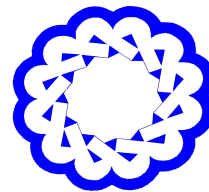


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

### مقدمه‌ای مختصر بر ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی و گروه‌های کران‌دار ماتریس‌های کواترنیونی

الهه نجفی آ، بامداد یاحقی\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

پیشکش یاد و خاطرهٔ مریم میرزاخانی، که ستاره‌ای تابان ولی کوتاه‌درخش، و پاک و صافی، و از عاشقان بود.

#### چکیده

حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها به عنوان تنها حلقهٔ تقسیم جبری ناجابه‌جایی روی میدان اعداد حقیقی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. در این مقاله، نخست مقدمه‌ای مختصر بر ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی ارائه می‌دهیم، که ما را در پرداختن به گزارهٔ اصلی مقاله یاری خواهد کرد. گزارهٔ اصلی مقاله روایت کواترنیونی قضیه‌ای از هرمان آوئرباخ<sup>۱</sup> است. به عبارت دقیق، ثابت می‌کنیم هر گروه کران‌دار از ماتریس‌ها با درایه‌های کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

#### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:  
دریافت شده: ۲۱ اردیبهشت  
۱۳۹۷  
پذیرفته شده: ۸ تیر ۱۳۹۷  
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷  
ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

#### کلمات کلیدی:

کواترنیون‌ها، ماتریس‌ها و  
جبر خطی کواترنیونی،  
گروه‌های کران‌دار  
ماتریسی.

## ۱. مقدمه

کواترنیون‌ها در سال ۱۸۴۳ توسط ویلیام همیلتون<sup>۲</sup>، ریاضی‌دان ایرلندی، کشف یا ابداع شدند. سابقه مطالعه و پژوهش در زمینه ماتریس‌های کواترنیونی دست کم به مقاله ولف<sup>۳</sup> به سال ۱۹۳۶ [۱۵] برمی‌گردد. برای فهرستی مبسوط پیرامون پیشینه پژوهش‌ها درباره کواترنیون‌ها و ماتریس‌های کواترنیونی خواننده را به منبع [۱۴] و مراجع آن ارجاع می‌دهیم.

این مقاله شامل دو بخش عمده است. در بخش عمده نخست، متشکل از بخش‌های دوم تا هشتم، مقدمه‌ای مختصر از کواترنیون‌ها، ماتریس‌ها و جبر خطی کواترنیونی ارائه خواهد شد. به طور کلی، در این مقاله گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها، و جبرهایی از این ماتریس‌ها در نظر گرفته می‌شوند و نیز ویژگی‌هایی از آنها بررسی می‌شوند. بخش مقدمه نخست، به طور کلی از مرجع یا مراجعی کپی‌برداری نشده است. هر چند مطالب ارائه شده در بخش‌های دوم تا هشتم استاندارد هستند، اما برخی گزاره‌ها و نیز، بعضاً، برخی برهان‌ها و همچنین سبک ارائه مطلب در این بخش تازگی دارند. در بخش عمده دیگر، متشکل از بخش‌های نهم و دهم، روایت کواترنیونی قضیه‌ای از هرمان آوئرباخ ارائه خواهد شد. به زبان دقیق، روایت کواترنیونی قضیه آوئرباخ حکم می‌کند که هر گروه کران‌دار از ماتریس‌های کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است. برهان قضیه آوئرباخ، که در این مقاله بدان پرداخته می‌شود، با الهام از برهان‌های ارائه شده در [۶] و [۱۳]، قضیه ۵.۱.۳ است. شایان گفتن است که برهان مبسوط قضیه آوئرباخ، ارائه شده برای گروه‌های ماتریس‌های مختلط، در [۱۳]، قضیه ۵.۱.۳ خود با الهام از برهان پرداخته شده در [۶] است. برای روایتی نامتناهی‌بعد از قضیه آوئرباخ در چارچوب فضاها هیلبرت نه لزوماً متناهی‌بعد به [۳]، لم ۱، صفحه ۵۴ رجوع کنید.

## ۲. حلقه تقسیم کواترنیون‌ها

\*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: elanajafi17@yahoo.com (الهه نجفی)، bamdad5@hotmail.com (بامداد یاحقی).

<http://doi.org/10.22072/wala.2018.85963.1170>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

<sup>2</sup>William R. Hamilton

<sup>3</sup>L.A. Wolff

حلقه تقسیم کواترنیون‌ها به طور صوری به صورت

$$\{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

تعریف می‌شود و با  $\mathbb{H}$  نمایش داده می‌شود. به افتخار زحمات ویلیام همیلتون که اولین بار کواترنیون‌ها را تعریف کرد، برای نمایش کواترنیون‌ها حرف  $\mathbb{H}$  را به کار می‌برند. به آسانی بررسی می‌شود که  $\mathbb{H}$  یک جبر چهاربعدی یک‌دار روی  $\mathbb{R}$  است که عمل ضرب در آن ناجابه‌جایی است. هر کواترنیون  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  را می‌توان به صورت  $x = \text{Re}(x) + \text{Im}(x)$  نوشت، که در آن  $\text{Re}(x) := x_0$  قسمت حقیقی  $x$  و  $\text{Im}(x) := x_1i + x_2j + x_3k$  قسمت موهومی  $x$  نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۰۲. مزدوج کواترنیون  $x$  را با  $\bar{x}$  نمایش می‌دهیم و بنا به تعریف  $\bar{x} := \text{Re}(x) - \text{Im}(x)$ . نرم کواترنیون  $x$  را با  $|x|$  نشان داده شده و بنا به تعریف توسط  $|x| := \sqrt{x\bar{x}}$  تعریف می‌شود.

توجه کنید به ازای هر  $x, y \in \mathbb{H}$ ، به راحتی می‌توان نشان داد  $\overline{\bar{x}} = x$ ،  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ ،  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ ،  $|xy| = |x||y|$  و  $|x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x$ ، و لذا  $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$  به ازای هر  $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ . برای دیدن چند ویژگی دیگر کواترنیون‌ها، خواننده را به [۱۴، گزاره ۴.۱.۲] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. دو عضو  $x, y \in \mathbb{H}$  مشابه<sup>۵</sup> گفته می‌شود هر گاه یک  $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  موجود باشد که  $axa^{-1} = y$ . برای تشابه بین  $x, y$  نماد  $x \sim y$  را به کار می‌بریم. حال فرض کنید  $x \in \mathbb{H}$ . به مجموعه متشکل از  $axa^{-1}$ ‌ها که  $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ، مدار تشابه<sup>۶</sup>  $x$  گوییم و آن را با  $\text{Sim}(x)$  نمایش می‌دهیم. به طور کلی، اگر  $S \subseteq \mathbb{H}$ ، بنا به تعریف

$$\text{Sim}(S) := \{a^{-1}pa : a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}, p \in S\} = \bigcup_{p \in S} \text{Sim}(p).$$

روشن است که  $axa^{-1} = y$  اگر و تنها اگر  $bx b^{-1} = y$ ، که در آن  $b = |a^{-1}|a$  ولی  $|b| = 1$ ، و به طور معادل  $b^{-1} = \bar{b}$ . در نتیجه  $\text{Sim}(x) = \{bx b^{-1} : b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}, b^{-1} = \bar{b}\}$ .

<sup>4</sup>Conjugate

<sup>5</sup>Similar

<sup>6</sup>Similarity orbit

توجه کنید که تشابه کواترنیونی یک رابطه هم‌ارزی است. در لم زیر به بیان قسمت‌هایی از [۱۴]، قضیه ۶.۲.۲، ولی با برهانی متفاوت، می‌پردازیم. لم زیر توصیفی از کواترنیون‌های مشابه و مدار تشابهی کواترنیون‌ها به دست می‌دهد.

لم ۳.۲. فرض کنید  $x, y \in \mathbb{H}$ . در این صورت احکام زیر برقرارند.

$$(i) \quad y \in Sim(x) \text{ اگر و تنها اگر } Re(x) = Re(y) \text{ و } |Im(x)| = |Im(y)|.$$

$$(ii) \quad Sim(x) = Re(x) + |Im(x)|S \text{ که در آن}$$

$$S := \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, Re(q) = 0\} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}.$$

به علاوه،

$$S = Sim(S) = Sim(i) = Sim(p),$$

به ازای هر  $p \in S$ .

(iii) به ازای هر  $x \in \mathbb{H}$ ، عضو یکتای  $y \in Sim(x) \cap \mathbb{C}_+$  موجود است، که در آن  $\mathbb{C}_+$  بستار نیم‌صفحه بالایی صفحه مختلط است.

اثبات. (i) فرض کنید  $y \in Sim(x)$ . پس  $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  موجود است به طوری که  $y = axa^{-1}$  و  $a^{-1} = \bar{a}$ ، بنابراین،

$$\begin{aligned} Re(y) &= \frac{axa^{-1} + \overline{axa^{-1}}}{2} \\ &= a\left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)a^{-1} \\ &= aRe(x)a^{-1} = Re(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(y) &= \frac{axa^{-1} - \overline{axa^{-1}}}{2} \\ &= a\left(\frac{x - \bar{x}}{2}\right)a^{-1} \\ &= a\operatorname{Im}(x)a^{-1}. \end{aligned}$$

در نتیجه،  $|\operatorname{Im}(y)| = |\operatorname{Im}(x)|$  حال برعکس، فرض کنید  $\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y)$  و  $|\operatorname{Im}(x)| = |\operatorname{Im}(y)|$ . اگر  $|\operatorname{Im}(x)| = 0$ ، آنگاه حکم واضح است. پس فرض کنید  $|\operatorname{Im}(x)| \neq 0$ . داریم  $x = \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Im}(x)$ ،  $y = \operatorname{Re}(y) + \operatorname{Im}(y)$  و  $\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y)$ . پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم  $\operatorname{Im}(x) \sim \operatorname{Im}(y)$  یا به طور معادل، نشان دهیم  $|\operatorname{Im}(x)| \frac{\operatorname{Im}(x)}{|\operatorname{Im}(x)|} \sim |\operatorname{Im}(y)| \frac{\operatorname{Im}(y)}{|\operatorname{Im}(y)|}$ . بنا بر  $|\operatorname{Im}(x)| = |\operatorname{Im}(y)|$ ، کافی است  $\frac{\operatorname{Im}(x)}{|\operatorname{Im}(x)|} \sim \frac{\operatorname{Im}(y)}{|\operatorname{Im}(y)|}$  را ثابت کنیم. از طرفی، طول طرفین تشابه مذکور برابر با یک است. پس بنا بر ویژگی تعدی رابطه تشابه، کافی است ثابت کنیم هر یک از طرفین این تشابه با  $i$  مشابه است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \sim i$$

هرگاه  $|a| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ . حال  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  با  $|q| = 1$ ، به طور معادل  $q^{-1} = \bar{q}$ ، را طوری می‌یابیم که رابطه  $a = qi q^{-1} = qi \bar{q}$  برقرار باشد. حال با توجه به برابری

$$a_1 i + a_2 j + a_3 k = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)i(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k),$$

معادلات زیر را داریم

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1, \\ q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 &= a_1, \\ q_0 q_3 + q_1 q_2 &= \frac{1}{2} a_2, \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 &= \frac{1}{2} a_3. \end{aligned}$$

با فرض  $a_1 \neq -1$ ، به روشنی  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ، که در آن

$$q_0 = 0, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1+a_1}{2}}, \quad q_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}}, \quad q_3 = \frac{a_3}{2\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}},$$

یک جواب معادله  $a = qi\bar{q}$  با شرط  $q^{-1} = \bar{q}$  است. حال اگر  $a_1 = -1$ ، از آنجا که  $|a| = 1$ ، پس داریم  $a_2 = a_3 = 0$ . در نتیجه،  $a_2 = a_3 = 0$ . و در این حالت معادله  $-i = qi q^{-1}$  دارای جواب  $q = j$  است.

(ii) قرار دهید

$$S := \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, \operatorname{Re}(q) = 0\}, \quad S_1 := \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}.$$

نخست نشان می‌دهیم  $S = S_1$ . برای این منظور، فرض کنید  $q \in S$  عضوی دلخواه باشد. لذا  $|q| = 1$ ،  $\operatorname{Re}(q) = 0$ . با توجه به اینکه  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ ، داریم  $q^{-1} = \bar{q} = -\operatorname{Im}(q) = -q$ . پس  $q^2 = -1$  و  $q \in S_1$ . حال فرض کنید  $q \in S_1$  عضوی دلخواه باشد. در نتیجه داریم  $q^2 = -1$ ،  $|q| = 1$ . سپس با توجه به رابطه  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ ، داریم  $q^{-1} = \bar{q} = -q$ . این به روشنی ایجاب می‌کند  $\operatorname{Re}(q) = 0$ ، و لذا  $q \in S$ . بنابراین  $S = S_1$ . حال نشان می‌دهیم

$$\operatorname{Sim}(x) = \operatorname{Re}(x) + |\operatorname{Im}(x)|S.$$

توجه کنید اگر  $\text{Im}(x) = 0$ ، آنگاه حکم واضح است. فرض کنید  $\text{Im}(x) \neq 0$  و  $y \in \text{Sim}(x)$  عضو دلخواه باشد. سپس  $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  موجود است به طوری که  $y = a^{-1}xa$ . حال داریم

$$\begin{aligned} y &= a^{-1}(\text{Re}(x) + \text{Im}(x))a \\ &= \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)| \frac{a^{-1}\text{Im}(x)a}{|\text{Im}(x)|} \\ &= \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|q, \end{aligned}$$

که در آن  $q = \frac{a^{-1}\text{Im}(x)a}{|\text{Im}(x)|}$ . بنابراین  $|q| = 1$  و  $\text{Re}(q) = 0$ . پس  $q \in S$ . این نتیجه می‌دهد که

$$\text{Sim}(x) \subseteq \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|S.$$

حال برای اثبات عکس رابطه شمول مذکور، فرض کنید  $y = \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|q$ ، که در آن  $q \in S$ . در نتیجه، می‌توان نوشت  $\text{Re}(y) + \text{Im}(y) = \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|q$ . بنابراین  $\text{Re}(x) = \text{Re}(y)$  و  $|\text{Im}(x)| = |\text{Im}(y)|$ . حال بنا بر (i)، داریم  $y \in \text{Sim}(x)$ . این نتیجه می‌دهد که

$$\text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|S \subseteq \text{Sim}(x).$$

(iii) فرض کنید  $y = \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|i$ . حال بنا بر (ii)،  $y \in \text{Sim}(x)$ . همچنین  $y \in \mathbb{C}_+$ . برای اثبات یکتایی  $y$ ، فرض کنید  $y_1, y_2 \in \text{Sim}(x) \cap \mathbb{C}_+$  بنا بر (ii)،  $\text{Re}(y_1) = \text{Re}(x) = \text{Re}(y_2)$  و  $|\text{Im}(y_1)| = |\text{Im}(x)| = |\text{Im}(y_2)|$ . در نتیجه، داریم

$$\text{Sim}(y_1) = \text{Sim}(x) = \text{Sim}(y_2),$$

□

و  $y_1 = \text{Re}(x) + |\text{Im}(x)|i = y_2$ . بنابراین  $y_1, y_2 \in \mathbb{C}_+$

گزاره زیر نتیجه‌ای سراسرست و مفید از لم بالاست.

نتیجه ۴.۲. فرض کنید  $a, b \in \mathbb{R}$ . در این صورت معادله  $p^2 - 2ap + b = 0$  در کواترنیون‌ها بسته اینکه به ترتیب  $0 < a^2 - b$ ،  $a^2 - b = 0$ ، یا  $0 < a^2 - b$ ، دارای دو جواب حقیقی  $a \pm \sqrt{a^2 - b}$ ، یک جواب حقیقی  $a$ ، یا بینهایت جواب کواترنیونی

$$a + \sqrt{b - a^2}S = \text{sim}(a + i\sqrt{b - a^2})$$

است، که در آن

$$S = \text{sim}(i) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, \text{Re}(q) = 0\} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}.$$

به علاوه، هر دو جواب کواترنیونی و ناحقیقی هر معادله درجه دوم کواترنیونی با ضرایب حقیقی مشابه هستند.

اثبات. در سایه لم بالا، حکم نتیجه‌ای سراسر است از اتحاد

$$p^2 - 2ap + b = (p - a)^2 - (a^2 - b)$$

□

است.

### ۳. ماتریس‌ها و تعبیر عملگری آنها

در این بخش، ابتدا به معرفی حلقه ماتریس‌ها با درایه‌ها در یک حلقه تقسیم دلخواه می‌پردازیم. سپس به طور خاص، آن را برای ماتریس‌ها با درایه‌های کواترنیونی در نظر می‌گیریم. همچنین حلقه عملگرهای خطی روی فضاها برداری روی حلقه‌های تقسیم را نیز معرفی خواهیم کرد. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم دلخواه باشد. مجموعه همه ماتریس‌های  $m \times n$  با درایه‌ها در  $D$  را با  $M_{m \times n}(D)$  نمایش می‌دهیم، که تحت جمع معمولی ماتریسی یک گروه آبدی است. بنا به تعریف

$$D^n := M_{n \times 1}(D), \quad D_n := M_{1 \times n}(D).$$



مجموعه‌های  $D^n$  و  $D_n$ ، به طور طبیعی به همراه جمع برداری و ضرب اسکالر در ماتریس‌های ستونی و سطری، به ترتیب، فضاهای برداری راست و چپ با بعد  $n$  روی  $D$  هستند. به طور مرسوم، ترانهادهٔ ماتریس  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(D)$  با  $A^t = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(D)$  بنا به تعریف  $A^t = (a_{ji}) := (a_{ji})$  نیز یاد آور می‌شویم که به ازای هر  $A = (a_{ij})$  و  $B = (b_{ij})$  در  $M_{n \times m}(D)$ ، بنا به تعریف داریم

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n \times m}(D).$$

حال اگر  $m = n$ ، مجموعهٔ ماتریس‌های  $n \times n$ ، یا از اندازهٔ  $n$ ، با درایه‌ها در  $D$  را با  $M_n(D)$  نمایش می‌دهیم، که تحت جمع معمولی ماتریسی به صورت بالا و ضرب ماتریس‌ها به صورت زیر یک حلقه است. به ازای هر  $A = (a_{ik})$  و  $B = (b_{kj})$  در  $M_n(D)$ ،

$$AB = (a_{ik})(b_{kj}) := (c_{ij}) \in M_n(D),$$

که در آن  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ . به روشنی،  $M_{n \times m}(D)$  یک  $M_m(D)$ -مدول راست و  $M_n(D)$ -مدول چپ با جمع و ضرب ماتریسی است و  $M_n(D)$  یک  $M_n(D)$ -مدول دوطرفه است. این روشن می‌کند که چرا  $D^n$  و  $D_n$ ، به ترتیب، فضاهای برداری راست و چپ روی  $D$  هستند. به ویژه، در حالتی که  $D = \mathbb{H}$ ، مجموعه‌های  $\mathbb{H}^n$  و  $\mathbb{H}_n$ ، را، به ترتیب، به عنوان فضاهای برداری راست و چپ روی  $\mathbb{H}$  در نظر می‌گیریم و به آنها فضاهای برداری کواترنیونی استاندارد می‌گوییم. تمامی مفاهیم پایه‌ای که در فضاهای مختلط، مانند فضای استاندارد مختلط  $\mathbb{C}^n$ ، تعریف می‌شوند، مانند مفاهیم استقلال و وابستگی خطی، زیرفضا، مجموعهٔ مولد یک زیرفضا، پایه، بعد، جمع مستقیم و غیره را می‌توان در فضاهای برداری کواترنیونی، به ویژه در فضاهای استاندارد کواترنیونی  $\mathbb{H}^n$  و  $\mathbb{H}_n$ ، نیز تعریف کرد. در سراسر این مقاله منظور از  $\mathbb{F}$ ،  $\mathbb{R}$ ، یا  $\mathbb{C}$ ، یا  $\mathbb{H}$  است. توجه کنید که مجموعهٔ  $M_n(\mathbb{H})$  تحت جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهد. به طور مرسوم، نماد  $GL_n(\mathbb{H})$  را برای نمایش ماتریس‌های وارون‌پذیر در  $M_n(\mathbb{H})$  به کار می‌بریم.

**تعریف ۱.۳.** فرض کنید  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{H})$ . ماتریس الحاقی  ${}^Y A$  را به صورت  $(\overline{a_{ji}})$  در

---

<sup>7</sup>Adjoint of  $A$

$M_{n \times m}(\mathbb{H})$  تعریف می‌کنیم و با  $A^*$  نمایش می‌دهیم. به ویژه به ازای  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^n$  بنا به تعریف، داریم  $v^* := \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_n$ .

به طور مرسوم، به ازای فضای برداری راست داده شده  $V$  روی یک حلقه تقسیم  $D$ ، مجموعه همه تبدیلات خطی یا عملگرهای خطی راست  $T: V \rightarrow V$  با  $\mathcal{L}(V)$  نشان داده می‌شود، که تحت جمع معمولی عملگرهای خطی تشکیل یک گروه آبدلی می‌دهد. می‌توان دید  $\mathcal{L}(V)$  تحت جمع عملگری و ترکیب عملگرهای خطی یک حلقه است. به ویژه، اگر  $D = \mathbb{H}$ ، مجموعه  $\mathcal{L}(\mathbb{H}^n)$  تحت جمع معمولی عملگرهای خطی و ترکیب عملگرهای خطی تشکیل یک حلقه می‌دهد. به طور طبیعی، اگر  $V$  یک فضای برداری چپ روی یک حلقه تقسیم  $D$  باشد، می‌توان  $\mathcal{L}(V)$  را تعریف کرد.

**تعریف ۲.۳.** فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$  یک پایه مرتب برای فضای برداری راست  $V$  باشد. به ازای هر بردار  $v \in V$ ، اسکالرهای یگانه  $x_1, \dots, x_n \in D$  موجودند که  $v =$

$$\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D^n$$

مختصات  $v$  نسبت به پایه مرتب  $\mathcal{B}$  گوئیم و آن را با  $[v]_{\mathcal{B}}$  نمایش می‌دهیم.

فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{B}$  یک پایه مرتب برای فضای برداری راست  $V$  باشد. در این صورت به ازای هر تبدیل خطی  $T \in \mathcal{L}(V)$ ، ماتریس یکتای  $A \in M_n(D)$  موجود است که به ازای هر  $v \in D^n$

$$[Tv]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}.$$

ماتریس  $A$  را نمایش ماتریسی یا ماتریس نمایش  ${}^{\mathcal{B}}T$  نسبت به پایه  $\mathcal{B}$  گوئیم و آن را با  $[T]_{\mathcal{B}}$  نشان می‌دهیم. همچنین، به طور طبیعی، هر ماتریس  $A$  در  $M_n(D)$ ، یک تبدیل خطی روی  $D^n$  القا می‌کند که با  $T_A$  نشان داده می‌شود و توسط  $T_A X = AX$  روی  $D^n$  تعریف می‌شود. اغلب برای راحتی،

<sup>8</sup>Matrix representation of  $T$

$T_A$  را با  $A$  نیز نمایش می‌دهیم زیرا ماتریس نمایش  $T_A$  نسبت به پایه مرتب استاندارد  $D^n$  همان ماتریس  $A$  است. بنا بر گزاره‌ای استاندارد، با تثبیت یک پایه مرتب برای  $D^n$ ، مثلاً پایه مرتب استاندارد  $D^n$ ، نگاشتی که هر تبدیل خطی را به ماتریس نمایش آن را نسبت به آن پایه می‌برد، نگاشتی یک‌به‌یک، پوشا، و حافظ جمع و ضرب است. از این رو، به ویژه با تثبیت پایه مرتب استاندارد برای  $D^n$ ، اعضای  $\mathcal{L}(D^n)$  را به طور طبیعی با اعضای  $M_n(D)$  یکی می‌گیریم. همچنین شایان گفتن است که قضایای استاندارد جبر خطی مربوط به ماتریس‌های تغییر مختصات پایه‌های فضاها برداری متناهی بعد روی حلقه‌های تقسیم، به ویژه در موارد  $D^n$  و  $\mathbb{H}^n$ ، و نیز ارتباط نمایش ماتریسی تبدیلات خطی نسبت به پایه‌های متمایز فضاها برداری راست متناهی بعد در  $\mathcal{L}(D^n)$ ، و به ویژه در  $\mathcal{L}(\mathbb{H}^n)$ ، به همان شکل استانداردشان بر حسب تبدیلات تشابهی برقرارند.

#### ۴. فضاها ضرب داخلی کواترنیونی و فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت

در این بخش، فضاها ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) کواترنیونی را تعریف می‌کنیم. سپس گزاره استاندارد فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت را ارائه خواهیم داد.

تعریف ۱.۴. فرض کنید  $V$  یک فضای برداری راست روی  $\mathbb{H}$  باشد. نگاشت

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{H}$$

را یک ضرب داخلی راست روی  $V$  گوئیم هرگاه به ازای هر  $v, w, z \in V$  و  $\alpha \in \mathbb{H}$  داشته باشیم:

$$(1) \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ و تساوی برقرار باشد اگر و تنها اگر } v = 0.$$

$$(2) \quad \langle v\alpha, w \rangle = \langle v, w \rangle \alpha$$

$$(3) \quad \langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$$

$$(4) \quad \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

به فضای  $V$  همراه با ضرب داخلی راست  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  روی  $V$ ، یک فضای ضرب داخلی راست روی  $V$ <sup>۹</sup>

<sup>۹</sup>Inner product space over  $\mathbb{H}$

گوییم. به طور طبیعی، می‌توان فضاهای ضرب داخلی چپ کواترنیونی را تعریف کرد.

برای مثال،  $V$  را فضای برداری راست  $\mathbb{H}^n$  بگیرد. به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}, \langle x, y \rangle := y^* x, (x, y \in \mathbb{H}^n)$$

یک ضرب داخلی راست روی  $\mathbb{H}^n$  است، که به آن ضرب داخلی استاندارد  $\mathbb{H}^n$  می‌گوییم. همچنین  $\mathbb{H}_n$  به همراه نگاشت

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}_n \times \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{H}, \langle x, y \rangle := xy^*, (x, y \in \mathbb{H}_n)$$

یک ضرب داخلی چپ روی  $\mathbb{H}_n$  است. به این ضرب داخلی، ضرب داخلی استاندارد  $\mathbb{H}_n$  می‌گوییم. در این نقطه خوب است دو مطلب کاملاً استاندارد مربوط به فضاهای ضرب داخلی کواترنیونی را یادآوری کنیم. نخست اینکه، همانند فضاهای ضرب داخلی حقیقی و مختلط، در هر فضای ضرب داخلی کواترنیونی  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  نابرابری زیر، معروف به نابرابری کوشی-بونیاکوفسکی-شوارتس، برقرار است.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}, (x, y \in V),$$

و در آن تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر مجموعه  $\{x, y\}$  وابسته خطی باشد. یک نتیجه‌آنی نابرابری کوشی-بونیاکوفسکی-شوارتس مطلب استاندارد دیگر زیر است. اینکه نگاشت  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده توسط  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  روی فضای ضرب داخلی کواترنیونی داده شده  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  یک نرم روی  $V$  القا می‌کند، که به آن نرم ناشی از ضرب داخلی  $V$  می‌گویند. فضاهای ضرب داخلی که با آنها در این مقاله سر و کار داریم همگی متناهی‌بعد هستند. در نتیجه متریک القاشده از نرم ناشی از ضرب داخلی روی هر چنین فضایی همواره کامل است، و لذا چنین فضاهایی هیلبرت هستند. نیز خوب است یادآور شویم که اگر  $V$  یک فضای ضرب داخلی (و به طور کلی نرم‌دار) متناهی‌بعد باشد و  $T \in \mathcal{L}(V)$ ، آنگاه  $T$  پیوسته است و به علاوه

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V) \rightarrow [0, +\infty), \|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

یک نرم، موسوم به نرم عملگری، روی  $\mathcal{L}(V)$  تعریف می‌کند. توجه کنید که اگر  $V$  یک فضای ضرب داخلی (و به طور کلی نرم‌دار) متناهی‌بعد کواترنیونی باشد، آنگاه  $\mathcal{L}(V)$  به همراه نرم عملگری یک فضای نرم‌دار حقیقی کامل (باناخ) است. به سادگی می‌توان دید که یک عملگر خطی روی یک فضای نرم‌دار دلخواه، نه لزوماً متناهی‌بعد، پیوسته است اگر و تنها اگر نرم عملگری آن متناهی باشد. از این رو، معمول است که عملگرهای خطی و پیوسته روی یک فضای نرم‌دار را عملگرهای خطی و کران‌دار می‌نامند. همچنین، از جمله گزاره‌های استاندارد نظریه فضاها هیلبرت (ضرب داخلی کامل) کواترنیونی که می‌توان از آنها یاد کرد قضایای بهترین تقریب<sup>۱۰</sup> و نمایش ریس<sup>۱۱</sup> هستند. نتیجه سراسری از این قضایای استاندارد نظریه فضاها هیلبرت این امکان را می‌دهد که به ازای هر عملگر خطی کران‌دار داده شده  $T \in \mathcal{L}(V)$  عملگر الحاقی آن، نشان داده شده توسط  $T^* \in \mathcal{L}(V)$ ، را تعریف کرد. می‌توان دید به ازای  $T \in \mathcal{L}(V)$  دلخواه و داده شده،  $T^* \in \mathcal{L}(V)$  از طریق رابطه

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, (x, y \in V)$$

به طور یگانه معین می‌شود. یادآور می‌شویم که برای ما عملگرهای خطی با عملگرهای خطی و کران‌دار یکی هستند زیرا تنها با فضاها متناهی‌بعد سروکار داریم. از دیگر گزاره‌های کلاسیک نظریه فضاها ضرب داخلی کواترنیونی قضیه فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت<sup>۱۲</sup> است، که برهانی استاندارد از آن را در زیر ارائه می‌دهیم. برای این منظور، به طور طبیعی، به تعریف زیر نیاز داریم.

**تعریف ۲.۴.** فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) با ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  روی  $\mathbb{H}$  باشد. بردارهای  $x, y \in V$  را متعامد خوانیم هرگاه  $\langle x, y \rangle = 0$ . زیرمجموعه  $S \subseteq V$  را متعامد یکه خوانیم هرگاه  $\langle x, y \rangle = \delta_{x,y}$ ، که در آن  $\delta$  نشانگر  $\delta$ ی کرونکر روی زیرمجموعه  $S$  است.

**گزاره ۳.۴.** (فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت) فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی راست (به ترتیب: چپ) روی  $\mathbb{H}$  باشد. فرض کنید  $(v_i)_{i=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از بردارهای مستقل خطی در  $V$  باشد. در

<sup>10</sup>The best approximation theorem

<sup>11</sup>The Riesz representation theorem for bounded linear functionals

<sup>12</sup>The Gram-Schmidt orthogonalization process

این صورت یک دنباله متعامد یکه  $(u_i)_{i=1}^{\infty}$  در  $V$  موجود است به طوری که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم

$$\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\}.$$

به علاوه، اگر  $(w_i)_{i=1}^{\infty}$  دنباله‌ای متعامد یکه در  $V$  باشد به طوری که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم

$$\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{w_1, \dots, w_n\},$$

آنگاه به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، اسکالر با طول واحد  $c_n$  موجود است به طوری که  $w_n = u_n c_n$  (به ترتیب:  $w_n = c_n u_n$ ).

اثبات. برهان را برای فضاهای ضرب داخلی راست می‌نویسیم. به روشنی، برهان در حالت فضاهای ضرب داخلی چپ به طور مشابه انجام می‌شود. نخست تعریف کنید  $u_1 = v_1 \|v_1\|^{-1}$ . سپس به ازای هر  $n \geq 2$  بردارهای  $u_n$  را به صورت زیر تعریف کنید

$$\widehat{u}_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \quad u_n := \widehat{u}_n \|\widehat{u}_n\|^{-1}.$$

روشن است که به ازای هر  $k \geq 1$ ، داریم  $\|u_k\| = 1$ . حکم نخست را با نشان دادن اینکه به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، مجموعه  $\{u_i\}_{i=1}^n$  متعامد یکه است و اینکه

$$\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\}$$

ثابت می‌کنیم. این حکم اخیر را با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم. حکم به ازای  $n = 1$  بدیهی است. حکم را برای  $n - 1$  فرض کنید. آن را برای  $n$  ثابت می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم  $\{u_i\}_{i=1}^n$  متعامد یکه است، با توجه به فرض استقرا، کافی است ثابت کنیم

$$\langle u_n, u_1 \rangle = 0,$$

به ازای هر  $1 \leq l < n$ . برای این منظور، به ازای هر  $1 \leq l < n$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_n, \widehat{u}_l \rangle &= \left\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \widehat{u}_l \right\rangle, \\ &= \langle v_n, \widehat{u}_l \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_i, \widehat{u}_l \rangle \langle v_n, u_i \rangle, \\ &= \langle v_n, \widehat{u}_l \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_i, u_l \rangle \langle v_n, u_i \rangle \|\widehat{u}_l\|, \\ &= \langle v_n, \widehat{u}_l \rangle - \langle u_l, u_l \rangle \langle v_n, u_l \rangle \|\widehat{u}_l\|, \\ &= \langle v_n, \widehat{u}_l \rangle - \langle v_n, \widehat{u}_l \rangle = 0. \end{aligned}$$

این یعنی  $\{\widehat{u}_i\}_{i=1}^n$  یک مجموعه متعامد است، و لذا مجموعه  $\{u_i\}_{i=1}^n$  متعامد یکه است. حال می‌ماند نشان دهیم که  $\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^n = \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^n$ ، به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ . این حکم را نیز با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم. حکم به ازای  $n = 1$  بدیهی است. حکم را به ازای  $n - 1$  فرض کرده، آن را به ازای  $n$  ثابت می‌کنیم. برای این منظور، با توجه به فرض استقرا، کافی است نشان دهیم  $u_n \in \text{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\}$  و  $v_n \in \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\}$  می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} u_n &= \widehat{u}_n \|\widehat{u}_n\|^{-1}, \\ &= v_n \|\widehat{u}_n\|^{-1} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle \|\widehat{u}_n\|^{-1}, \\ &\in \text{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^n, \end{aligned}$$

که در آن از برابری  $\text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ ، که ناشی از فرض استقراست، استفاده شده است.

همچنین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} v_n &= \widehat{u}_n + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \\ &= u_n \|\widehat{u}_n\| + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \langle v_n, u_i \rangle, \\ &\in \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^n. \end{aligned}$$

بنابراین  $\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_i\}_{i=1}^n = \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^n$ . برای اثبات یکتایی دنباله متعامد یک‌ه حاصل از فرایند گرام-اشمیت، یعنی دنباله  $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ ، با تقریب ضرب در اسکالره‌ای با طول واحد، فرض کنید  $(w_i)_{i=1}^{\infty}$  دنباله متعامد یک‌ه دیگری در  $V$  باشد که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، در شرط زیر صدق می‌کند

$$\text{span}_{\mathbb{H}}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{w_1, \dots, w_n\}.$$

نشان می‌دهیم که به ازای هر  $n \geq 1$ ، اسکالر لزوماً با طول واحد  $c_n$  موجود است به طوری که  $w_n = u_n c_n$ . این حکم را با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم. به ازای  $n = 1$ ، حکم بدیهی است. فرض کنید حکم به ازای  $n - 1$  برقرار باشد و اسکالره‌ای لزوماً با طول واحد  $c_1, \dots, c_{n-1}$  موجود باشند به طوری که به ازای هر  $1 \leq i \leq n - 1$ ، داشته باشیم  $w_i = u_i c_i$ . حال با توجه به برابری  $\text{span}_{\mathbb{H}}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{w_1, \dots, w_n\}$  پس می‌توان نوشت  $w_n = \sum_{i=1}^n u_i c'_i$

$$w_n - u_n c'_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i c'_i \in \text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{w_i\}_{i=1}^{n-1}.$$

اما، به روشنی،  $u_n$  و  $w_n$  بر  $\text{span}_{\mathbb{H}}\{u_i\}_{i=1}^{n-1} = \text{span}_{\mathbb{H}}\{w_i\}_{i=1}^{n-1}$  عمود هستند. در نتیجه

$$\|w_n - u_n c'_n\|^2 = \langle w_n - u_n c'_n, w_n - u_n c'_n \rangle = 0,$$



□

و از آنجا  $w_n = u_n c'_n$  این برهان را کامل می‌کند.

### ۵. طیف، تحویل‌پذیری، و مثلثی‌پذیری

در این بخش، نخست مقدار ویژه راست و طیف ماتریس‌ها در  $M_n(D)$  که  $D$  یک حلقه تقسیم است، را تعریف می‌کنیم. به ویژه، این تعریف را برای ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{H})$  را در نظر گرفته و سپس چندجمله‌ای مینیمال و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژه راست این ماتریس‌ها را تعریف می‌کنیم. همچنین پس از تعریف تشابه دو ماتریس، روابط بین طیف، چندجمله‌ای مینیمال، و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژه راست دو ماتریس مشابه را بررسی می‌کنیم. در گام بعد، به تعریف نیم‌گروه‌های ماتریسی و  $F$ -جبرهای تولیدشده توسط نیم‌گروه‌ها می‌پردازیم. سپس، مفاهیم تحویل‌ناپذیری، تحویل‌ناپذیری مطلق، و مثلثی‌پذیری برای خانواده‌های ماتریس‌ها در  $M_n(D)$  را بیان و روابط بین آنها را بررسی می‌کنیم. در پایان این بخش، طیف ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در  $M_n(D)$ ، و به طور خاص ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{H})$ ، را مشخص می‌کنیم.

**تعریف ۱.۵.** فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد و  $T \in \mathcal{L}(D^n)$ . به اسکالر  $\lambda \in D$  یک مقدار ویژه راست  $T$ <sup>۱۳</sup> گوئیم هرگاه یک بردار  $u \in D^n \setminus \{0\}$  موجود باشد به طوری که  $Tu = u\lambda$ . به بردار  $u$ ، یک بردار ویژه راست<sup>۱۴</sup> متناظر به مقدار ویژه راست  $\lambda$  گفته می‌شود. به طور مشابه، اسکالر  $\lambda \in D$  را یک مقدار ویژه راست برای ماتریس  $A \in M_n(D)$  گوئیم هرگاه  $\lambda \in D$  یک مقدار ویژه راست  $T_A \in \mathcal{L}(D^n)$  باشد، که در آن  $T_A$  تبدیل خطی القاشده توسط ماتریس  $A \in M_n(D)$  است. مجموعه همه مقادیر ویژه راست  $A \in M_n(D)$  با  $\sigma(A)$  نشان داده می‌شود و طیف<sup>۱۵</sup>  $A$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۵.** چندجمله‌ای مینیمال<sup>۱۶</sup> با ضرایب حقیقی ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  را با  $p^{(A)}$  نمایش می‌دهیم، یعنی  $p^{(A)} \in \mathbb{R}[x]$  چندجمله‌ای تکین یگانه با ضرایب حقیقی و با کم‌ترین درجه است که  $p^{(A)}(A) = 0$ .

<sup>13</sup>Right eigenvalue of  $T$

<sup>14</sup>Right eigenvector

<sup>15</sup>Spectrum

<sup>16</sup>Minimal polynomial

تعریف ۳.۵. فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{H})$  و  $p^{(A)} = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$  که در آن  $p_j$ ها چندجمله‌ای‌های تکین تحویل‌ناپذیر با ضرایب حقیقی و متمایز هستند. به ازای هر  $1 \leq j \leq k$ ، زیرفضای ریشه‌ای<sup>۱۷</sup>  $A$  را با  $M_j$  نشان می‌دهیم که به صورت

$$M_j := \ker p_j(A)^{m_j} = \{ u \in \mathbb{H}^n : p_j(A)^{m_j} u = 0 \}$$

تعریف می‌شود. به روشنی هر مقدار ویژه راست  $A$  ریشه‌ی یکی از این  $p_j$ هاست. چندگانگی جبری<sup>۱۸</sup>  $\lambda$  در  $\sigma(A)$ ، بعد زیرفضای ریشه‌ای متناظر به عامل تحویل‌ناپذیری است که  $\lambda$  ریشه آن است. چندگانگی هندسی<sup>۱۹</sup>  $\lambda \in \sigma(A)$ ، بعد فضای کواترنیونی تولیدشده توسط مجموعه (در واقع فضای حقیقی)  $\{X \in \mathbb{H}^n : AX = X\lambda\}$  تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq M_n(D)$ . خانواده  $\mathcal{A}$  را مشابه با خانواده  $\mathcal{B}$  از ماتریس‌ها در  $M_n(D)$  گوئیم، و با  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  نمایش می‌دهیم، هرگاه یک ماتریس وارون‌پذیر  $P \in M_n(D)$  موجود باشد به طوری که

$$\mathcal{A} = P^{-1}\mathcal{B}P = \{P^{-1}BP : B \in \mathcal{B}\}.$$

به طور طبیعی، گوئیم ماتریس  $A \in M_n(D)$  مشابه با ماتریس  $B \in M_n(D)$  است، و می‌نویسیم  $A \sim B$ ، هرگاه  $\{A\} \sim \{B\}$ . به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه تشابه خانواده‌های ماتریس‌ها، یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه توانی  $M_n(D)$  است؛ و به طور مشابه، رابطه تشابه ماتریس‌ها در  $M_n(D)$ ، یک رابطه هم‌ارزی روی  $M_n(D)$  است.

در لم زیر نشان می‌دهیم طیف یک ماتریس در  $M_n(\mathbb{H})$  تحت تشابه کواترنیون‌ها بسته است. همچنین، دو ماتریس مشابه، دارای طیف‌های مساوی هستند و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژه راست یکسان آنها برابرند.

<sup>17</sup>Root subspace

<sup>18</sup>Algebraic multiplicity

<sup>19</sup>Geometric multiplicity

لم ۵.۵. فرض کنید  $A, B \in M_n(\mathbb{H})$ . در این صورت احکام زیر برقرارند.

(۱) اگر  $\lambda \in \sigma(A)$ ، آنگاه مدار تشابهی  $\lambda$  هم در  $\sigma(A)$  قرار می‌گیرد.

(۲) اگر  $A \sim B$ ، آنگاه  $\sigma(A) = \sigma(B)$ .

(۳) اگر  $A \sim B$ ، آنگاه چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژه راست یکسان آنها برابرند.

اثبات. (۱) فرض کنید  $\lambda \in \sigma(A)$ . اگر یک بردار ویژه راست  $u \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$  متناظر به مقدار ویژه راست  $\lambda$  را در نظر بگیریم، آنگاه به ازای هر  $\alpha \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  داریم

$$A(u\alpha) = u\alpha(\alpha^{-1}\lambda\alpha).$$

بنابراین  $u\alpha$  یک بردار ویژه راست  $A$  متناظر به مقدار ویژه راست  $\alpha^{-1}\lambda\alpha$  است. از این رو، مدارهای مقادیر ویژه راست  $A$  نیز در طیف  $A$  قرار می‌گیرند.

(۲) ابتدا از آنجا که  $A \sim B$ ، پس  $P \in GL_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که  $A = PBP^{-1}$ . حال

فرض کنید  $\lambda \in \sigma(A)$ . پس  $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$  موجود است که  $Ax = x\lambda$ . پس

$$PBP^{-1}x = x\lambda.$$

در نتیجه،  $BP^{-1}x = P^{-1}x\lambda$  و  $P^{-1}x \neq 0$ . پس  $\lambda \in \sigma(B)$ . به همین صورت، اگر  $\lambda \in \sigma(B)$ ، آنگاه  $\lambda \in \sigma(A)$ .

(۳) از آنجا که  $A \sim B$ ، یک  $Q \in GL_n(\mathbb{H})$  موجود است که  $Q^{-1}AQ = B$ . اگر  $f$  یک

چندجمله‌ای دلخواه با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه

$$f(B) = Q^{-1}f(A)Q.$$

بنابراین  $A$  و  $B$  دارای چندجمله‌ای‌های مینیمال یکسانی، مانند  $p = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ ، هستند. همچنین،

اگر  $\mathcal{M}_j := \ker p_j(A)^{m_j}$  زیرفضای ریشه‌ای  $A$  متناظر به مقدار ویژه راست دلخواه  $\lambda \in \sigma(A)$

$\sigma(B)$  باشد، که  $p_j(\lambda) = 0$ ، آنگاه به روشنی می‌توان دید که  $\ker p_j(B)^{m_j} = Q^{-1} \ker p_j(A)^{m_j}$  زیرا

$$Q^{-1} p_j(A)^m j = p_j(B)^m j. \text{ بنابراین،}$$

$$\dim \ker p_j(B)^m j = \dim \ker p_j(A)^m j$$

و لذا چندگانگی جبری  $\sigma(A) = \sigma(B)$  به عنوان یک مقدار ویژه راست هم  $A$  و هم  $B$  یکسان است. این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

**تعریف ۶.۵.** فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $S \subseteq M_n(D)$ . زیرمجموعه  $S$  را یک نیم‌گروه<sup>۲۰</sup> (ضربی) در  $M_n(D)$  گوئیم اگر تحت عمل ضرب ماتریس‌ها بسته باشد. همچنین، زیرمجموعه  $\mathcal{J}$  از  $S$  را یک ایده‌ال<sup>۲۱</sup> (نیم‌گروهی)  $S$  گوئیم اگر به ازای هر  $S \in S$  و  $J \in \mathcal{J}$  داشته باشیم  $SJ \in \mathcal{J}$  و  $JS \in \mathcal{J}$ .

**تعریف ۷.۵.** فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم،  $F$  یک زیرمیدان  $Z(D)$ ، مرکز  $D$ ، و  $\mathcal{A}$  یک زیرحلقه  $M_n(D)$  باشد. حلقه  $\mathcal{A}$  را یک  $F$ -جبر<sup>۲۲</sup> گوئیم اگر نسبت به ضرب اسکالر در اعضای  $F$  بسته باشد. همچنین، نیم‌گروه  $S$  در  $M_n(D)$  را در نظر بگیرید.  $F$ -جبر تولیدشده توسط  $S$ <sup>۲۳</sup> را با  $\text{Alg}_F(S)$  نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in F, S_i \in S, 1 \leq i \leq k \right\}$$

تعریف می‌شود. در واقع،  $\text{Alg}_F(S)$  فضای  $F$ -خطی تولیدشده توسط  $S$ <sup>۲۴</sup> است.

**تعریف ۸.۵.** فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $F$  یک زیرمیدان  $Z(D)$  باشد. ماتریس  $A$  در  $M_n(D)$  را روی  $F$  جبری یا به اختصار  $F$ -جبری گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای مانند  $p \in F[x]$  موجود باشد که  $p(A) = 0$ .

<sup>20</sup>Semigroup

<sup>21</sup>Ideal

<sup>22</sup> $F$ -algebra

<sup>23</sup> $F$ -algebra generated by  $S$

<sup>24</sup> $F$ -linear span of  $S$

تعریف ۹.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد. خانواده  $\mathcal{F}$  از ماتریس‌ها در  $M_n(D)$ ، تحویل‌ناپذیر<sup>۲۵</sup> نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $x \in D^n \setminus \{0\}$

$$\text{Sem}(\mathcal{F})x = \{Ax : A \in \text{Sem}(\mathcal{F})\},$$

فضای برداری راست  $D^n$  را تولید کند، که در آن  $\text{Sem}(\mathcal{F}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^n$  نشانگر نیم‌گروه ضربی تولیدشده توسط  $\mathcal{F}$  است. به بیان دیگر،  $\langle \text{Sem}(\mathcal{F})x \rangle_D = D^n$ .

تعریف ۱۰.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای در  $M_n(D)$  باشد. زیرفضای  $M$  از  $D^n$  تحت  $\mathcal{F}$ <sup>۲۶</sup> پایا نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $m \in M$  و هر  $A \in \mathcal{F}$ ،  $Am \in M$ . به بیان دیگر، اعضای  $\mathcal{F}$  دارای زیرفضای پایای مشترک  $M$  هستند. نیز زیرفضای  $M$  از  $D^n$  را تحت  $A$  پایا گوئیم هرگاه  $M$  تحت  $\{A\}$  پایا باشد. به روشنی،  $\{0\}$  و  $D^n$  زیرفضاهای پایای بدیهی  $M_n(D)$  هستند. مجموعه زیرفضاهای پایا تحت  $\mathcal{F}$  را با  $\text{Lat}(\mathcal{F})$  نمایش می‌دهیم.

مشاهده ۱۱.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد و  $n > 1$ . در این صورت خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(D)$  تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر اعضای  $\mathcal{F}$ ، به عنوان مجموعه‌ای از تبدیلات خطی روی  $D^n$ ، هیچ زیرفضای پایایی به جز زیرفضاهای پایای بدیهی نداشته باشند.

تعریف ۱۲.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد. خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(D)$  تحویل‌پذیر<sup>۲۷</sup> نامیده می‌شود هرگاه تحویل‌ناپذیر نباشد. به طور معادل،  $\mathcal{F} = \{0\}$  یا  $\mathcal{F}$  دارای یک زیرفضای پایای نابدیهی باشد.

تعریف ۱۳.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد. حلقه تقسیم  $E$  را یک توسیع (یا گسترش)  $D$ <sup>۲۸</sup> گوئیم هرگاه  $D \subset E$  و  $Z(D) \subset Z(E)$  که در آن  $Z(D)$  و  $Z(E)$  به ترتیب مرکزهای  $D$  و  $E$  هستند.

تعریف ۱۴.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد. خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(D)$  را به طور مطلق تحویل‌ناپذیر<sup>۲۹</sup> (مطلقاً تحویل‌ناپذیر یا تحویل‌ناپذیر مطلق) گوئیم هرگاه روی همه توسیع‌های  $D$

<sup>25</sup>Irreducible

<sup>26</sup>Invariant under  $\mathcal{F}$

<sup>27</sup>Reducible

<sup>28</sup>Extension of  $D$

<sup>29</sup>Absolutely irreducible

تحویل ناپذیر باشد.

لم ۱۵.۵. فرض کنید  $F$  یک میدان باشد. در این صورت خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(F)$  به طور مطلق تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر  $\text{Alg}_F(\mathcal{F}) = M_n(F)$ .

اثبات. فرض کنید  $\bar{F}$  نشانگر بستار جبری  $F$  باشد. ابتدا فرض کنید  $\mathcal{F}$  به طور مطلق تحویل ناپذیر باشد. پس  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\bar{F})$  تحویل ناپذیر است. از آنجا که  $\bar{F}$  به طور جبری بسته است، پس بنا بر قضیه برنساید [۱۳، قضیه ۲.۲.۱]، داریم

$$\text{Alg}_{\bar{F}}(\mathcal{F}) = \langle \text{Sem}(\mathcal{F}) \rangle_{\bar{F}} = M_n(\bar{F}).$$

در نتیجه مجموعه‌ای مانند

$$\{T_1, \dots, T_n\} \subseteq \text{Sem}(\mathcal{F}) \subseteq M_n(F)$$

موجود است که روی  $\bar{F}$ ، و لذا روی  $F$ ، مستقل خطی است. در نتیجه این مجموعه یک پایه برای  $M_n(F)$  تشکیل می‌دهد، و از این رو  $\text{Alg}_F(\mathcal{F}) = \langle \text{Sem}(\mathcal{F}) \rangle_F = M_n(F)$  است، که حکم را ثابت می‌کند. حکم در جهت عکس بدیهی است. این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

تعریف ۱۶.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای در  $M_n(D)$  باشد. خانواده  $\mathcal{F}$  را مثلثی‌پذیر<sup>۳۰</sup> گوئیم هرگاه زیرفضاهای پایای  $\mathcal{F}$  شامل یک زنجیر ماکسیمال به طول  $n$  در  $D^n$  باشند. در واقع، هر چنین زنجیر ماکسیمال زنجیری از زیرفضاها به صورت

$$\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}_n = D^n$$

است، که در آن هر  $\mathcal{V}_j$ ، یک زیرفضای پایای  $j$ -بعدی  $\mathcal{F}$  است. چنین زنجیری، یک زنجیر مثلثی‌ساز<sup>۳۱</sup>

<sup>30</sup>Triangularizable

<sup>31</sup>Triangularizing chain

از زیرفضاها برای  $\mathcal{F}$  نامیده می‌شود. نیز به آسانی می‌توان دید که خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(D)$  مثلثی‌پذیر است اگر و تنها اگر یک پایه برای  $D^n$  موجود باشد که نسبت به آن اعضای  $\mathcal{F}$  دارای نمایش‌های ماتریسی بالامثلثی هستند. چنین پایه‌ای را یک پایه مثلثی‌ساز<sup>۳۲</sup>  $\mathcal{F}$  گوئیم. همچنین، به زبان ماتریس‌ها، خانواده  $\mathcal{F}$  در  $M_n(D)$  مثلثی‌پذیر است اگر و تنها اگر یک ماتریس وارون‌پذیر  $P \in M_n(D)$  موجود باشد به طوری که  $P^{-1}\mathcal{F}P$  متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است. روشن است که ماتریس  $A \in M_n(D)$  را مثلثی‌پذیر گوئیم هر گاه  $\{A\} \subseteq M_n(D)$  مثلثی‌پذیر باشد.

به یاد آورید فضای خارج قسمتی<sup>۳۳</sup>  $\frac{V}{N}$  که در آن  $V$  یک فضای برداری راست روی حلقه تقسیم  $D$  و  $N$  یک زیرفضا از  $V$  است به صورت  $\frac{V}{N} = \{[x] = x + N : x \in V\}$  تعریف می‌شود که با جمع و ضرب اسکالر (خوش‌تعریف)

$$[x] + [y] := [x + y], [x]\lambda := [x\lambda], (x \in V, \lambda \in D)$$

تشکیل یک فضای برداری روی  $D$  می‌دهد. به روشنی، هر زیرفضای  $Q \leq \frac{V}{N}$  به صورت  $Q = \frac{\mathcal{K}}{N}$  است، که در آن  $\mathcal{K} \leq V$  و  $N \subsetneq \mathcal{K}$ ؛ در واقع  $\mathcal{K} = \{k \in V : k + N \in Q\}$ . فرض کنید  $T \in \mathcal{L}(V)$  و  $N$  یک زیرفضای پایای  $T$  باشد. عملگر خطی (خارج قسمتی)  $T \frac{V}{N}$  روی  $\frac{V}{N}$  با دستور (خوش‌تعریف)

$$T \frac{V}{N}(x + N) = T(x) + N, (x \in V)$$

تعریف می‌شود. همچنین، یادآوری می‌کنیم ویژگی  $\mathcal{P}$  از خانواده‌های تبدیلات خطی را گوئیم با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد هر گاه اگر  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$  دارای خاصیت  $\mathcal{P}$  باشد، آنگاه به ازای هر  $M, N \in \text{Lat}(\mathcal{F})$  که  $M \subseteq N$ ، خانواده خارج قسمتی

$$\mathcal{F} \frac{N}{M} := \left\{ T \frac{N}{M} \in \mathcal{L}(N/M) : T \in \mathcal{F} \right\}$$

<sup>32</sup>Triangularizing basis

<sup>33</sup>Quotient space

نیز دارای ویژگی  $\mathcal{P}$  باشد.

گزاره زیر معروف به لم مثلثی‌سازی نتیجه‌ای سراسر است از مشاهدات بدیهی زیر است. اگر  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$  و  $M, N \in \text{Lat}(\mathcal{F})$  و  $M \subseteq N$ ، آنگاه  $Q \in \text{Lat}\left(\mathcal{F} \frac{N}{M}\right)$  اگر و تنها اگر  $Q = \frac{\mathcal{K}_Q}{M}$ ، که در آن  $\mathcal{K}_Q = \{n \in N : n + M \in Q\}$ ، و به روشنی  $\mathcal{K}_Q \in \text{Lat}(\mathcal{F})$  و  $M \subseteq \mathcal{K}_Q \subseteq N$ . به ویژه،  $Q \in \text{Lat}\left(\mathcal{F} \frac{N}{M}\right)$  نابدیهی است اگر و تنها اگر  $Q = \frac{\mathcal{K}_Q}{M}$ ، که در آن  $\mathcal{K}_Q = \{n \in N : n + M \in Q\}$ ، و به علاوه  $\mathcal{K}_Q \in \text{Lat}(\mathcal{F})$  و  $M \subsetneq \mathcal{K}_Q \subsetneq N$ .

لم ۱۷.۵. (مثلثی‌سازی) فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $\mathcal{P}$  یک ویژگی خانواده‌های تبدیلات خطی روی فضاهاى متناهی بعد روی حلقه تقسیم  $D$  باشد که با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. اگر هر خانواده از تبدیلات خطی دارای خاصیت  $\mathcal{P}$  روی یک فضای متناهی بعد با بعد بیشتر از واحد تحویل پذیر باشد، آنگاه هر خانواده از تبدیلات خطی دارای ویژگی  $\mathcal{P}$  مثلثی پذیر است.

اثبات. برهان که در واقع بازنویسی برهان [۱۳، لم ۴.۱۰۱] در چارچوب فضاهاى برداری روی حلقه‌های تقسیم است را از باب کامل بودن ارائه مطلب می‌آوریم. فرض کنید  $V$  یک فضای برداری راست (یا چپ) با بعد  $n > 1$  روی حلقه تقسیم  $D$  و خانواده  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(V)$  دارای خاصیت  $\mathcal{P}$  باشد. فرض کنید

$$\{0\} = M_0 \leq \dots \leq M_k = V,$$

که در آن  $k \in \mathbb{N}$  و  $k \leq n$ ، یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای پایایی (متمايز)  $\mathcal{F}$  باشد. با نشان دادن اینکه  $k = n$ ، و در نتیجه  $\dim \frac{M_i}{M_{i-1}} = 1$  به ازای هر  $1 \leq i \leq k = n$ ، حکم را ثابت می‌کنیم. به برهان خلف، فرض کنید  $k < n$ ، و لذا یک  $1 \leq i \leq k$  موجود است به طوری که  $\dim \frac{M_i}{M_{i-1}} > 1$ . ولی از فرض نتیجه می‌شود که

$$\frac{\mathcal{F} M_i}{M_{i-1}} := \left\{ T \frac{M_i}{M_{i-1}} \in \mathcal{L}(M_i/M_{i-1}) : T \in \mathcal{F} \right\}$$

تحویل‌پذیر است زیرا دارای خاصیت  $\mathcal{P}$  است و  $\dim \frac{M_i}{M_{i-1}} > 1$ . بنابراین، خانواده خارج قسمتی



$\mathcal{F}$  دارای یک زیرفضای پایای نابدیهی  $\mathcal{K} = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}_{i-1}}$  به ازای یک  $\mathcal{K} \in \text{Lat}(\mathcal{F})$  است، که  $\mathcal{M}_{i-1} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{M}_i$  این امر به روشنی ایجاب می‌کند که

$$\{0\} = \mathcal{M}_0 \leq \dots \leq \mathcal{M}_k = V$$

زنجیری ماکسیمال از زیرفضاهای پایای (متمایز)  $\mathcal{F}$  نیست، که با فرض در تناقض است. در نتیجه  $k = n$ ، و این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

نتیجه‌ای سراسر از لم مثلثی‌سازی گزاره زیر است.

**قضیه ۱۸.۵.** فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $D$  یک حلقه تقسیم، و  $Z(D)$  مرکز  $D$  باشد. در این صورت  
(i) هر ماتریس در  $M_n(D)$  با این ویژگی که دارای چندجمله‌ای مینیمال با ضرایب در  $Z(D)$  است که به عوامل خطی روی مرکز  $D$  تجزیه می‌شود مثلثی‌پذیر است.  
(ii) هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر با طیف در  $Z(D)$  مثلثی‌پذیر است.

**اثبات.** (i) به روشنی این ویژگی که یک تبدیل خطی دارای چندجمله‌ای مینیمال با ضرایب در  $Z(D)$  است که به عوامل خطی روی مرکز  $D$  تجزیه می‌شود با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. در نتیجه، با توجه به لم مثلثی‌سازی کافی است ثابت کنیم که به ازای هر  $n > 1$ ، هر چنین ماتریسی در  $M_n(D)$  به عنوان یک تبدیل خطی تحویل‌پذیر است. اما این مطلب بدیهی است زیرا هر چنین ماتریسی دارای یک مقدار ویژه در مرکز  $D$  است و فضای ویژه متناظر به هر چنین مقدار ویژه‌ای زیرفضایی پایا و نابدیهی برای ماتریس در نظر گرفته شده است.

(ii) برهان، که استاندارد است، مشابه برهان (i) است. به روشنی این ویژگی که یک گردایه از تبدیلات خطی جابه‌جایی بوده و متشکل از تبدیلاتی خطی بوده که دارای چندجمله‌ای‌های مینیمال با ضرایب در  $Z(D)$  هستند که به عوامل خطی روی مرکز  $D$  تجزیه می‌شوند با گذر به خارج قسمت به ارث می‌رسد. در نتیجه، با توجه به لم مثلثی‌سازی کافی است ثابت کنیم که به ازای هر  $n > 1$ ، هر چنین گردایه‌ای از ماتریس‌ها به عنوان گردایه‌ای از تبدیلات خطی تحویل‌پذیر است. اما این مطلب بدیهی است زیرا هر چنین گردایه‌ای یا متشکل از ماتریس‌های اسکالر است، که به روشنی تحویل‌پذیر است، یا شامل ماتریسی غیر اسکالر است که دارای یک مقدار ویژه در مرکز  $D$  است. در این صورت فضای ویژه متناظر

به هر چنین مقدار ویژه‌ای زیرفضایی پایا و نابديهی برای گردایه در نظر گرفته شده است. این برهان را  $\square$  کامل می‌کند.

شایان گفتن است که، به ازای یک حلقه تقسیم کلی و ناجابه‌جایی  $D$ ، به طور کلی معیاری برای اینکه یک ماتریس داده شده در  $M_n(D)$  مثلثی‌پذیر یا تحویل‌پذیر باشد وجود ندارد. همچنین اینکه آیا هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در  $M_n(D)$  مثلثی‌پذیر است مسأله‌ای باز است. البته، به ازای یک میدان کلی  $F$  یک ماتریس داده شده در  $M_n(F)$  به ترتیب مثلثی‌پذیر، تحویل‌پذیر، ابرتحویل‌پذیر است اگر و تنها اگر به ترتیب چندجمله‌ای مینمالش به عوامل خطی روی  $F$  تجزیه شود، چندجمله‌ای مشخصه‌اش تحویل‌پذیر باشد، چندجمله‌ای مینمالش تحویل‌پذیر باشد؛ به [۱۸]، لم‌های ۱۰۱.۱ و ۲۰.۲.۲ رجوع کنید. یادآور می‌شویم که یک ماتریس در  $M_n(F)$  را ابرتحویل‌پذیر<sup>۳۴</sup> گوئیم هرگاه مرکزسازش<sup>۳۵</sup> در  $M_n(F)$  تحویل‌پذیر باشد.

قضیه زیر طیف ماتریس‌های مثلثی‌پذیر در  $M_n(D)$  که روی  $Z(D)$  جبری هستند را به طوری طبیعی بر حسب درایه‌های قطری هر فرم مثلثی‌شده ماتریس توصیف می‌کند.

قضیه ۱۹.۵. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم و  $A \in M_n(D)$  مثلثی‌پذیر بوده و همچنین روی  $Z(D)$  جبری باشد. در این صورت

$$\sigma(A) = \{\alpha^{-1}\beta\alpha : \alpha \in D \setminus \{0\}, \beta \in D(B)\} = \text{Sim}(D(B)),$$

که در آن  $B$  هر ماتریس بالامثلثی‌ای است که با  $A$  مشابه است و  $D(B)$  مجموعه درایه‌های روی قطری اصلی ماتریس  $B$  است.

اثبات. فرض کنید  $A \sim B$ ، که در آن  $B = (b_{ij}) \in M_n(D)$  یک ماتریس بالامثلثی است. نخست ثابت می‌کنیم  $\text{Sim}(D(B)) \subseteq \sigma(A)$ . با توجه به لم ۵.۵، کافی است ثابت کنیم  $b_{ii} \in \sigma(B) = \sigma(A)$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ . این حکم را با استقرا روی  $n \in \mathbb{N}$  ثابت می‌کنیم. حکم به ازای  $n = 1$  بدیهی است. حکم را برای ماتریس‌های بالامثلثی با اندازه کمتر از  $n \in \mathbb{N}$  فرض کرده، آن را برای ماتریس‌های

<sup>34</sup>Hyperreducible

<sup>35</sup>Centralizer

با اندازه  $n \in \mathbb{N}$  ثابت می‌کنیم. قرار دهید  $B_1 = (b_{ij}) \in M_{n-1}(D)$ . در نتیجه  $B = \begin{bmatrix} B_1 & b^t \\ \circ & b_{nn} \end{bmatrix}$  که در آن  $b = (b_{1n}, \dots, b_{n-1n}) \in D_{n-1}$  و  $\circ = (\circ, \dots, \circ) \in D_{n-1}$ . اکنون با توجه به اینکه  $\sigma(B_1) \subseteq \sigma(B)$  و با توجه به فرض استقرا، تنها کافی است ثابت کنیم  $b_{nn} \in \sigma(B)$ . برای این منظور از آنجا که بنا به فرض استقرا  $b_{ii} \in \sigma(B_1)$  و لذا به لم ۵.۵،  $\text{Sim}(b_{ii}) \subseteq \sigma(B_1) \subseteq \sigma(B)$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n-1$ ، می‌توان فرض کرد که  $b_{nn} \notin \text{Sim}(D(B_1))$ . فرض کنید  $p \in F[x]$ ، که در آن  $F$  نشانگر مرکز حلقه تقسیم  $D$  است، چندجمله‌ای مینیمال  $b_{nn}$  باشد. در نتیجه از قضیه دکسون<sup>۳۶</sup> [۸]، صفحه ۱۰۳] درمی‌یابیم که  $p(B_1)$  وارون‌پذیر است. بنابراین از [۵]، لم ۲.۲.۸] نتیجه می‌گیریم که یک عضو یگانه  $x_1 \in D^{n-1}$  موجود است به طوری که  $B_1 x_1 - x_1 b_{nn} = -b^t$  زیرا  $p(b_{nn}) = \circ$  ولی  $p(B_1)$  وارون‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر قرار دهیم  $x^t = (x_1^t, 1) \in D_n$ ، آنگاه

$$Bx = \begin{bmatrix} B_1 & b^t \\ \circ & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} b_{nn} = x b_{nn},$$

و لذا  $b_{nn} \in \sigma(B)$ ، که همان حکم مطلوب نظر ماست. برای اتمام برهان، می‌ماند نشان دهیم  $\sigma(A) = \sigma(B) \subseteq \text{Sim}(D(B))$ . برای این منظور فرض کنید  $\lambda \in \sigma(B)$  عضو دلخواه باشد. در نتیجه

یک  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D^n \setminus \{0\}$  موجود است به طوری که  $Bx = x\lambda$ . اگر  $x_n \neq \circ$ ، خواهیم داشت

و از آنجا  $\lambda = x_n^{-1} b_{nn} x_n \in \text{Sim}(D(B))$  و اگر  $x_n = \circ$ ، عدد  $1 \leq i < n$  را بزرگترین اندیسی اختیار کنید که  $x_i \neq \circ$  ولی  $x_j = \circ$  به ازای هر  $i < j \leq n$ . اکنون استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد  $b_{ii} x_i = x_i \lambda$  و لذا  $\lambda = x_i^{-1} b_{ii} x_i \in \text{Sim}(D(B))$ . در نتیجه  $\sigma(B) \subseteq \text{Sim}(D(B))$ ، که برهان را کامل می‌کند.  $\square$

۶. نمایش‌های ماتریسی حقیقی و مختلط کواترنیون‌ها

<sup>36</sup>L.E. Dickson's theorem

نخست نمایش استاندارد  $\mathbb{C}$ ، میدان اعداد مختلط، در  $M_2(\mathbb{R})$  را یادآور می‌شویم. به طور مرسوم، میدان اعداد مختلط را از طریق نشانده<sup>۳۷</sup>

$$\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \varepsilon(a + bi) := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

می‌توان به عنوان یک زیرمجموعه<sup>۳۷</sup>  $M_2(\mathbb{R})$  در نظر گرفت. این نمایش، نمایش استاندارد اعداد مختلط بر حسب ماتریس‌های  $2 \times 2$  با درایه‌های حقیقی نامیده می‌شود. همچنین،  $\mathbb{H}$ ، حلقه تقسیم کواترنیون‌ها، را از طریق نشانده‌های

$$\varepsilon' : \mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \varepsilon'(z + wj) := \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$$

و

$$\varepsilon'' : \mathbb{H} \rightarrow M_4(\mathbb{R}), \varepsilon''(a + bi + cj + dk) := \begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{bmatrix},$$

می‌توان، به ترتیب، به عنوان یک زیرمجموعه<sup>۳۷</sup>  $M_2(\mathbb{C})$  و  $M_4(\mathbb{R})$  در نظر گرفت. این نمایش‌ها را نمایش‌های استاندارد  $\mathbb{H}$ ، به ترتیب، در  $M_2(\mathbb{C})$  و  $M_4(\mathbb{R})$  می‌نامیم. سپس به طور طبیعی، از طریق نشانده<sup>۳۷</sup>

$$\varepsilon_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R}), \varepsilon_n([z_{i,j}]_{i,j=1}^n) := [\varepsilon(z_{i,j})]_{i,j=1}^n,$$

جبر حقیقی  $M_n(\mathbb{C})$  را می‌توان به عنوان یک زیرمجموعه<sup>۳۷</sup>  $M_{2n}(\mathbb{R})$  در نظر گرفت. همچنین، به طور

---

<sup>37</sup>Embedding

مشابه، از طریق نشاننده‌های

$$\varepsilon'_n : M_n(\mathbb{H}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{C}), \quad \varepsilon'_n([q_{i,j}]_{i,j=1}^n) := [\varepsilon'(q_{i,j})]_{i,j=1}^n,$$

و

$$\varepsilon''_n : M_n(\mathbb{H}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R}), \quad \varepsilon''_n([q_{i,j}]_{i,j=1}^n) := [\varepsilon''(q_{i,j})]_{i,j=1}^n,$$

جبر حقیقی  $M_n(\mathbb{H})$  را می‌توان، به ترتیب، به عنوان یک زیرمجموعه  $M_{2n}(\mathbb{C})$  و  $M_{2n}(\mathbb{R})$  در نظر گرفت. از این پس، وقتی می‌نویسیم  $M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{R})$ ، منظور ما  $M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{R})$  است. همچنین وقتی می‌نویسیم  $M_n(\mathbb{H}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{R})$ ، منظور ما  $M_n(\mathbb{H}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{R})$  است. در بقیه موارد هم به طور مشابه عمل می‌کنیم. اغلب، در صورتی که ابهامی وجود نداشته باشد، برای راحتی نمادهای  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon'$  و  $\varepsilon''$  را، به ترتیب، به جای نمادهای  $\varepsilon_n$ ،  $\varepsilon'_n$  و  $\varepsilon''_n$  به کار می‌بریم. به عنوان مشاهده‌ای ساده، به ازای هر  $A \in M_n(\mathbb{H})$ ، ماتریس‌های

$$A \in M_n(\mathbb{H}), \quad \varepsilon'_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{C}), \quad \varepsilon''_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{R}),$$

دارای چند جمله‌ای‌های مینیمال با ضرایب حقیقی یکسانی هستند. برخی از ویژگی‌های نشاننده‌های فوق در [۱۴، صفحات ۳۳ تا ۳۷] آمده است.

دو گزاره زیر حکم می‌کنند که  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon'$  و  $\varepsilon''$ ، و همچنین  $\varepsilon_n$ ،  $\varepsilon'_n$  و  $\varepsilon''_n$ ، نمایش‌هایی تحویل‌ناپذیر هستند.

قضیه ۱.۶. نشاننده‌های  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon'$  و  $\varepsilon''$  که، به ترتیب، نمایش‌های  $\mathbb{C}$ ،  $\mathbb{H}$  و  $\mathbb{H}$  در  $M_2(\mathbb{C})$ ،  $M_2(\mathbb{R})$  و  $M_2(\mathbb{R})$  هستند را در نظر بگیرید. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(i) نشاننده  $\varepsilon$  یک نمایش تحویل‌ناپذیر از  $\mathbb{C}$  در  $M_2(\mathbb{R})$  است. به عبارت دیگر،  $\varepsilon(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{R})$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر است.

(ii) نشاننده  $\varepsilon'$  یک نمایش تحویل‌ناپذیر از  $\mathbb{H}$  در  $M_2(\mathbb{C})$  است. به عبارت دیگر،  $\varepsilon'(\mathbb{H}) \subset M_2(\mathbb{C})$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر است.

(iii) نشاننده  $\varepsilon''$  یک نمایش تحویل‌ناپذیر از  $\mathbb{H}$  در  $M_2(\mathbb{R})$  است. به عبارت دیگر،  $\varepsilon''(\mathbb{H}) \subset M_2(\mathbb{R})$

$M_4(\mathbb{R})$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. (i) ماتریس  $\varepsilon(i)$  در  $M_4(\mathbb{R})$  تحویل‌ناپذیر است زیرا فاقد مقدار ویژه حقیقی است. پس حکم برقرار است.

(ii) برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که مجموعه  $\{\varepsilon'(1), \varepsilon'(i), \varepsilon'(j), \varepsilon'(k)\}$  روی  $\mathbb{C}$  مستقل خطی است. برای این منظور، فرض کنید  $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{C}$  و

$$\alpha_1 \varepsilon'(1) + \alpha_2 \varepsilon'(i) + \alpha_3 \varepsilon'(j) + \alpha_4 \varepsilon'(k) = 0.$$

به دست می‌آوریم  $\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$ ،  $\alpha_1 - i\alpha_2 = 0$ ،  $\alpha_3 + i\alpha_4 = 0$  و  $-\alpha_3 + i\alpha_4 = 0$ . در نتیجه،  $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = 0$ . پس  $\varepsilon'(\mathbb{H}) \subset M_4(\mathbb{C})$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر است.

(iii) کافی است نشان دهیم  $\varepsilon''(\mathbb{H})x_0 = \mathbb{R}^4$  به ازای هر  $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . برای این منظور، نخست توجه کنید که  $\mathcal{B} = \{\varepsilon''(1), \varepsilon''(i), \varepsilon''(j), \varepsilon''(k)\}$  یک پایه برای  $\varepsilon''(\mathbb{H})$  به عنوان  $\mathbb{R}$ -جبر در  $M_4(\mathbb{R})$  است. حال، عضو  $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  را دلخواه اختیار کرده و بگیرید  $\mathcal{B}_1 = \{\varepsilon''(1)x_0, \varepsilon''(i)x_0, \varepsilon''(j)x_0, \varepsilon''(k)x_0\}$ . برای اثبات حکم کافی است که نشان دهیم  $\mathcal{B}_1$  یک پایه برای  $\mathbb{R}^4$  است. برای این منظور، نشان می‌دهیم  $\mathcal{B}_1$  در  $\mathbb{R}^4$  مستقل خطی است. فرض کنید  $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  به طوری که

$$\alpha_1 \varepsilon''(1)x_0 + \alpha_2 \varepsilon''(i)x_0 + \alpha_3 \varepsilon''(j)x_0 + \alpha_4 \varepsilon''(k)x_0 = 0.$$

سپس داریم

$$\varepsilon''(\alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k)x_0 = (\alpha_1 \varepsilon''(1) + \alpha_2 \varepsilon''(i) + \alpha_3 \varepsilon''(j) + \alpha_4 \varepsilon''(k))x_0 = 0.$$

اما از آنجا که هر عضو ناصفر در  $\mathbb{H}$ ، و لذا در  $\varepsilon''(\mathbb{H})$ ، وارون‌پذیر است و  $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ، به روشنی، درمی‌یابیم  $\varepsilon''(\alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k) = 0$  و از آنجا  $\alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k = 0$ . در نتیجه  $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = 0$ . بنابراین،  $\varepsilon''(\mathbb{H})x_0 = \mathbb{R}^4$ . پس  $\varepsilon''(\mathbb{H}) \subset M_4(\mathbb{R})$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر است.  $\square$

مشابه با قضیه بالا، نتیجه زیر برقرار است.

نتیجه ۲.۶. فرض کنید  $n > 1$ . در این صورت  $M_n(\mathbb{C})$  و  $M_n(\mathbb{H})$  به ترتیب  $\mathbb{R}$ -جبرهای تحویل‌ناپذیر در  $M_{2n}(\mathbb{R})$ ،  $M_{2n}(\mathbb{C})$  و  $M_{4n}(\mathbb{R})$  هستند.

اثبات. اینکه  $M_n(\mathbb{C})$  و  $M_n(\mathbb{H})$  به ترتیب در  $M_{2n}(\mathbb{R})$  و  $M_{4n}(\mathbb{R})$  تحویل‌ناپذیر هستند از برهان حکمی مشابه در [۱۸، صفحه ۴۹] نتیجه می‌شود. اینکه  $M_n(\mathbb{H})$  در  $M_{2n}(\mathbb{C})$  تحویل‌ناپذیر است مشابه بخش دوم قضیه قبل ثابت می‌شود؛ به طور دقیق‌تر، با نشان دادن اینکه  $M_n(\mathbb{H})$  شامل  $4n^2$  ماتریس مستقل خطی روی  $\mathbb{C}$  است.  $\square$

## ۷. روایت‌های حقیقی قضیه برنساید

ویلیام برنساید در [۴، صفحه ۴۳۳]، قضیه‌ای ثابت کرد که حکم می‌کند یک گروه از ماتریس‌های مختلط تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر این گروه شامل یک پایه فضای برداری برای  $M_n(\mathbb{C})$  باشد. در واقع معیار بالا برای نیم‌گروه‌های ماتریس‌های مختلط نیز برقرار است. این روایت موسوم به قضیه برنساید<sup>۳۸</sup> است، که البته همزادی بر حسب جبرهای ماتریسی به صورت زیر دارد. فرض کنید  $F$  یک میدان بسته جبری باشد. در این صورت تنها زیرجبر تحویل‌ناپذیر  $M_n(F)$  خودش است. در این بخش، گزاره‌ای از نوع قضیه برنساید، یا توصیفی از زیرجبرهای حقیقی تحویل‌ناپذیر  $M_n(\mathbb{F})$  ارائه می‌دهیم.

ابتدا قضیه‌ای از نوع قضیه ودربرن-آرتین<sup>۳۹</sup> را بیان می‌کنیم که در ادامه به آن نیاز داریم و در [۱۶، قضیه ۲.۲] ثابت شده است.

قضیه ۱.۷. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $D$  یک حلقه تقسیم،  $F$  یک زیرمیدان مرکز  $D$ ، و  $\mathcal{A}$  یک  $F$ -جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌های  $F$ -جبری در  $M_n(D)$  باشد. فرض کنید  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در بین رتبه‌های اعضای ناصفر  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت  $n$  بر  $r$  بخش‌پذیر است و  $\mathcal{A}$  مشابه با  $M_{\frac{n}{r}}(\Delta)$  است، که در آن  $\Delta$  یک  $F$ -جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌های  $F$ -جبری در  $M_r(D)$  است. به

<sup>38</sup>Burnside's theorem

<sup>39</sup>Wedderburn-Artin type theorem

ویژه،  $\mathcal{A}$  مشابه با  $M_n(\Delta_1)$  است، که در آن  $\Delta_1$  یک زیرحلقه تقسیم  $F$ -جبری از  $D$  است، اگر و تنها اگر  $r = 1$ .

قضیه زیر توصیفی از زیرجبرهای حقیقی  $M_n(\mathbb{R})$ ،  $M_n(\mathbb{C})$ ، و  $M_n(\mathbb{H})$  به دست می‌دهد. بخش (i) قضیه زیر استاندارد است. برای نمونه، به [۱۰، قضیه ۶] و [۱۱، صفحه ۴۱۵] رجوع کنید. بخش (ii) هر چند که استاندارد است ولی تا جایی که اطلاع داریم در هیچ جایی آورده نشده است. بخش (iii)، که حالت خاصی از [۱۰، قضیه ۱۰] است، از بامداد یاحقی است ولی برای نخستین بار در [۱۰] آمده است.

**قضیه ۲.۷.** (i) فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\mathcal{A}$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{R})$ ، و  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت  $r$ ، که  $n$  را عاد می‌کند، دارای یکی از سه مقدار ۱، ۲، یا ۴ است، و به علاوه  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$ ، یا  $\mathcal{A} \sim M_n^{\frac{r}{2}}(\mathbb{C})$ ، یا  $\mathcal{A} \sim M_n^{\frac{r}{4}}(\mathbb{H})$  بر حسب اینکه، به ترتیب،  $r = 1$ ،  $r = 2$ ، یا  $r = 4$  باشد. به ویژه،  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$  اگر و تنها اگر  $r = 1$ .

(ii) فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\mathcal{A}$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{C})$ ، و  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت عدد صحیح  $r$ ، که  $n$  را عاد می‌کند، دارای یکی از دو مقدار ۱ یا ۲ است، و به علاوه  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$  یا  $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{R})$  هرگاه  $r = 1$ ، و  $\mathcal{A} \sim M_n^{\frac{r}{2}}(\mathbb{H})$  هرگاه  $r = 2$ .

(iii) فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\mathcal{A}$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{H})$ ، و  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت  $r = 1$  و  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{H})$ ، یا  $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{C})$ ، یا  $\mathcal{A} \sim M_n(\mathbb{R})$ .

**اثبات.** (i) بنا بر قضیه ۱.۷،  $\mathcal{A}$  با  $M_n^{\frac{r}{2}}(\Delta)$  مشابه است، که در آن  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  و  $\Delta$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_r(\mathbb{R})$  است. بنا بر قضیه فروبنیوس<sup>۴۰</sup>، [۹، قضیه ۱۲.۱۳.۵]،  $\Delta \cong \mathbb{H}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{C}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{R}$ . اما  $r = \dim_{\mathbb{R}} \Delta$  زیرا  $\Delta$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر در  $M_r(\mathbb{R})$  است. در نتیجه مقدار  $r$ ، ۱ یا ۲ یا ۴ است. اگر  $r = 1$ ، آنگاه  $\Delta \cong \mathbb{R}$ ، که در این حالت حکم از قضیه ۱.۷ نتیجه می‌شود. در دو حالت دیگر، از قضیه اسکولم-نوتر<sup>۴۱</sup>،

<sup>40</sup>Frobenius' theorem

<sup>41</sup>Skolem-Noether theorem



[۷، صفحه ۳۹]، درمی‌یابیم  $\mathbb{C} \subseteq M_2(\mathbb{R}) \sim \Delta$  هر گاه  $r = 2$ ، یا  $\mathbb{H} \subseteq M_4(\mathbb{R}) \sim \Delta$  هر گاه  $r = 4$ . حال به روشنی، حکم از قضیه ۱.۷ نتیجه می‌شود.

(ii) بنا بر قضیه ۱.۷،  $\mathcal{A}$  با  $M_{\mathbb{F}}^n(\Delta)$  مشابه است، که در آن  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  و  $\Delta$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_r(\mathbb{C})$  است. بنا بر قضیه فروبنیوس،  $\Delta \cong \mathbb{H}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{C}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{R}$  اگر  $\Delta \cong \mathbb{C}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{R}$ ، آنگاه از قضیه اسکولم-نوتر به دست می‌آوریم  $\mathbb{R} \setminus M_r(\mathbb{C}) \sim \Delta$  هر گاه  $\Delta \cong \mathbb{R}$ ، یا  $\mathbb{C} \setminus M_r(\mathbb{C}) \sim \Delta$  هر گاه  $\Delta \cong \mathbb{C}$ ، که در هر دو حالت نتیجه می‌شود  $r = 1$  زیرا  $\Delta$  در  $M_r(\mathbb{C})$  تحویل‌ناپذیر است. اگر  $\Delta \cong \mathbb{H}$ ، آنگاه  $\dim_{\mathbb{R}} \Delta = 4$ . از طرفی،  $\Delta$  یک نیم‌گروه ضربی تحویل‌ناپذیر در  $M_r(\mathbb{C})$  است. در نتیجه، بنا بر قضیه برنساید،  $\Delta$  شامل  $r^2$  عضو مستقل خطی روی  $\mathbb{C}$  است. از این رو،  $\dim_{\mathbb{R}} \Delta \geq r^2$  که نتیجه می‌دهد  $r \leq 2$ . اما  $r > 1$  زیرا  $\mathbb{H} \cong \Delta$  جابه‌جایی نیست. پس  $r = 2$ . دوباره، از قضیه اسکولم-نوتر به دست می‌آوریم  $\mathbb{H} \subseteq M_2(\mathbb{C}) \sim \Delta$  هر گاه  $\Delta \cong \mathbb{H}$ . بنابراین، حکم از قضیه ۱.۷ نتیجه می‌شود.

(iii) بنا بر قضیه ۱.۷،  $\mathcal{A}$  با  $M_{\mathbb{F}}^n(\Delta)$  مشابه است، که در آن  $r \in \mathbb{N}$  کوچکترین رتبه ناصفر در  $\mathcal{A}$  و  $\Delta$  یک  $\mathbb{R}$ -جبر تقسیم تحویل‌ناپذیر از ماتریس‌ها در  $M_r(\mathbb{H})$  است. بنا بر قضیه فروبنیوس،  $\Delta \cong \mathbb{H}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{C}$  یا  $\Delta \cong \mathbb{R}$  پس بنا بر قضیه اسکولم-نوتر،  $\mathbb{H} \setminus M_r(\mathbb{H}) \sim \Delta$  یا  $\mathbb{C} \setminus M_r(\mathbb{H}) \sim \Delta$  یا  $\mathbb{R} \setminus M_r(\mathbb{H}) \sim \Delta$ . در نتیجه،  $r = 1$  زیرا  $\Delta$  در  $M_r(\mathbb{H})$  تحویل‌ناپذیر است. بنابراین،  $\Delta \sim \mathbb{H}$  یا  $\Delta \sim \mathbb{C}$  یا  $\Delta \sim \mathbb{R}$ ، و لذا، با استفاده از قضیه ۱.۷، برهان کامل می‌شود. □

گزاره زیر نتیجه‌ای سراسر از قضیه بالاست.

قضیه ۳.۷. (i) هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های تحویل‌پذیر حقیقی از اندازه بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های مثلثی‌پذیر حقیقی مثلثی‌پذیر است.

(ii) هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های مختلط از اندازه بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های مختلط مثلثی‌پذیر است.

(iii) هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی از اندازه بیشتر از یک تحویل‌پذیر است. هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی مثلثی‌پذیر است.

اثبات. احکام تحویل‌پذیری به روشنی از قضیه پیشین نتیجه می‌شوند. احکام مثلثی‌پذیری از احکام متناظر تحویل‌پذیری به همراه لم مثلثی‌سازی نتیجه می‌شوند. □

## ۸. انواعی از ماتریس‌ها و عملگرهای خطی

در این بخش، به اختصار انواعی از ماتریس‌ها، از جمله ماتریس‌ها و عملگرهای خطی یکانی، هرمیتی، نرمال، و معین مثبت، را در چارچوب ماتریس‌ها یا جبر خطی کواترنیونی معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آنها، از جمله ارتباط بین این مفاهیم، را بررسی می‌کنیم. این مفاهیم به طور طبیعی از همزادهای حقیقی و مختلط‌شان اقتباس شده‌اند. تمامی گزاره‌هایی که در پی خواهند آمد در چارچوب ماتریس‌ها یا جبر خطی مختلط برقرارند. همزادهای حقیقی آنها در بیشتر موارد برقرارند و در کمتر موارد با اندکی تغییر توأم با تدبیر در صورت گزاره‌ها برقرار هستند. از جمله، در این بخش، قضیه کلاسیک مثلثی‌سازی شور<sup>۴۲</sup> را برای ماتریس‌های کواترنیونی اثبات خواهیم کرد.

**تعریف ۱.۰.۸.** ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  را هرمیتی<sup>۴۳</sup> یا خودالحاق گوئیم هرگاه  $A^* = A$ ، و هرمیتی کج یا شبهه هرمیتی<sup>۴۴</sup> گوئیم هرگاه  $A^* = -A$ . ماتریس  $A$  را یکانی<sup>۴۵</sup> گوئیم هرگاه وارون‌پذیر بوده و به علاوه  $A^{-1} = A^*$ . همچنین،  $A$  را نرمال<sup>۴۶</sup> گوئیم هرگاه  $A^*A = AA^*$ . گردایه  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  را خودالحاق گوئیم هرگاه  $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ ، که در آن  $\mathcal{F}^* := \{A^* : A \in \mathcal{F}\}$ .

شایان گفتن است که ماتریس‌های حقیقی به ترتیب هرمیتی، شبهه هرمیتی، یا یکانی را متقارن، پاد (شبهه) متقارن، یا متعامد می‌خوانند.

**تعریف ۲.۰.۸.** ماتریس‌های  $A, B \in M_n(\mathbb{H})$  را به طور یکانی هم‌ارز یا به طور یکانی مشابه گوئیم هرگاه یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $B = U^*AU$ .

به روشنی می‌توان بررسی کرد که هم‌ارزی یکانی ماتریس‌ها یک رابطه هم‌ارزی روی  $M_n(\mathbb{H})$  تعریف می‌کند. نیز روشن است که یک ماتریس به ترتیب هرمیتی، شبهه هرمیتی، نرمال، یا یکانی است اگر و

<sup>42</sup>Schur's triangularization theorem

<sup>43</sup>Hermitian

<sup>44</sup>Skew hermitian

<sup>45</sup>Unitary

<sup>46</sup>Normal

تنها اگر یک هم‌ارزی‌یکانی‌اش هرمیتی، شبه‌هرمیتی، نرمال، یا یکانی باشد. به طور مشابه می‌توان مفهوم هم‌ارزی‌یکانی را برای خانواده‌های ماتریس‌ها تعریف کرد و به آسانی دید که هم‌ارزی‌یکانی خانواده‌های ماتریس‌ها یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه توانی  $M_n(\mathbb{H})$  تعریف می‌کند.

**تعریف ۳.۸.** خانواده  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  را به طور یکانی مثلثی‌پذیر گوئیم هر گاه یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $U^*AU$  به ازای هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  بالامثلثی است. ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  را مثلثی‌پذیر یکانی خوانیم هر گاه  $\{A\}$  مثلثی‌پذیر یکانی باشد.

بخش دوم قضیه زیر معروف به قضیه مثلثی‌سازی شور حکم می‌کند که هر ماتریس کواترنیونی مثلثی‌پذیر یکانی است. به روشنی استدلال زیر برای ماتریس‌های مختلط برقرار است غیر از اینکه در برهان باید از بخش دوم قضیه ۳.۷ استفاده کرد. همچنین قضیه زیر برای ماتریس‌های حقیقی نیز برقرار است غیر از اینکه در صورت قضیه باید فرض کرد ماتریس‌ها هر یک به تنهایی مثلثی‌پذیرند و دیگر اینکه در برهان باید به قسمت نخست قضیه ۳.۷ استناد کرد.

**قضیه ۴.۸.** (i) هر گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌های کواترنیونی مثلثی‌پذیر یکانی است. یعنی، به ازای هر گردایه جابه‌جایی  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$ ، یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که گردایه  $U^*\mathcal{F}U$  متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است.

(ii) (مثلثی‌سازی شور) هر ماتریس کواترنیونی مثلثی‌پذیر یکانی است. یعنی، به ازای هر  $A \in M_n(\mathbb{H})$ ، یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که ماتریس  $U^*AU$  بالامثلثی است.

**اثبات.** به روشنی تنها کافی است (i) را ثابت کنیم. برای این منظور، نخست توجه کنید که از بخش سوم قضیه ۳.۷ نتیجه می‌شود که هر گردایه جابه‌جایی  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  مثلثی‌پذیر است. فرض کنید گردایه جابه‌جایی  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  داده شده باشد. در نتیجه پایه‌ای مرتب مانند  $\mathcal{B}_0 = (v_i)_{i=1}^n$  برای  $\mathbb{H}^n$  وجود دارد که نمایش ماتریسی تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  نسبت به پایه  $\mathcal{B}_0$  بالامثلثی است. با انجام فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت بر اعضای پایه  $\mathcal{B}_0 = (v_i)_{i=1}^n$  پایه مرتب متعامد یکه  $\mathcal{B}_1 = (u_i)_{i=1}^n$  را به دست می‌آوریم. به روشنی نمایش ماتریس تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  نسبت به پایه متعامد یکه  $\mathcal{B}_1 = (u_i)_{i=1}^n$  نیز بالامثلثی است. ولی ماتریس نمایش تبدیل خطی القاشده توسط هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  نسبت به پایه متعامد یکه استاندارد  $\mathbb{H}^n$ ، یعنی

ستون‌های آن  $u_1, \dots, u_n$  هستند، هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  را بالامثلثی می‌کند. به عبارت دیگر،  $U^*FU$  متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی است. این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

قضیه زیر نتیجه‌ای جالب از قضیه مثلثی‌سازی شور است.

**قضیه ۵.۸.** فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  و  $A \in M_n(\mathbb{H})$ . در این صورت

$$\sigma(A) = \{p \in \mathbb{H} : A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H})\}.$$

اثبات. با توجه به قضیه مثلثی‌سازی شور و لم ۵.۵، بدون آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  بالامثلثی است، که در این صورت بنا به قضیه ۱۹.۵، داریم  $\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Sim}(a_{ii})$ ، که در آن  $a_{ii}$ ها ( $1 \leq i \leq n$ ) درایه‌های قطری ماتریس  $A$  هستند. نخست نشان می‌دهیم

$$\sigma(A) \subseteq \{p \in \mathbb{H} : A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H})\}.$$

برای این منظور، با توجه به برابری  $\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Sim}(a_{ii})$  و اینکه سمت راست شمول بالا تحت هر تبدیل تشابهی بسته است، کافی است نشان دهیم  $A^2 - 2\operatorname{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H})$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ . ولی از آنجا که ماتریس  $A$  بالامثلثی است، به روشنی، به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ، درایه  $(ii)$ ام ماتریس بالامثلثی  $A^2 - 2\operatorname{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^2 I_n$  برابر  $a_{ii}^2 - 2\operatorname{Re}(a_{ii})a_{ii} + |a_{ii}|^2 = 0$  است. این ایجاب می‌کند  $A^2 - 2\operatorname{Re}(a_{ii})A + |a_{ii}|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H})$ ، به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ، که همان حکم مطلوب نظر ماست. حال، فرض کنید  $p \in \mathbb{H}$ ، که  $A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H})$ ، دلخواه باشد. دو حالت می‌توان در نظر گرفت. نخست، اگر  $p \in \mathbb{R}$ ، آنگاه

$$(A - pI_n)^2 = A^2 - 2pA + p^2 I_n = A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n \notin GL_n(\mathbb{H}),$$

و لذا  $A - pI_n \notin GL_n(\mathbb{H})$ ، که به نوبه خود ایجاب می‌کند  $\ker(A - pI_n) \neq 0$ . بنابراین، در این حالت خواهیم داشت  $p \in \sigma(A)$ . حالت دیگر این است که  $p \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ . در این صورت،  $p$  یک ریشه کواترنیونی و ناحقیقی معادله با ضرایب حقیقی  $x^2 - 2\operatorname{Re}(p)x + |p|^2 = 0$  خواهد بود. از

آنجا که  $(a_{ii}^2 - 2\operatorname{Re}(p)a_{ii} + |p|^2)$  ها  $(1 \leq i \leq n)$  درایه‌های قطری ماتریس بالامثلثی وارون‌ناپذیر  $A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n$  هستند، نتیجه می‌گیریم که  $a_{jj}^2 - 2\operatorname{Re}(p)a_{jj} + |p|^2 = 0$  به ازای یک  $1 \leq j \leq n$  ولی  $p^2 - 2\operatorname{Re}(p)p + |p|^2 = 0$ . اکنون از نتیجه ۴.۲ درمی‌یابیم که  $p$  و  $a_{jj}$  مشابه هستند. این امر ایجاب می‌کند که در این حالت نیز  $p \in \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Sim}(a_{ii}) = \sigma(A)$  بنابراین،

$$\{p \in \mathbb{H} : A^2 - 2\operatorname{Re}(p)A + |p|^2 I_n \notin \operatorname{GL}_n(\mathbb{H})\} \subseteq \sigma(A).$$

□

این برهان را کامل می‌کند.

تعریف ۶.۸. فرض کنید  $D$  یک حلقه تقسیم باشد. خانواده  $\mathcal{F} \subseteq M_n(D)$  را قطری‌پذیر<sup>۴۷</sup> گوئیم هر گاه در  $\mathcal{F}$  مشابه با خانواده‌ای از ماتریس‌های قطری باشد. به عبارت دیگر، یک ماتریس وارون‌پذیر مانند  $P \in M_n(D)$  موجود باشد به طوری که  $P^{-1}AP$  به ازای هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  قطری است. ماتریس  $A \in M_n(D)$  را قطری‌پذیر خوانیم هر گاه  $\{A\}$  قطری‌پذیر باشد. خانواده  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  را به طور یکانی قطری‌پذیر<sup>۴۸</sup> گوئیم هر گاه  $\mathcal{F}$  در  $M_n(\mathbb{H})$  به طور یکانی هم‌ارز با خانواده‌ای از ماتریس‌های قطری باشد. یعنی، یک ماتریس یکانی مانند  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $U^*AU$  به ازای هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$  قطری است. به طور طبیعی، ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  را به طور یکانی قطری‌پذیر خوانیم هر گاه  $\{A\}$  به طور یکانی قطری‌پذیر باشد.

تمامی بخش‌های گزاره زیر برای ماتریس‌های مختلط نیز برقرار است. در ارتباط با ماتریس‌های حقیقی، حکم مربوط به ماتریس‌های هرمیتی (مقارن در حالت حقیقی) برای ماتریس‌های حقیقی نیز برقرار است. احکام دیگر مربوط به ماتریس‌های نرمال، شبه‌هرمیتی (پادمقارن)، و یکانی (متعامد) حقیقی برقرارند با این فرض اضافه که ماتریس‌ها باید مثلثی‌پذیر فرض شوند. محض نمونه، نتیجه مربوط به ماتریس‌های پادمقارن حقیقی شکل ساده زیر را پیدا می‌کند: ماتریس صفر تنها ماتریس مثلثی‌پذیر پادمقارن حقیقی است.

گزاره ۷.۸. (i) فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{H})$ . در این صورت ماتریس  $A$  نرمال است اگر و تنها اگر  $A$  به طور یکانی قطری‌پذیر باشد. بنابراین، ماتریس  $A$  هرمیتی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی

<sup>47</sup>Diagonalizable

<sup>48</sup>Unitarily diagonalizable

$U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $U^*AU$  ماتریسی قطری و حقیقی است. ماتریس  $A$  شبیه هرمیتی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $U^*AU$  ماتریس قطری است و درایه‌های قطر اصلی آن اعدادی مختلط و موهومی محض هستند. ماتریس  $A$  یکانی است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که  $U^*AU$  ماتریس قطری است و درایه‌های قطر اصلی آن اعدادی مختلط با طول واحد هستند.

(ii) یک گردایه جابه‌جایی از ماتریس‌ها قطری‌پذیر یکانی است اگر و تنها اگر متشکل از ماتریس‌های نرمال باشد.

(iii) یک گردایه خودالحاق از ماتریس‌ها قطری‌پذیر یکانی است اگر و تنها اگر مثلثی‌پذیر یکانی باشد.

اثبات. (i) تنها کافی است حکم نخست را ثابت کنیم. احکام دیگر نتیجه سراسستی از حکم نخست هستند. بخش «اگر» حکم بدیهی است. پس کافی است بخش «تنها اگر» حکم را ثابت کنیم. برای این منظور، فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{H})$  ماتریسی نرمال باشد. بنا بر بخش نخست قضیه ۴.۸، یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که  $U^*\{A, A^*\}U$  متشکل از دو ماتریس بالامثلثی است. در نتیجه  $U^*AU$  هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی است. بنابراین  $U^*AU$  قطری است. این برهان را کامل می‌کند.

(ii) بخش «تنها اگر» حکم بدیهی است. بخش «اگر» حکم مانند بخش «تنها اگر» (i) ثابت می‌شود.

(iii) ایده برهان دقیقا همان ایده دو برهان قبلی است. بخش «تنها اگر» حکم بدیهی است. بخش

«اگر» حکم مانند بخش «تنها اگر» (i) ثابت می‌شود. به طور دقیق، فرض کنید  $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{H})$  گردایه‌ای خودالحاق و مثلثی‌پذیر یکانی باشد به طوری که یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود باشد به طوری که گردایه  $U^*\mathcal{F}U$  متشکل از ماتریس‌های بالامثلثی باشد. در نتیجه به ازای هر ماتریس  $A \in \mathcal{F}$ ، دو ماتریس  $U^*AU$ ،  $U^*A^*U$  بالامثلثی‌اند. ولی  $(U^*AU)^* = U^*A^*U$ . بنابراین،  $U^*AU$  ماتریسی قطری است. این حکم را ثابت می‌کند.  $\square$

تعریف ۸.۸. ماتریس  $P \in M_n(\mathbb{H})$  را مثبت یا معین مثبت<sup>۴۹</sup> گوئیم، و می‌نویسیم  $P > \circ$ ، هر گاه به ازای هر  $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ ،  $x^*Px > \circ$ ، یعنی  $x^*Px$  حقیقی و مثبت باشد. ماتریس  $N \in M_n(\mathbb{H})$

<sup>49</sup>Positive definite

نامنفی یا نیم‌معین مثبت<sup>۵۰</sup> گوئیم، و می‌نویسیم  $N \geq 0$ ، هرگاه به ازای هر  $x \in \mathbb{H}^n$ ،  $x^*Nx \geq 0$ ، یعنی  $x^*Nx$  حقیقی و نامنفی باشد.

تعریف معین مثبت و نامنفی بودن برای ماتریس‌های مختلط با تعریف بالا یکسان است. تعریف معین مثبت بودن و نامنفی بودن برای ماتریس‌های حقیقی به طور یکسان انجام می‌شود با این فرض اضافه که هر چنین ماتریسی هرمیتی (مقارن) فرض می‌شود؛ یعنی، ماتریس‌های معین مثبت و نامنفی حقیقی بنا به فرض هرمیتی (مقارن) هستند. روشن است که به ازای ماتریس داده‌شده  $A \in M_n(\mathbb{H})$ ، به ترتیب داریم  $A \geq 0$  یا  $A > 0$  اگر و تنها اگر به ازای یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  داشته باشیم  $U^*AU \geq 0$  یا  $U^*AU > 0$ . همچنین، روشن است که هر ماتریس قطری با درایه‌های مثبت (به ترتیب: نامنفی) ماتریسی مثبت (به ترتیب: نامنفی) است. دیگر اینکه اگر  $A \in M_n(\mathbb{H})$  ماتریسی هرمیتی باشد،  $N, P \in M_n(\mathbb{H})$  و  $N \geq 0$  و  $P > 0$ ، آنگاه  $ANA \geq 0$  و  $APA \geq 0$ . در حالتی که  $A \in M_n(\mathbb{H})$  ماتریسی هرمیتی و وارون‌پذیر باشد و  $N, P \in M_n(\mathbb{H})$ ، خواهیم داشت  $N \geq 0$  ( $P > 0$ ) اگر و تنها اگر داشته باشیم  $ANA \geq 0$  ( $APA > 0$ ).

قضیه زیر برای ماتریس‌های حقیقی و مختلط نیز برقرار است.

**قضیه ۹.۸.** ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$  معین مثبت (به ترتیب: نامنفی) است اگر و تنها اگر  $A$  هرمیتی و اعضای  $\sigma(A)$  حقیقی و مثبت (به ترتیب: حقیقی و نامنفی) باشند. بنابراین، هر چنین ماتریسی به طور یکانی قطری‌پذیر است و همه درایه‌های قطری ماتریس قطری متناظر به ماتریس داده شده مثبت (به ترتیب: نامنفی) هستند.

اثبات. کافی است حکم نخست را ثابت کنیم. حکم دیگر نتیجه‌آنی حکم نخست است. حکم را برای ماتریس‌های مثبت ثابت می‌کنیم. حکم دیگر به طور مشابه به اثبات می‌رسد. ابتدا فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{H})$  معین مثبت باشد. فرض کنید  $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ . از آنجا که  $x^*Ax \in \mathbb{R}$ ، پس

$$x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \overline{x^*Ax} = x^*Ax.$$

از این رو،  $x^*(A^* - A)x = 0$ . حال فرض کنید  $\lambda$  یک مقدار ویژه راست  $A^* - A$  و  $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$

<sup>50</sup>Positive semidefinite

یک بردار ویژه راست متناظر با  $\lambda$  باشد. داریم

$$0 = x^*(A^* - A)x = x^*x\lambda = |x|^2\lambda.$$

از آنجا که  $|x|^2 > 0$ ، پس  $\lambda = 0$ . از طرفی، داریم  $(A^* - A)^* = A - A^* = -(A^* - A)$ . در نتیجه،  $A^* - A$  قطری پذیر است و  $\{0\} = \sigma(A^* - A)$ . بنابراین،  $A^* - A = 0$  که نتیجه می‌دهد  $A^* = A$ . حال فرض کنید  $\lambda \in \sigma(A)$ . داریم  $|x|^2\lambda = x^*x\lambda = x^*Ax$  که در آن  $x$  یک بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه  $\lambda$  است. اکنون، از آنجا که  $x^*Ax$  حقیقی و مثبت است، از رابطه بالا درمی‌یابیم که  $\lambda$  نیز حقیقی و مثبت است. برعکس، فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{H})$  هرمیتی و اعضای  $\sigma(A)$  حقیقی و مثبت باشند. حال، از قضیه قبل نتیجه می‌شود که ماتریس  $A$  به طور یکانی هم‌ارز با یک ماتریس قطری و با درایه‌های قطری مثبت است. ولی هر چنین ماتریسی معین مثبت است. بنابراین، ماتریس  $A$  معین مثبت است. این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

بخش‌های دوم و سوم گزاره زیر در واقع [۱۴]، گزاره‌های ۱.۳.۳ و ۱.۴.۳ هستند. به طور طبیعی، بخش نخست گزاره نیز با الهام از گزاره‌های یادشده تنظیم شده است. دوباره یادآور می‌شویم که ماتریس‌های حقیقی یکانی ماتریس‌های متعامد نامیده می‌شوند. و همچنین در تعریف ماتریس‌های معین مثبت و ماتریس‌های نامنفی حقیقی، این ماتریس‌ها هرمیتی (مقارن یا خودالحاق) فرض می‌شوند.

گزاره ۱۰.۸. (i) ماتریس  $Z \in M_n(\mathbb{C})$ ، به ترتیب، هرمیتی، شبه‌هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر  $\varepsilon(Z) \in M_n(\mathbb{R})$  چنین باشد.

(ii) ماتریس  $P \in M_n(\mathbb{H})$ ، به ترتیب، هرمیتی، شبه‌هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر  $\varepsilon'(P) \in M_n(\mathbb{C})$  چنین باشد.

(iii) ماتریس  $P \in M_n(\mathbb{H})$ ، به ترتیب، هرمیتی، شبه‌هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر  $\varepsilon''(P) \in M_n(\mathbb{R})$  چنین باشد.

اثبات. به روشنی به ازای هر  $z \in \mathbb{C}$  و  $p \in \mathbb{H}$ ، داریم

$$\varepsilon(\bar{z}) = \varepsilon(z)^t, \quad \varepsilon'(\bar{p}) = \varepsilon'(p)^*, \quad \varepsilon''(\bar{p}) = \varepsilon(p)^t.$$



حال فرض کنید  $Z = (z_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  و  $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{H})$  که در آن  $1 \leq i, j \leq n$  و  $z_{ij} \in \mathbb{C}$  و  $p_{ij} \in \mathbb{H}$  و لذا  $Z^* = (\overline{z_{ji}}) \in M_n(\mathbb{C})$  و  $P^* = (\overline{p_{ji}}) \in M_n(\mathbb{H})$ . در نتیجه می‌توان نوشت

$$\varepsilon(Z^*) = \varepsilon(\overline{z_{ji}}) = (\varepsilon(\overline{z_{ji}})) = (\varepsilon(z_{ji})^t) = (\varepsilon(z_{ij}))^t = \varepsilon(Z)^t,$$

$$\varepsilon'(P^*) = \varepsilon'(\overline{p_{ji}}) = (\varepsilon'(\overline{p_{ji}})) = (\varepsilon'(p_{ji})^*) = (\varepsilon'(p_{ij}))^* = \varepsilon'(P)^*,$$

و

$$\varepsilon''(P^*) = \varepsilon''(\overline{p_{ji}}) = (\varepsilon''(\overline{p_{ji}})) = (\varepsilon''(p_{ji})^t) = (\varepsilon''(p_{ij}))^t = \varepsilon''(P)^t.$$

□ اکنون روشن است که تمامی احکام (i)، (ii)، و (iii) به آسانی از سه رابطهٔ اخیر حاصل می‌شوند.

همان طور که در آغاز بخش چهارم این مقاله یادآور شدیم، در سایهٔ قضیهٔ نمایش ریس، مفهوم الحاقی عملگرهای خطی و کران‌دار روی فضاهاى هیلبرت تعریف می‌شود. در نتیجه تعاریف زیر را به طور طبیعی در چارچوب فضاهاى هیلبرت کواترنیونی خواهیم داشت. تعاریف را در چارچوب فضاهاى ضرب داخلی کواترنیونی متناهی بعد ارائه می‌دهیم هر چند که می‌توان این تعاریف را در چارچوب فضاهاى هیلبرت کواترنیونی، حتی برای عملگرهای خطی و نه لزوماً کران‌دار، انجام داد.

تعریف ۱۱.۸. فرض کنید  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  یک فضای ضرب داخلی کواترنیونی متناهی بعد باشد. عملگر خطی (و لذا کران‌دار)  $T \in \mathcal{L}(V)$  را هرمیتی گوئیم هرگاه  $T^* = T$ ؛ هرمیتی کج یا شبه هرمیتی گوئیم هرگاه  $T^* = -T$ ؛  $T^*T = TT^* = I_V$  را یکانی گوئیم هرگاه  $T^*T = TT^* = I_V$ ؛ نشانگر عملگر الحاقی  $T \in \mathcal{L}(V)$  است و  $I_V$  نشانگر عملگر خطی همانی روی  $V$  است. همچنین  $T \in \mathcal{L}(V)$  را مثبت یا معین مثبت (به ترتیب نامنفی) گوئیم، و می‌نویسیم  $T > 0$  (به ترتیب  $T \geq 0$ )، هرگاه  $\langle Tx, x \rangle > 0$  (به ترتیب  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ ) به ازای هر  $x \in V \setminus \{0\}$ .

به آسانی می‌توان دید که عملگر خطی  $T \in \mathcal{L}(V)$  یکانی است اگر و تنها اگر  $T^*T = I_V$ ؛ اگر و تنها اگر  $TT^* = I_V$ ؛ اگر و تنها اگر  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  به ازای هر  $x, y \in V$ . نیز توجه کنید ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{H})$ ، به ترتیب، هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر ماتریس  $A$  به عنوان یک عملگر خطی روی فضای ضرب داخلی کواترنیونی  $\mathbb{H}^n$  به همراه ضرب داخلی استانداردش یک عملگر هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی باشد.

گزاره بعدی، که برای تبدیلات خطی روی فضاهاى حقیقی و همچنین فضاهاى مختلط برقرار است، نتیجه سراستی از مشاهدات زیرین است. البته مشاهدات زیر در چارچوب فضاهاى حقیقی و مختلط نیز برقرارند. فرض کنید  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  مطابق تعریف بالا،  $T \in \mathcal{L}(V)$  و  $\mathcal{B}$  یک پایه مرتب متعامد یکه برای  $V$  باشد. در این صورت  $[T]_{\mathcal{B}}^* = ([T]_{\mathcal{B}})^*$ . برای بررسی این مشاهده سراستی، کافی است توجه کنیم که اگر  $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n$  و  $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{H})$ ، آنگاه  $a_{ij} = \langle Tu_j, u_i \rangle$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). دیگر اینکه که اگر  $V$  یک فضای راست برداری  $n$ -بعدی روی یک حلقه تقسیم مانند  $D$  و  $\mathcal{B}$  یک پایه برای  $V$  باشد، آنگاه نگاشت  $\phi: \mathcal{L}(V) \rightarrow M_n(D)$  تعریف شده توسط  $\phi(T) = [T]_{\mathcal{B}}$  ( $T \in \mathcal{L}(V)$ ) یک به یک، پوشا، و حافظ جمع و ضرب است. به ویژه، اگر  $S, T \in \mathcal{L}(V)$  باشند، آنگاه

$$[S + T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} + [T]_{\mathcal{B}}, [ST]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}, (S = T \iff [S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}).$$

نیز به ویژه اینکه به ازای هر تبدیل خطی  $T \in \mathcal{L}(V)$ ، به ترتیب، داریم،  $T = I_V$  یا  $T = \circ_V$  اگر و تنها اگر  $[T]_{\mathcal{B}} = I_n = (\delta_{ij}) \in M_n(D)$  یا  $[T]_{\mathcal{B}} = \circ_n = (\circ) \in M_n(D)$ .

گزاره ۱۲.۸. فرض کنید  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  یک فضای ضرب داخلی کواترنیونی راست متناهی بعد با بعد  $n \in \mathbb{N}$ ،  $T \in \mathcal{L}(V)$  و  $\mathcal{B}$  یک پایه متعامد یکه برای  $V$  باشد. در این صورت عملگر خطی  $T \in \mathcal{L}(V)$  به ترتیب، هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است اگر و تنها اگر ماتریس  $[T]_{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{H})$ ، هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی باشد.

اثبات. برهان چهار حکم نخست نتیجه سراستی از مشاهداتی است که پیش از بیان قضیه به آنها توجه کردیم. در حالتی که  $T \in \mathcal{L}(V)$  معین مثبت یا نامنفی است، نخست توجه کنید که به روشنی داریم

$$\langle x, y \rangle = ([y]_{\mathcal{B}})^*[x]_{\mathcal{B}}, (x, y \in V).$$

در نتیجه

$$\langle Tx, x \rangle = ([x]_{\mathcal{B}})^*[T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}, (x \in V).$$

□

اکنون، این برابری به روشنی حکم مورد نظر ما را ثابت می‌کند.

حکم زیر نتیجه‌ای مفید و کارآمد از گزاره ۱۲.۸ است. البته هر چند که گزاره زیر در چارچوب فضاهای کوآترنیونی ارائه شده است، ولی روشن است که برهانی یکسان با برهان گزاره زیر همزاد آن را برای خانواده‌های ماتریس‌های حقیقی و مختلط نیز ثابت می‌کند.

نتیجه ۱۳.۸. فرض کنید  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای از ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. در این صورت  $\mathcal{F}$  به ترتیب با خانواده‌ای از ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است اگر و تنها اگر یک ضرب داخلی روی  $\mathbb{H}^n$  موجود باشد به طوری که هر عضو  $\mathcal{F}$  نسبت به این ضرب داخلی به ترتیب هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است.

اثبات. نخست بخش «تنها اگر» حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید  $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$  نشانگر پایه مرتب استاندارد برای  $\mathbb{H}^n$  باشد. فرض کنید خانواده  $\mathcal{F}$  به ترتیب با خانواده‌ای از ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است. در نتیجه یک ماتریس وارون‌پذیر  $P \in GL_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که خانواده  $P^{-1}\mathcal{F}P$  متشکل از به ترتیب ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است. به طور مرسوم اعضای  $\mathcal{F}$  را به عنوان تبدیلات خطی که بر چپ فضای راست  $\mathbb{H}^n$  از طریق ضرب ماتریسی عمل می‌کنند در نظر بگیرید. به روشنی  $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}$ . از سوی دیگر، اگر  $u_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) نشانگر ستون  $j$ ام ماتریس  $P$  باشد، آنگاه به روشنی  $\mathcal{B}' := (u_j)_{j=1}^n$  یک پایه مرتب برای  $\mathbb{H}^n$  است و داریم  $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}P = P^{-1}\mathcal{F}P$ . اکنون، ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  روی  $\mathbb{H}^n$  را با تعریف آن روی  $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=1}^n$  توسط  $\langle u_j, u_j \rangle' := \delta_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) و سپس گسترش آن به  $\mathbb{H}^n$  را به طور خطی تعریف کنید. به طور دقیق‌تر،

$$\langle x, y \rangle' := ([y]_{\mathcal{B}'})^* [x]_{\mathcal{B}'}, \quad (x, y \in \mathbb{H}^n).$$

چون  $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=1}^n$  یک پایه متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی  $(\mathbb{H}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  است، و  $P^{-1}\mathcal{F}P$  متشکل از به ترتیب ماتریس‌های هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی مشابه است، و به علاوه  $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\mathcal{F}P$ ، حکم از گزاره قبل نتیجه می‌شود.

برهان بخش «اگر» حکم آسان است. فرض کنید یک ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  روی  $\mathbb{H}^n$  موجود باشد به طوری که هر عضو به عنوان یک تبدیل خطی  $\mathcal{F}$  نسبت به این ضرب داخلی به ترتیب هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است. یک پایه متعامد یکه  $\mathcal{B}' = (u_j)_{j=1}^n$  برای فضای

ضرب داخلی  $(\mathbb{H}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  اختیار کنید. بنا به قضیه قبل  $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$  متشکل از ماتریس‌های به ترتیب هرمیتی، شبه هرمیتی، نرمال، یکانی، معین مثبت، یا نامنفی است. ولی  $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}P = P^{-1}\mathcal{F}P$ . این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

## ۹. پیش‌درآمد برهان قضیه آوئرباخ

در این بخش مقدمات لازم برای ارائه برهان قضیه آوئرباخ را در طی چند لم فراهم می‌آوریم. برای این منظور با لم آسان شروع می‌کنیم.

لم ۱.۹. فرض کنید  $\mathcal{G}$  بستار یک گروه کران‌دار  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. در این صورت  $\mathcal{G}$  زیرگروهی فشرده از  $M_n(\mathbb{H})$  است.

اثبات. نخست توجه کنید که از قضیه هاینه-بورل<sup>۵۱</sup> نتیجه می‌شود که  $\mathcal{G}$  فشرده است. می‌ماند نشان می‌دهیم که  $\mathcal{G}$  زیرگروهی از  $M_n(\mathbb{H})$  است. تنها حکم غیر بدیهی این است که نشان دهیم  $\mathcal{G}$  تحت وارون‌گیری بسته است. برای این منظور، فرض کنید  $A \in \mathcal{G}$  دلخواه باشد. پس دنباله  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  در  $\mathcal{G}$  موجود است به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . به روشنی،  $(A_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای در  $\mathcal{G}$  است. حال از آنجا که  $\mathcal{G}$  فشرده است، پس زیردنباله  $(A_{n_k}^{-1})_{k=1}^{\infty}$  از دنباله  $(A_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$  موجود است که به عضوی مانند  $B \in \mathcal{G}$  همگراست. از طرفی،  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A$ . بنابراین،  $I_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} A_{n_k}^{-1} = AB$  و  $I_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k}^{-1} A_{n_k} = BA$  پس  $A$  وارون‌پذیر است و  $A^{-1} = B \in \mathcal{G}$ .  $\square$

لم زیر روایت کواترنیونی [۶، گزاره ۵.۳] است.

لم ۲.۹. فرض کنید  $\mathcal{G}$  یک گروه کران‌دار از ماتریس‌ها در  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. در این صورت نگاشت

$$|\cdot|_{\mathcal{G}} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}, |x|_{\mathcal{G}} := \sup \{ \|Tx\| : T \in \mathcal{G} \}, (x \in \mathbb{H}^n)$$

خوش‌تعریف است و یک نرم روی  $\mathbb{H}^n$  تعریف می‌کند. به علاوه، هر عضو  $\mathcal{G}$  نسبت به نرم  $|\cdot|_{\mathcal{G}}$  یک ایزومتري (یک‌متری) است؛ و بنابراین، طیف هر عضو  $\mathcal{G}$  متشکل از اسکالرهای با طول واحد است.

<sup>51</sup>Heine-Borel theorem

اثبات. برهان بخش نخست حکم، که کاملا سراسر است و بدیهی است، به جهت اختصار حذف می‌شود. برای دیدن بخش دیگر حکم، فرض کنید  $T \in \mathcal{G}$  و  $\lambda \in \sigma(T)$  اعضای دلخواه باشند. یک بردار ویژه  $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$  متناظر به مقدار ویژه  $\lambda \in \sigma(T)$  اختیار کنید. به روشنی می‌توان نوشت

$$|x|_{\mathcal{G}} = |Tx|_{\mathcal{G}} = |x\lambda|_{\mathcal{G}} = |x|_{\mathcal{G}}|\lambda|.$$

□

در نتیجه  $|\lambda| = 1$ . این برهان را کامل می‌کند.

سه لم بعدی بر اساس برهان [۱۳، قضیه ۵.۱.۳] تنظیم شده‌اند.

لم ۳.۹. فرض کنید  $\mathcal{G}$  یک گروه فشرده در  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. فرض کنید

$$E_{\mathcal{G}} := \{A \in M_n(\mathbb{H}) : A \geq 0, x^*Ax \leq |x|_{\mathcal{G}}^2, \forall x \in \mathbb{H}^n\},$$

که در آن

$$|x|_{\mathcal{G}} := \sup_{T \in \mathcal{G}} \|Tx\|, (x \in \mathbb{H}^n).$$

در این صورت نگاشت زیر خوش‌تعریف و پیوسته است

$$f : E_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}_+^+, f(A) := \sqrt{\det_{\mathbb{C}} A} := \sqrt{\det \mathcal{E}'(A)} = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k}, (A \in E_{\mathcal{G}}),$$

که در آن  $\mathbb{R}_+^+ := [0, +\infty)$  و  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  و  $m_1, \dots, m_k$  به ترتیب مقادیر ویژه راست  $A \in E_{\mathcal{G}}$  و چندگانگی‌های جبری مقادیر ویژه  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  هستند. همچنین مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$  (نسبت به نرم عملگری  $M_n(\mathbb{H})$ ) بسته و کران‌دار، و لذا فشرده، است. به علاوه،  $E_{\mathcal{G}}$  محدب و ناتهی است؛ به ویژه  $I_n \in E_{\mathcal{G}}$ .

اثبات. فرض کنید  $M := \sup_{A \in \mathcal{G}} \|A\|$  و  $A \in E_{\mathcal{G}}$ . از آنجا که  $A$  نامنفی است، بنا به بخش دوم گزاره ۱۰.۸  $\mathcal{E}'(A) \in M_{2n}(\mathbb{C})$  نیز چنین است و لذا نگاشت  $f$  خوش‌تعریف است. از سوی دیگر، بنا بر قضیه ۹.۸،  $A$  روی  $M_n(\mathbb{H})$  به طور یکانی با یک ماتریس قطری حقیقی مشابه است. یعنی، یک ماتریس یکانی  $U \in M_n(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که  $U^*AU$  قطری است و  $D(U^*AU)$ ، مجموعه

همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $U^*AU$ ، حقیقی و نامنفی هستند. حال بنا بر گزاره ۱۹.۵،

$$\sigma(A) = \text{Sim}(D(U^*AU)) = D(U^*AU) \subseteq \mathbb{R}_0^+.$$

بنابراین، به ازای هر  $A \in E_{\mathcal{G}}$ ،  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ ، و به علاوه

$$f(A) = \sqrt{\det \mathcal{E}'(A)} = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k},$$

که در آن  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  و  $m_1, \dots, m_k$  به ترتیب مقادیر ویژه راست  $A \in E_{\mathcal{G}}$  و چندگانگی‌های جبری این مقادیر ویژه هستند. پیوستگی  $f$  از پیوستگی نگاشت  $\sqrt{\det \mathcal{E}'(\cdot)}$  نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$  بسته و کران‌دار، و لذا فشرده، است. با توجه به تعریف مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$  و این واقعیت بدیهی که مجموعه همه ماتریس‌های نامنفی زیرمجموعه‌ای بسته از  $M_n(\mathbb{H})$  است، درمی‌یابیم که  $E_{\mathcal{G}}$  بسته است. برای اینکه ببینید  $E_{\mathcal{G}}$  کران‌دار است، با نشان دادن اینکه  $\sup_{A \in E_{\mathcal{G}}} \|A\| \leq M^2$  برهان را کامل می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید  $A \in E_{\mathcal{G}}$  دلخواه بوده و ماتریس یکانی  $U$  مطابق بالا باشد. به روشنی داریم

$$\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |x|_{\mathcal{G}}^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M^2 \|x\|^2 \leq M^2.$$

با نشان دادن اینکه  $\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax = \|A\|$  حکم ثابت می‌شود زیرا  $A \in E_{\mathcal{G}}$  دلخواه است. برای این منظور، از آنجا که ماتریس  $U \in M_n(\mathbb{H})$  یکانی است و  $U^*AU$  ماتریسی قطری با درایه‌های قطری نامنفی است، به روشنی داریم  $U^*AU = P^2$  که در آن  $P \geq 0$  ماتریسی قطری است، و لذا  $\|P^2\| = \|U^*AU\| = \|A\|$  به علاوه می‌توان نوشت

$$\sup_{\|x\| \leq 1} x^*Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*U^*AUX = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*P^2x = \|P^2\| = \|A\|.$$

اینکه  $E_{\mathcal{G}}$  محدب است و  $0_n, I_n \in E_{\mathcal{G}}$ ، و لذا ناتهی است، به آسانی از تعریف  $E_{\mathcal{G}}$  نتیجه می‌شود. این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

لم زیر، که براساس برهان [۱۳، قضیه ۵.۱.۳] تنظیم شده است، حالت خاصی از قضیه اصلی [۱۲] است. لم زیر را از جهت کامل بودن ارائه مطلب می‌آوریم.

لم ۴.۹. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  و ماتریس‌های  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  نامنفی باشند به طوری که یکی از آنها معین مثبت است. در این صورت

$$\det \frac{A+B}{2} \geq \sqrt{\det A} \sqrt{\det B},$$

و در آن برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر  $A = B$ .

اثبات. بدون آنکه از کلیت کاسته شود، فرض کنید ماتریس  $A$  مثبت باشد. از روایت مختلط قضیه ۹.۸ درمی‌یابیم که ماتریس معین مثبت  $P \in M_n(\mathbb{C})$  موجود است به طوری که  $A = P^2$ . می‌توان نوشت

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}P(I_n + P^{-1}BP^{-1})P,$$

در نتیجه

$$\det \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2^n}(\det P)^2 \det(I_n + P^{-1}BP^{-1}).$$

از آنجا که، به روشنی، ماتریس  $P^{-1}BP^{-1}$  نامنفی است، باری دیگر از روایت مختلط قضیه ۹.۸ نتیجه می‌گیریم که  $P^{-1}BP^{-1}$  با یک ماتریس قطری  $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  هم‌ارز یکانی است، که در آن  $d_i$ ها ( $1 \leq i \leq n$ ) مقادیر ویژه ماتریس  $P^{-1}BP^{-1}$  هستند. پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \left( \det(I_n + P^{-1}BP^{-1}) \right)^2 &= \prod_{i=1}^n (1 + d_i)^2, \\ &\geq \prod_{i=1}^n 4d_i = 4^n \prod_{i=1}^n d_i, \\ &= 4^n \det(P^{-1}BP^{-1}), \\ &= 4^n \det(P)^{-2} \det B. \end{aligned}$$

اگر و تنها اگر

$$\det(I_n + P^{-1}BP^{-1}) \geq 2^n \det(P)^{-1} \sqrt{\det B}.$$

توجه کنید در نابرابری بالا، نابرابری اکید است مگر اینکه  $d_i = 1$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ، و به طور معادل اگر و تنها اگر  $P^{-1}BP^{-1} = I_n$ ، اگر و تنها اگر  $B = P^2 = A$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \det \frac{A+B}{2} &= \frac{1}{2^n} (\det P)^2 \det(I_n + P^{-1}BP^{-1}), \\ &\geq \frac{1}{2^n} (\det P)^2 2^n \det(P)^{-1} \sqrt{\det B}, \\ &= \det P \sqrt{\det B}, \\ &= \sqrt{\det A} \sqrt{\det B}, \end{aligned}$$

□ که در آن برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر  $A = B$ . این برهان را کامل می‌کند.

لم ۵.۹. فرض کنید  $\mathcal{G}$  گروهی فشرده در  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. فرض کنید مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$  و نگاشت  $f$  مطابق لم ۳.۹ باشند. در این صورت یک عضو یگانه  $A \in E_{\mathcal{G}}$  وجود دارد به طوری که  $f(A) = \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\}$ .

اثبات. اینکه یک عضو  $A \in E_{\mathcal{G}}$  وجود دارد به طوری که  $f(A) = \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\}$  از پیوستگی نگاشت  $f$  و فشردگی مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$  نتیجه می‌شود. فرض کنید اعضای  $A, B \in E_{\mathcal{G}}$  موجود باشند به طوری که  $f(A) = \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\} = f(B)$ . در نتیجه

$$f(A) = \sqrt{\det \varepsilon'(A)} = \sqrt{\det \varepsilon'(B)} = f(B).$$



ولی  $E_{\mathcal{G}}$  محدب است. پس  $\frac{A+B}{۲} \in E_{\mathcal{G}}$ ، و لذا

$$\begin{aligned} \sqrt{\det\left(\frac{\varepsilon'(A) + \varepsilon'(B)}{۲}\right)} &= \sqrt{\det \varepsilon'\left(\frac{A+B}{۲}\right)} \\ &= f\left(\frac{A+B}{۲}\right) \\ &\leq \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\} \\ &= \left(\sqrt{\det \varepsilon'(A)}\right)^{\frac{1}{۲}} \left(\sqrt{\det \varepsilon'(B)}\right)^{\frac{1}{۲}}, \end{aligned}$$

ولذا

$$\det\left(\frac{\varepsilon'(A) + \varepsilon'(B)}{۲}\right) \leq \sqrt{\det \varepsilon'(A)} \sqrt{\det \varepsilon'(B)}.$$

این نابرابری، به همراه لم پیشین، یا قضیه اصلی [۱۲]، ایجاب می‌کند

$$\det\left(\frac{\varepsilon'(A) + \varepsilon'(B)}{۲}\right) = \sqrt{\det \varepsilon'(A)} \sqrt{\det \varepsilon'(B)},$$

و از آنجا از شرط برابری نابرابری در لم پیشین، یا در قضیه اصلی [۱۲]، نتیجه می‌گیریم که  $\varepsilon'(A) = \varepsilon'(B)$ ، و لذا  $A = B$ . این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

### ۱۰. روایت کواترنیونی قضیه آوئرباخ

با مقدمات بخش پیشین در دست، اکنون آماده‌ایم قضیه اصلی این فصل، که روایت کواترنیونی قضیه آوئرباخ است، را ثابت کنیم. به روشنی، با اصلاح سراسر برهان زیر، به طور طبیعی، می‌توان روایت‌های حقیقی و مختلط قضیه آوئرباخ را نیز ثابت کرد.

قضیه ۱۰.۱۰. هر گروه کران‌دار از ماتریس‌های وارون‌پذیر کواترنیونی با گروهی از ماتریس‌های یکانی کواترنیونی مشابه است.

اثبات. فرض کنید  $\mathcal{G}$  زیرگروهی کران‌دار از ماتریس‌های وارون‌پذیر در  $M_n(\mathbb{H})$  باشد. با توجه به لم ۱۰.۹، و در صورت لزوم با جایگزین کردن بستار گروه کران‌دار  $\mathcal{G}$  به جای  $\mathcal{G}$ ، می‌توان فرض کرد که  $\mathcal{G}$

زیرگروهی فشرده از ماتریس‌های وارون‌پذیر در  $M_n(\mathbb{H})$  است. حال در سایه نتیجه ۱۳.۸، کافی است نشان دهیم یک ضرب داخلی روی  $\mathbb{H}^n$  موجود است به طوری که هر عضو  $\mathcal{G}$  به عنوان یک عملگر خطی نسبت به آن ضرب داخلی یکانی است. برای این منظور، مجموعه  $E_{\mathcal{G}}$ ، نگاشت  $f$ ، و عضو یکتای  $A \in E_{\mathcal{G}}$  را به طوری که  $f(A) = \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\}$  را مطابق لم ۵.۹ در نظر بگیرید. از آنجا که ماتریس  $A$  معین مثبت است، نگاشت

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}, \langle x, y \rangle_A := x^* A y, (x, y \in \mathbb{H}^n)$$

یک ضرب داخلی روی  $\mathbb{H}^n$  تعریف می‌کند. ثابت خواهیم کرد که هر عضو دلخواه  $T \in \mathcal{G}$  نسبت به ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  یکانی است. برای این منظور، نشان خواهیم داد  $T^* A T = A$ ، که از آنجا به روشنی خواهیم داشت

$$\langle T x, T y \rangle_A = (T x)^* A T y = x^* T^* A T y = x^* A y = \langle x, y \rangle_A,$$

به ازای هر  $x, y \in \mathbb{H}^n$ ، و این مطلب حکم را ثابت خواهد کرد. اما، به ازای عضو دلخواه داده شده  $T \in \mathcal{G}$ ، به روشنی ماتریس  $T^* A T \in M_n(\mathbb{H})$  معین مثبت است و می‌توان نوشت

$$x^* (T^* A T) x = (T x)^* A (T x) \leq |T x|_{\mathcal{G}}^2 = |x|_{\mathcal{G}}^2,$$

به ازای هر  $x \in \mathbb{H}^n$ . در نتیجه،  $T^* A T \in E_{\mathcal{G}}$ . توجه کنید که آخرین برابری سمت راست در عبارت بالا از لم ۲.۹ به دست آمده است. از سوی دیگر

$$\begin{aligned} f(T^* A T) &= \sqrt{\det(\varepsilon'(T^* A T))} \\ &= \sqrt{|\det \varepsilon'(T)|^2} \sqrt{\det \varepsilon'(A)} \\ &= \sqrt{1^2} \sqrt{\det \varepsilon'(A)} \\ &= f(A). \end{aligned}$$

توجه کنید که در عبارت بالا برابری  $|\det \varepsilon'(T)| = 1$  از لم ۲.۹ حاصل می‌شود. در نتیجه

$$f(A) = \sup \{f(P) : P \in E_{\mathcal{G}}\} = f(T^*AT).$$

ولی  $A, T^*AT \in E_{\mathcal{G}}$ . بنابراین، از لم ۵.۹ نتیجه می‌گیریم که  $A = T^*AT$ . این برهان را کامل می‌کند.  $\square$

## مراجع

- [1] H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéaires, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **195** (1932), 1367–1369.
- [2] B. Bollobás, *Linear Analysis. An Introductory Course*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Integration II, Chapters 7-9* (translated from French into English by S.K. Berberian), Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [4] W. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**(1) (1905), 430–434.
- [5] P.M. Cohn, *Skew Fields: Theory of General Division Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [6] E. Deutsch and H. Schneider, Bounded groups and norm Hermitian matrices, *Linear Algebra Appl.*, **9** (1974), 9–27.
- [7] P.K. Draxl, *Skew Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [8] I.N. Herstein, *Noncommutative Rings, Carus Mathematical Monographs*, no. 15, The Mathematical Association of America, 1968.
- [9] T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [10] T.K. Lee and Y. Zhou, On irreducible and transitive subalgebras in matrix algebras, *Linear Multilinear Algebra*, **57**(7) (2009), 659–672.
- [11] V.I. Lomonosov, H. Radjavi, and V.G. Troitsky, Sesquitransitive and localizing operator algebras, *Integral Equations Oper. Theory*, **60**(3) (2008), 405–418.

- [12] L. Mirsky, An inequality for positive definite matrices, *Am. Math. Mon.*, **62**(6) (1955), 428–430.
- [13] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer Verlag, New York, 2000.
- [14] L. Rodman, *Topics in Quaternion Linear Algebra*, Princeton University Press, New Jersey, 2014.
- [15] L.A. Wolf, Similarity of matrices in which elements are real quaternions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42**(10) (1936), 737–743.
- [16] B.R. Yahaghi, On  $F$ -algebras of algebraic matrices over a subfield  $F$  of the center of a division ring, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 599–613.
- [17] B.R. Yahaghi, On irreducible semigroup of matrices with traces in a subfield, *Linear Algebra Appl.*, **383** (2004), 17–28.
- [18] B.R. Yahaghi, *Reducibility Results on Operator Semigroups*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, Halifax, Canada, 2002.