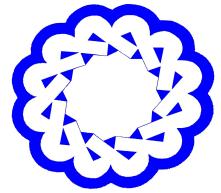


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی K -قاب‌های ترکیب فهیمة عربیانی نیشابوری، علی‌اکبر عارفی‌جمال*

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، ایران

چکیده

K -قاب‌های ترکیب اخیرا به عنوان تعمیمی از K -قاب‌های گسسته معرفی شدند که می‌توانند ابزار مناسبی برای برخی مسائل در نظریه نمونه برداری باشند که با قاب‌های ترکیب پردازش می‌شوند. در این مقاله چندین تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی K -قاب‌های ترکیب و K -قاب‌های ترکیب پارسوال بدست می‌آوریم که این نتایج برخی تساوی‌ها و نامساوی‌های مهم روی قاب‌های گسسته و قاب‌های ترکیب را تعمیم و نیز بهبود می‌دهند.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۲ فروردین ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱۷ مرداد ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۵ اردیبهشت ۹۸
ادیتور رابط: فاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:

K -قاب‌های ترکیب،
 K -قاب‌های ترکیب
پارسوال، K -دوگان.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: fahimeh.arabyani@gmail.com (فهیمة عربیانی نیشابوری)، arefijamaal@hsu.ac.ir (علی‌اکبر عارفی‌جمال).

<http://doi.org/10.22072/wala.2018.84106.1168>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

نظریه قاب‌ها در فضاهای هیلبرت که ابتدا در سال ۱۹۵۲ [۱۰] معرفی شدند به دلیل کاربردی بودن در دو دهه اخیر به سرعت توسعه یافته‌اند و انواع مختلف قاب‌ها و نیز تعمیم‌های زیادی از قاب‌ها توسط محققین بیان شده است [۴، ۶، ۷، ۸، ۱۱، ۱۲]. نظریه قاب‌های ترکیب یکی از تعمیم‌های مهم قاب‌ها است که کاربردهای جالبی در پردازش شبکه‌های بی‌سیم، پردازش تصویر، فیلتر بانک‌ها و بسیاری از کاربردهای دیگر دارد که نمی‌توانند به کمک قاب‌های گسسته مدلسازی شوند [۹، ۱۷]. در سال ۲۰۰۷ هنگام کار روی الگوریتم‌هایی برای محاسبه بازسازی سیگنالها، برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی قاب‌های پارسوال [۵] اثبات شد. سپس این نامساوی‌ها روی برخی از قاب‌ها تعمیم داده شد [۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰]. در این مقاله این نامساوی‌ها را روی K -قاب‌های ترکیب [۱] بررسی می‌کنیم که تعمیمی از قاب‌های ترکیب [۸] و نیز K -قاب‌های گسسته [۲] هستند.

فرض کنید $\{W_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته در فضای هیلبرت \mathcal{H} و $\{\omega_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از وزن‌ها، یعنی $\omega_i > 0, i \in I$ باشد. آنگاه $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب برای \mathcal{H} نامیده می‌شود هرگاه ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به طوری که

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{i \in I} \omega_i \|\pi_{W_i} f\|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (1.1)$$

ثابت‌های A و B به ترتیب کرانهای پایین و بالای K -قاب ترکیب نامیده می‌شوند و یکتا نیستند. K -قاب ترکیب W چسبان نامیده می‌شود اگر $A\|K^*f\|^2 = \sum_{i \in I} \omega_i \|\pi_{W_i} f\|^2$ و پارسوال نامیده می‌شود هرگاه

$$\|K^*f\|^2 = \sum_{i \in I} \omega_i \|\pi_{W_i} f\|^2.$$

همچنین اگر در (۱.۱) فقط کران بالا برقرار باشد، گوئیم W یک دنباله بسل است. به وضوح اگر $K = I_{\mathcal{H}}$ آنگاه W یک قاب ترکیب است. مشابه قاب‌های ترکیب [۸] برای K -قاب ترکیب W نیز

می‌توان فضای زیر را در نظر گرفت

$$\sum_{i \in I} \oplus W_i = \left\{ \{f_i\}_{i \in I} : f_i \in W_i, \sum_{i \in I} \|f_i\|^2 < \infty \right\},$$

که با ضرب داخلی $\langle \{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \rangle = \sum_{i \in I} \langle f_i, g_i \rangle$ یک فضای هیلبرت است. با این تعریف عملگر تجزیه $T_W : \sum_{i \in I} \oplus W_i \rightarrow \mathcal{H}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$T_W(\{f_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \omega_i f_i, \quad \left(\{f_i\}_{i \in I} \in \sum_{i \in I} \oplus W_i \right).$$

الحاقی این عملگر یعنی $T_W^* : \mathcal{H} \rightarrow \sum_{i \in I} \oplus W_i$ ، که عملگر آنالیز نام دارد به صورت زیر بدست می‌آید،

$$T_W^*(f) = \{\omega_i \pi_{W_i}(f)\}_{i \in I}, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

سرانجام عملگر قاب $S_W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ به صورت $S_W f = \sum_{i \in I} \omega_i \pi_{W_i} f$ ، تعریف می‌شود که عملگری مثبت است اگر چه برخلاف عملگر قاب‌های ترکیب لزوماً وارون پذیر نیست. اگر برد عملگر K بسته باشد آنگاه S_W از $R(K)$ به $S_W(R(K))$ عملگری وارون پذیر است، این مطلب برای K قاب‌های گسسته در [۱۹] و برای K قاب‌های ترکیب در [۱] بیان شده است. در سراسر این مقاله K عملگری با برد بسته فرض می‌شود و هرگاه از وارون عملگر قاب صحبت می‌کنیم منظور تحدید شده عملگر قاب به $R(K)$ می‌باشد.

خانواده بسط $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک K -دوگان از W نامیده می‌شود هرگاه

$$Kf = \sum_{i \in I} \omega_i v_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i} (S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

برای اطلاعات بیشتر در زمینه قاب‌های ترکیب، K -قاب‌های ترکیب و نیز دوگان آنها [۱، ۸] را ببینید. در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم \mathcal{H} یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، I مجموعه اندیس گذار شمارا و برای هر $J \subset I$ متمم J را به وسیله J^c نشان می‌دهیم. به علاوه $I_{\mathcal{H}}$ عملگر همانی روی \mathcal{H} را نشان

می‌دهد. برای دو فضای هیلبرت \mathcal{H}_1 و \mathcal{H}_2 مجموعه عملگرهای خطی کراندار بین این دو فضا را با $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ نشان داده و مجموعه $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ را به طور خلاصه به صورت $B(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. برای یک عملگر $K \in B(\mathcal{H})$ برد با $R(K)$ و عملگر شبه معکوس^۱ با K^\dagger نشان داده می‌شود. همچنین π_V تصویر متعامد از \mathcal{H} به یک زیر فضای بسته $V \subset \mathcal{H}$ است و در نهایت ما از علامتهای T_J و S_J برای مشخص کردن عملگرهای تجزیه و عملگر قابی استفاده می‌کنیم که مجموعه اندیس آنها به $J \subset I$ محدود شده است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش، چندین تساوی و نامساوی برای K -قاب‌های ترکیب و نیز K -قاب‌های ترکیب پارسوال به دست می‌آوریم. این نتایج بسیاری از نتایج مهم بدست آمده در [۳، ۱۵، ۱۶] را تعمیم می‌دهند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب برای \mathcal{H} باشد و $V = \{(V_i, \nu_i)\}_{i \in I}$ یک K -دوگان از W باشد، آنگاه برای هر $J \subseteq I$ و $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \left\| \sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2 =$$

$$\sum_{i \in J^c} \omega_i \nu_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2$$

اثبات. فرض کنید $J \subseteq I$. عملگر خطی زیر را در نظر بگیرید

$$M_J f = \sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

عملگر M_J یک عملگر خطی کراندار و خوشتعریف روی \mathcal{H} است به علاوه $M_J + M_{J^c} = K$. در نتیجه می‌توان نوشت

¹inverse pseudo

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \left\| \sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2 \\
&= \langle \sum_{i \in J} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \|M_J f\|^2 \\
&= \langle K^* M_J f, f \rangle - \langle M_J^* M_J f, f \rangle \\
&= \langle (K^* - M_J^*) M_J f, f \rangle \\
&= \langle M_{J^c}^* (K - M_{J^c}) f, f \rangle \\
&= \langle M_{J^c}^* K f, f \rangle - \langle M_{J^c}^* M_{J^c} f, f \rangle \\
&= \langle f, K^* M_{J^c} f \rangle - \|M_{J^c} f\|^2 \\
&= \langle K f, \sum_{i \in J^c} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \rangle - \|M_{J^c} f\|^2 \\
&= \sum_{i \in J^c} \omega_i \nu_i \langle K f, \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \rangle \\
&\quad - \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2.
\end{aligned}$$

□

با استفاده از قضیه ۱.۲ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب برای \mathcal{H} باشد و $V = \{(V_i, \nu_i)\}_{i \in I}$ یک K -دوگان از W باشد. آنگاه برای هر دنباله کراندار $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ و $f \in H$ داریم

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \omega_i \nu_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \left\| \sum_{i \in I} \alpha_i \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2$$

$$= \sum_{i \in I} (1 - \bar{\alpha}_i) \omega_i \nu_i \langle \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f, K f \rangle - \left\| \sum_{i \in I} (1 - \alpha_i) \omega_i \nu_i \pi_{R(K)} \pi_{W_i}(S_W^{-1})^* K \pi_{V_i} f \right\|^2.$$

در ادامه به اثبات برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی k -قاب‌های ترکیب پارسوال می‌پردازیم.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک k -قاب ترکیب پارسوال باشد. به ازای هر $f \in H$ ، $J \subseteq I$ و $E \subseteq J^c$ داریم:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i \in J \cup E} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2 - \left\| \sum_{i \in J^c \setminus E} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i \in J} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2 - \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i \in E} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, K K^* f \rangle. \end{aligned}$$

اثبات. با توجه به اینکه W یک k -قاب ترکیب پارسوال است، برای هر $J \subseteq I$ داریم

$$\langle (S_J + S_{J^c}) f, f \rangle = \langle S_W f, f \rangle = \|K^* f\|^2, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین $S_J + S_{J^c} = K K^*$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} S_J^2 - S_{J^c}^2 &= S_J^2 - (K K^* - S_J)^2 = K K^* S_J + S_J K K^* - (K K^*)^2 \\ &= K K^* S_J - (K K^* - S_J) K K^* = K K^* S_J - S_{J^c} K K^*. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\|S_J f\|^2 - \|S_{J^c} f\|^2 = \langle K K^* S_J f, f \rangle - \langle S_{J^c} K K^* f, f \rangle$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i \in J \cup E} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 - \left\| \sum_{i \in J^c \setminus E} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 \\
&= \left\langle KK^* \sum_{i \in J \cup E} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f, f \right\rangle - \left\langle \sum_{i \in J^c \setminus E} \omega_i^\vee \pi_{W_i} KK^* f, f \right\rangle \\
&= \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle - \sum_{i \in J^c} \omega_i^\vee \langle KK^* f, \pi_{W_i} f \rangle + 2 \operatorname{Re} \sum_{i \in E} \omega_i^\vee \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle \\
&= \left\| \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 - \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i \in I} \omega_i^\vee \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل است.

□

قضیه ۴.۲. اگر $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب پارسوال برای \mathcal{H} باشد، آنگاه برای هر $J \subseteq I$ و $f \in \mathcal{H}$

$$\operatorname{Re} \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 \geq \frac{3}{4} \|KK^* f\|^2.$$

اثبات. در اثبات قضیه قبل مشاهده کردیم که

$$S_J^\vee - S_{J^c}^\vee = KK^* S_J - S_{J^c} KK^*$$

بنابراین

$$S_J^\vee + S_{J^c}^\vee = 2 \left(\frac{KK^*}{2} - S_J \right)^2 + \frac{(KK^*)^2}{2} \geq \frac{(KK^*)^2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 KK^*S_J + S_{J^c}^2 + (KK^*S_J + S_{J^c}^2)^* &= KK^*S_J + S_{J^c}^2 + S_JKK^* + S_{J^c}^2 \\
 &= KK^*(S_J + S_{J^c}) + S_J^2 + S_{J^c}^2 \\
 &= (S_J + S_{J^c})KK^* + S_J^2 + S_{J^c}^2 \\
 &\geq \frac{3}{4}(KK^*)^2.
 \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 &Re \sum_{i \in J} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i^2 \pi_{W_i} f \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{4} (\langle KK^* S_J f, f \rangle + \langle S_{J^c}^2 f, f \rangle + \langle f, KK^* S_J f \rangle + \langle f, S_{J^c}^2 f \rangle) \\
 &\geq \frac{3}{4} \|KK^* f\|^2.
 \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۲ به تعریف مفاهیم زیر منجر می‌شود که در واقع تعمیمی از مفاهیم معرفی شده در [۱۵، ۱۶] برای قاب‌های پرسوال و قاب‌های ترکیب پرسوال هستند.

فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب پرسوال ترکیب باشد آنگاه در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
 v_+(W, K, J) &= \sup \left\{ \frac{Re \sum_{i \in J^c} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J} \omega_i^2 \pi_{W_i} f \right\|^2}{\|KK^* f\|^2} : KK^* f \neq 0 \right\}, \\
 v_-(W, K, J) &= \inf \left\{ \frac{Re \sum_{i \in J^c} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J} \omega_i^2 \pi_{W_i} f \right\|^2}{\|KK^* f\|^2} : KK^* f \neq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

در ادامه ویژگی‌های این مفاهیم را برای K -قاب‌های ترکیب پارسوال بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب پارسوال باشد. شرایط زیر برقرارند.

$$\frac{3}{4} \leq v_-(W, K, J) \leq v_+(W, K, J) \leq \|K\| \|K^\dagger\| (\|K\| + \|K^\dagger\|) \quad (\text{الف})$$

$$v_-(W, K, J) = v_-(W, K, J^c) \text{ و } v_+(W, K, J) = v_+(W, K, J^c) \quad (\text{ب})$$

$$v_+(W, K, \emptyset) = v_-(W, K, \emptyset) = 1 \text{ و } v_+(W, K, I) = v_-(W, K, I) = 1 \quad (\text{ج})$$

اثبات. برای اثبات قسمت (الف) با توجه به تعریف فقط کافی است کران بالای نامساوی را اثبات کنیم. با توجه به این که W دنباله بسل است داریم

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f \right\|^2 &= \sup_{\|h\|=1} \left| \left\langle \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f, h \right\rangle \right|^2 \\ &= \sup_{\|h\|=1} \left| \left\langle \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \pi_{W_i} f, \pi_{W_i} h \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \|\pi_{W_i} f\|^2 \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \|\pi_{W_i} h\|^2 \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \|K^* h\|^2 \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \|\pi_{W_i} f\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \sum_{i \in J} \omega_i^\vee \|\pi_{W_i} f\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \|K^* f\|^2 \\ &= \|K\|^2 \|K^\dagger K K^* f\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \|K^\dagger\|^2 \|K K^* f\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i \in J^c} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle &= \operatorname{Re} \langle \sum_{i \in J^c} \omega_i \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle S_{J^c} f, KK^* f \rangle \\ &\leq \|S_{J^c} f\| \|KK^* f\| \\ &\leq \|K\| \|K^\dagger\| \|KK^* f\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین

$$v_-(W, K, J) \leq v_+(W, K, J) \leq \|K\| \|K^\dagger\| (\|K\| + \|K^\dagger\|),$$

و اثبات (الف) کامل است. از طرف دیگر بنا بر اثبات قضیه ۳.۲

$$KK^* S_J - S_{J^c} KK^* = S_J^2 - S_{J^c}^2$$

در نتیجه

$$\langle S_J^2 f, f \rangle + \operatorname{Re} \langle S_{J^c} KK^* f, f \rangle = \langle S_{J^c}^2 f, f \rangle + \operatorname{Re} \langle KK^* S_J f, f \rangle,$$

برای هر $f \in H$ بنا بر این

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \sum_{i \in J^c} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2 \\ &= \operatorname{Re} \sum_{i \in J} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \left\| \sum_{i \in J^c} \omega_i \pi_{W_i} f \right\|^2, \end{aligned}$$

و این (ب) را نتیجه می‌دهد. قسمت (ج) مستقیم از تعریف با استفاده از این حقیقت که $S_W = KK^*$ اثبات می‌شود. □

با استفاده از قضیه فوق، می‌توان چند نتیجه معادل روی K -قاب‌های ترکیب پارسوال اثبات کرد.

نتیجه ۶.۲. فرض کنید $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ یک K -قاب ترکیب پارسوال باشد، آنگاه شرایط زیر معادل اند:

$$v_+(W, K, J) = v_-(W, K, J) = 1 \quad (1)$$

$$Re \sum_{i \in J} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle = \|\sum_{i \in J} \omega_i \pi_{W_i} f\|^2. \quad (2)$$

$$Re \sum_{i \in J^c} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle = \|\sum_{i \in J^c} \omega_i \pi_{W_i} f\|^2 \quad (3)$$

اثبات. معادل بودن (۲) و (۳) بدیهی است. حال فرض کنید (۲) برقرار باشد، سپس

$$\begin{aligned} & Re \sum_{i \in J^c} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle + \|\sum_{i \in J} \omega_i \pi_{W_i} f\|^2 \\ &= Re \sum_{i \in I} \omega_i \langle \pi_{W_i} f, KK^* f \rangle \\ &= \langle S_W f, KK^* f \rangle \\ &= \|KK^* f\|^2, \end{aligned}$$

و این (۱) را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر اگر (۱) برقرار باشد به وضوح (۲) و (۳) نیز برقرار هستند. بنابراین اثبات کامل است. \square

مراجع

- [1] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamaal, Characterization and construction of K -fusion frames and their duals in Hilbert spaces, *Results in Mathematics*, **73**(47) (2018), <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0781-1>.
- [2] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamaal, Some constructions of K -frames and their duals, *Rocky Mt. J. Math.*, **47**(6) (2017), 1749–1764.
- [3] F. Arabyani Neyshaburi, Gh. Mohajeri Minaei and E. Anjidani, On some equalities and inequalities for K -frames, *Indian journal of pure and applied mathematics*, To appear.

- [4] R. Balan, P.G. Casazza and D. Edidin, On signal reconstruction without phase, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **20** (2006), 345–356.
- [5] R. Balan, P.G. Casazza, D. Edidin and G. Kutyniok, A new identity for Parseval frames, *Proc. Am. Math. Soc.*, **135** (2007), 1007–1015.
- [6] H. Bolcskel, F. Hlawatsch and H.G Feichtinger, Frame-theoretic analysis of oversampled filter banks, *IEEE Trans. Signal Process.*, **46** (1998), 3256–3268.
- [7] P.G. Casazza, The art of frame theory, *Taiwanese J. Math.*, **4**(2) (2000), 129–202.
- [8] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, *Contemp. Math.*, **345** (2004), 87–114.
- [9] P.G. Casazza, G. Kutyniok and S. Li, Fusion frames and distributed processing, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **25**(1) (2008), 114–132.
- [10] R. Duffin and A. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.
- [11] H.G. Feichtinger and K. Grochenig, Irregular sampling theorems and series expansion of band-limited functions, *Math. Anal. Appl.*, **167** (1992), 530–556.
- [12] H.G. Feichtinger and T. Werther, Atomic systems for subspaces, in: L. Zayed(Ed.), *proceedings SampTA. Orlando, FL*, (2001), 163–165.
- [13] P. Găvruta, On the duality of fusion frames, *J. Math. Anal. Appl.*, **333**(2) (2007), 871–879.
- [14] L. Găvruta, Frames for operators, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **32** (2012), 139–144.
- [15] P. Găvruta, On some identities and inequalities for frames in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **321** (2006), 467–478.
- [16] Q. Guo, J. Leng and H. Li, Some equalities and inequalities for fusion frames, *SpringerPlus*, **121**(5) (2016), 1–10.
- [17] S.S. Iyengar, R.R. Brooks, *Distributed Sensor Networks*, Chapman, Boston Rouge, La, USA, 2005.
- [18] X. Xiao, Y. Zhu and M. Ding, Erasures and equalities for fusion frames in Hilbert spaces, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **38**(3) (2015), 1035–1045.
- [19] X.C. Xiao, Y.C. Zhu and L. Găvruta, Some properties of K-frames in Hilbert spaces, *Results. Math.*, **63** (2013), 1243–1255.
- [20] X. Zhu and G. Wu, A note on some equalities for frames in Hilbert spaces, *Appl. Math. Lett.*, **23**(7) (2010), 788–790.