محاسبات ساده، بلوکهای ماتریس $C^k = (C_{ij})$ به صورت زیر می‌باشند:

اگر $۱ \le i \le m-۱, \ ۱ \le j \le m$، آنگاه $C_{ij} = bl_{(i+۱)j}(C^{k-۱})$؛

اگر $i = m, \ ۱ \le j \le m$، آنگاه $C_{ij} = -A_۰ bl_{۱j}(C^{k-۱}) - \cdots - A_{m-۱} bl_{mj}(C^{k-۱})$.

به بیان دیگر، داریم:

$$C^k = \begin{pmatrix} R_۲(C^{k-۱}) \\ R_۳(C^{k-۱}) \\ \vdots \\ R_m(C^{k-۱}) \\ -A_۰R_۱(C^{k-۱}) - A_۱R_۲(C^{k-۱}) - \cdots - A_{m-۱}R_m(C^{k-۱}) \end{pmatrix},$$

که در آن $R_i(X)$، i -امین سطر ماتریس بلوکی X می‌باشد. حال با توجه به اینکه $bl_{11}(C^m) = -A_0$،
اگر قرار دهیم $y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$، آنگاه $y^*y = 1$ و

$$y^*C^jy = \begin{cases} 0 & if \;\; j = 1, ..., m-1, \\ -x^*A_0x & if \;\; j = m \end{cases} = 0.$$

بنابراین، با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱ (الف)، $0 \in V^m(C)$.

برای اثبات حکم (ب)، از آنجا که $0 \in \sigma(A_0)$، بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$ موجود است به طوری که $A_0x = 0$. اگر قرار دهیم $y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$، آنگاه $y \neq 0$ و $Cy = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -A_0x \end{pmatrix} = 0$. بنابراین $0 \in \sigma(C)$
و لذا، با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱ (د)، برای هر k، $0 \in V^k(C)$.

برای اثبات (ج)، از آنجا که $0 \in V^k(A_0)$، با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱ (الف)، بردارهای یکه $x_1, ..., x_l$ در $\mathbb{C}^n$ و اعداد نامنفی $t_1, ..., t_l$ با مجموع ۱ موجودند به طوری که برای $i = 1, ..., k$،

$$\sum_{j=1}^{l} t_j x_j^* A_0^i x_j = 0.$$

چون $A_1 = \cdots = A_{m-1} = \alpha_i I_n$، با استفاده از اثبات قسمت (الف)، داریم

$$bl_{11}(C^{km}) = \beta_k A_0^k + \beta_{k-1} A_0^{k-1} + \cdots + \beta_0 A_0,$$

که در آن $\beta_j \in \mathbb{C}$. اگر برای $i = 1, \ldots, l$، قرار دهیم $y_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$، آنگاه $y_i^* y_i = 1$ و برای هر $j = 1, \ldots, km$، داریم $\sum_{i=1}^{l} t_i y_i^* C^j y_i = 0$. در نتیجه، با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱(الف)، داریم $0 \in V^{km}(C)$. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

در مثال زیر نشان می‌دهیم که عکس قضیه‌ی ۴.۳ (الف) و (ب) در حالت کلی درست نیست.

مثال ۵.۳. فرض کنید $Q(\lambda) = I_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$، که در آن $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $A_0 = I_2$. ماتریس همراه بلوکی $Q(\lambda)$ به صورت $C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{pmatrix}$ می‌باشد. اگر قرار دهیم $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$، آنگاه $y^*A_1y = 0$ و $y^*A_1^2y = 1$. بنابراین $(0, y^*)C\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = -y^*A_1y = 0$ و $(0, y^*)C^2\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = -y^*A_0y + y^*A_1^2y = 0$.
لذا، بنابر گزاره‌ی ۱.۱(الف)، داریم $0 \in V^2(C)$؛ در صورتی که $0 \notin \{1\} = W(A_0) = \sigma(A_0)$.

در پایان این بخش، برای ماتریس‌های دوری بلوکی، شرایطی را بررسی می‌کنیم که صفر عضوی از غلاف عددی چندجمله‌ای وار آن‌ها باشد.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ و $k, m \in \mathbb{N}$. در این صورت،*

$$V^{km}(A) \subseteq \sqrt[m]{V^k(A^m)} = V^{km}(\Pi_A m),$$

که در آن برای $S \subseteq \mathbb{C}$، $\sqrt[m]{S} = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^m \in S\}$. در نتیجه اگر $0 \in V^{km}(A)$، آنگاه $0 \in V^{km}(\Pi_A m)$.

اثبات. فرض کنید $\mu \in V^{km}(A)$. با توجه به گزاره‌ی ۱.۱(الف)، داریم:

$$(\mu, \mu^2, \ldots, \mu^m, \ldots, \mu^{2m}, \ldots, \nu^{km}) \in Conv(W(A, A^2, \ldots, A^m, \ldots, A^{2m}, \ldots, A^{km})).$$

بنابراین بردارهای یکه $x_۱, ..., x_l$ در $\mathbb{C}^n$ و اعداد حقیقی نامنفی $t_۱, ..., t_l$ با مجموع ۱ موجودند به طوری که برای $r = ۱, ۲, ..., km$، $\mu^r = \sum_{j=۱}^{l} t_j x_j^* A^r x_j$. لذا،

$$(\mu^m, \mu^{۲m}, ..., \mu^{km}) \in \ Conv(W(A^m, ..., A^{۲m}, ..., A^{km})).$$

بنابراین $\mu^m \in V^k(A^m)$. در نتیجه $\mu \in \sqrt[m]{V^k(A^m)}$ و با توجه به [۱، قضیه‌ی ۳.۹]، قسمت دوم حکم نیز واضح است. به این ترتیب، اثبات کامل می‌شود. □

گزاره ۷.۳. *فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ و Π_A، همانند (۵.۲)، یک ماتریس دوری بلوکی A-عاملی مقدماتی باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر درست هستند:*

(الف) اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه $V^۲(\Pi_A^{mk}) = (\sigma(A))^k$؛

(ب) $V^۲(\Pi_A \Pi_A^*) = \{۱\} \cup \sigma(AA^*)$.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف)، با توجه به اینکه A یک ماتریس هرمیتی است، بنابراین Π_A^{mk} نیز یک ماتریس هرمیتی بوده و در نتیجه، با استفاده از گزاره‌ی ۱.۱(ه)، داریم

$$V^۲(\Pi_A^{mk}) = \sigma(\Pi_A^{mk}) = \sigma(A^k \oplus \cdots \oplus A^k) = (\sigma(A))^k.$$

برای اثبات قسمت (ب)، از آنجا که $\Pi_A \Pi_A^*$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است، بنابر گزاره‌ی ۱.۱(ه)، داریم:

$$V^۲(\Pi_A \Pi_A^*) = \sigma(\Pi_A \Pi_A^*) = \{۱\} \cup \sigma(AA^*).$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

از قسمت‌های (الف) و (ب) گزاره‌ی ۷.۳، به ترتیب، قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شوند:

نتیجه ۸.۳. *فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ و Π_A، همانند (۵.۲)، یک ماتریس دوری بلوکی A-عاملی مقدماتی باشد. در این صورت،*

(الف) اگر A یک ماتریس معین باشد، آنگاه برای هر $s \in \mathbb{N}$، $0 \notin V^s(\Pi_A^{mk})$؛
(ب) اگر A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $0 \notin V^k(\Pi_A \Pi_A^*)$.

تشکر و قدردانی

بخش مهمی از این تحقیق زمانی انجام شده است که نویسنده ی دوم با حمایتهای مالی دانشگاه شهید باهنر کرمان در حال گذراندن دوره فرصت مطالعاتی (از مردادماه ۹۷ لغایت مردادماه ۹۸) در بخش ریاضی محض دانشگاه واترلو-کانادا بوده است که بدین وسیله ایشان از مسئولین ذیربط دانشگاه شهید باهنر کرمان و همچنین از کادر اداری و اساتید بخش ریاضی محض دانشگاه واترلو تقدیر و تشکر می‌نماید. همچنین نویسندگان از داوران محترم به واسطه ارائه پیشنهادات سازنده آنان که منجر به بهبود کیفیت علمی این مقاله شده است، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] Gh. Aghamollaei and A. Salemi, Polynomial numerical hulls of matrix polynomials, II, *Linear Multilinear Algebra*, **59**(3) (2011), 291–302.

[2] J.V. Burke and A. Greenbaum, Characterizations of the polynomial numerical hull of degree k, *Linear Algebra Appl.*, **419** (2006), 37–47.

[3] J.C.R. Claeyssen and L.A.S. Leal, Diagonalization and spectral decomposition of factor block circulant matrices, *Linear Algebra Appl.*, **99** (1988), 41–61.

[4] V. Faber, A. Greenbaum and D.E. Marshall, The polynomial numerical hulls of Jordan blocks and related matrices, *Linear Algebra Appl.*, **374** (2003), 231–246.

[5] V. Faber, W. Joubert, E. Knill and T. Manteuffel, Minimal residual method stronger than polynomial preconditioning, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **17**(4) (1996), 707–729.

[6] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[7] A. Greenbaum, Generalizations of the field of values useful in the study of polynomial functions of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, **347**(1-3) (2002), 233–249.

[8] K.E. Gustafson and D.K.M. Rao, *Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer-Verlage, New York, 1997.

[9] W. Joubert, On the convergence behavior of the restarted GMRES algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *Numer. Linear Algebra Appl.*, **1**(5) (1994), 427–447.

[10] C.K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**(4) (1994), 1256–1265.

[11] J. Maroulas and P. Psarrakos, Geometrical properties of numerical range of matrix polynomials, *Computers Math. Appl.*, **31**(4-5) (1996), 41–47.

[12] Y. Saad and M.H. Schultz, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **7**(3) (1986), 856–869.

[13] A. Salemi and Gh. Aghamollaei, Polynomial numerical hulls of matrix polynomials, *Linear Multilinear Algebra*, **55**(3) (2007), 219–228.