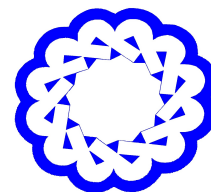


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

الگوریتم قاب اصلاح شده و تسریع همگرایی آن با روش چبیشف حسن جمالی*، محسن کلاه‌دوزآ

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

چکیده

هدف این مقاله بهبود نرخ همگرایی الگوریتم قاب براساس روش‌های تکراری ریچاردسون و چبیشف است. ابتدا بر اساس روش تکراری ریچاردسون، نرخ همگرایی موجود در الگوریتم قاب را مربع نموده که در نتیجه تعداد تکرارها نصف شده و سرعت همگرایی افزایش می‌یابد، سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف این سرعت را نیز بهبود می‌بخشیم. اهمیت این روش‌ها بخصوص زمانی مشخص می‌شود که قاب مورد استفاده دارای عدد شرطی (نسبت کران بالا به کران پایین) بد وضع باشد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۱۰ اسفند ۱۳۹۶

پذیرفته شده: ۲۰ تیر ۱۳۹۷

دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: اصغر رحیمی

کلمات کلیدی:

الگوریتم قاب، روش

ریچاردسون، روش

چبیشف، نرخ همگرایی.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: jamali@vru.ac.ir; jamalihassan28@yahoo.com (حسن جمالی)،

mkolahdouz@stu.vru.ac.ir; mkolahdouz64@gmail.com (محسن کلاه‌دوز).

<http://doi.org/10.22072/wala.2018.82366.1162>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

در بیشتر مسایل پردازش سیگنال، برای بازسازی یک سیگنال مانند f در یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، اطلاعات آن سیگنال بصورت دنباله‌ای از اسکالرهای $\langle f, e_n \rangle$ بیان می‌شود که برای نمونه می‌توان به بازسازی یک سیگنال با استفاده از پایه‌های متعامد یکه و یا قاب‌ها اشاره کرد. اما سوال اساسی، چگونگی محاسبه این دنباله و یا حتی تقریب آن است. در این راستا برای تقریب بوسیله قاب‌ها تلاش‌هایی در قالب الگوریتم قاب و تسریع همگرایی آن از طریق روش چپیشف انجام گرفته است [۲، ۳]. در سراسر این مقاله H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، I یک مجموعه اندیس‌گذار شمارش‌پذیر و I_H عملگر همانی روی H را نمایش می‌دهند.

دنباله $\{f_k\}_{k \in I}$ در H یک قاب برای H نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که رابطه‌ی

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k \in I} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2,$$

برای هر $f \in H$ برقرار باشد. A و B به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین را کران‌های بهینه قاب می‌گویند. برای این قاب عملگر قاب S به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S : H \rightarrow H, \quad S f = \sum_{k \in I} \langle f, f_k \rangle f_k.$$

ثابت می‌شود [۲] که S عملگری معکوس‌پذیر، معین مثبت و خودالحاق بوده و

$$A I_H \leq S \leq B I_H. \quad (1.1)$$

اکنون با توجه به خواص S فرمول بازسازی یک سیگنال برابراست با

$$f = S S^{-1} f = \sum_{k \in I} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k.$$

اما لازمه به‌کارگیری این فرمول، محاسبه معکوس عملگر قاب است که این موضوع وقتی H دارای بعد بالا و یا بعد نامتناهی باشد ممکن است پیچیده و یا حتی ناممکن باشد. با توجه به رابطه اخیر با قراردادن

$u = S^{-1}f$ مسأله بازنویسی f ، معادل با مسأله یافتن جواب معادله عملگری

$$Su = f, \quad (2.1)$$

می‌باشد. در الگوریتم قاب ارائه شده در [۲]، جواب تقریبی این معادله با روشی تکراری و با نرخ همگرایی $\frac{B-A}{A+B}$ به دست می‌آید. با اعمال روش چبیشف بر روی آن، برای حالتی که عدد شرطی این معادله (نسبت کران بالا به کران پایین) بالا باشد، به روشی تکراری با نرخ همگرایی $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^i}$ که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{A}}{\sqrt{B} - \sqrt{A}}$ ، منجر می‌شود [۳]. در واقع سرعت همگرایی در الگوریتم‌های عددی حل یک معادله عملگری با عملگر معین مثبت به عدد شرطی آن، که به صورت نسبت بزرگترین مقدار ویژه بر کوچک‌ترین مقدار ویژه تعریف می‌شود، وابسته است. در عملگر قاب، این مقادیر ویژه، متناظر با کران‌های بهینه‌ی قاب می‌باشند. معمول‌ترین روش برای حل تقریبی معادلات عملگری استفاده از روش ریچاردسون است. این روش برای معادله (۲.۱) به صورت

$$u_{k+1} = u_k + a_k (f - Su_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

می‌باشد که در آن u_0 یک حدس اولیه و $a_k > 0$ پارامترهایی هستند که به طور مناسب انتخاب می‌شوند. معادله (۳.۱) به سادگی نتیجه می‌دهد بردارهای باقیمانده $r_k = f - Su_k$ و خطای $u - u_k$ ، به صورت

$$r_k = Q_k(S)r_0, \quad u - u_k = Q_k(S)(u - u_0),$$

هستند که در آن $Q_k(x) = \prod_{i=1}^k (1 - a_i x)$ و $Q_k(0) = 1$. با انتخاب مناسب پارامترهای $\{a_i\}_{i=1}^{k-1}$ در (۳.۱) می‌توان نرخ همگرایی این روش تکراری را بهبود بخشید.

لم ۱.۱. [۴] اگر $\{f_k\}_{k \in I}$ قابی با کران‌های A, B و عملگر قاب S باشد، آنگاه

$$\left\| I_H - \frac{2}{A+B} S \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B} \right).$$

بر این اساس، متداولترین و آسان‌ترین الگوریتم قاب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲.۱. [۴] فرض کنید $\{f_k\}_{k \in I}$ یک قاب برای H با کران‌های پایین و بالای A, B و عملگر قاب S باشد. برای $f \in H$ دنباله $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ تعریف شده به صورت

$$u_0 = 0, \quad u_i = u_{i-1} + \frac{2}{A+B} (f - S u_{i-1}), \quad i \geq 1, \quad (4.1)$$

در رابطه

$$\|u - u_i\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^i \|u\|,$$

صادق است.

اکنون با توجه به این قضیه می‌توان دید

$$\begin{aligned} \|f - S u_i\| &= \|S u - S u_i\| \\ &\leq \|S\| \|u - u_i\| \\ &\leq \|S\| \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^i \|f\|, \end{aligned}$$

و لذا همگرایی $\{S u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ به f با نرخ همگرایی $\frac{B-A}{A+B}$ نتیجه می‌شود. همچنین در [۳] نشان داده می‌شود که با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌توان این همگرایی را سرعت بخشید و الگوریتمی با نرخ همگرایی $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}$ با $\sigma = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{A}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}}$ به دست آورد که کمتر از $\frac{B-A}{A+B}$ است. در فصل بعد با توسیع روش ریچاردسون، الگوریتم قاب اصلاح شده با نرخ همگرایی $\left(\frac{B-A}{A+B}\right)^2$ را ارائه می‌دهیم که مربع شدن نرخ همگرایی و تقلیل تعداد تکرارها به نصف، در مقایسه با الگوریتم قاب، را نتیجه می‌دهد.

پس از آن مجدداً با به‌کارگیری روش چبیشف اقدام به تسریع همگرایی الگوریتم قاب اصلاح شده نموده که این بار نرخ همگرایی جدید به صورت $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^{2i}}$ می‌باشد که در آن $\sigma = \frac{\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{2AB}}$. بوضوح دیده می‌شود که این نرخ همگرایی در مقایسه با کمیت متناظر در سه روش مطرح شده قبل مقدار کمتری را نشان می‌دهد.

۲. الگوریتم قاب اصلاح‌شده براساس روش تکراری ریچاردسون

در این بخش الگوریتم قاب ارائه شده به صورت (۳.۱) را تعدیل کرده و الگوریتم جدیدی ارائه خواهیم کرد که نرخ همگرایی آن مربع نرخ همگرایی الگوریتم قاب (۳.۱) می‌باشد.

لم ۱.۲. فرض کنید $\{f_k\}_{k \in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A, B و عملگر قاب S باشد. در این صورت

$$\left\| I_H - \frac{4}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B} \right)^2. \quad (1.2)$$

اثبات. با توجه به لم ۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned} \left\| I_H - \frac{4}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \right\| &= \left\| I_H - \frac{4}{A+B} S + \frac{4}{(A+B)^2} S^2 \right\| \\ &= \left\| \left(I_H - \frac{2}{A+B} S \right)^2 \right\| \\ &\leq \left\| I_H - \frac{2}{A+B} S \right\|^2 \leq \left(\frac{B-A}{A+B} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

□

و از این جا حکم قضیه ثابت می‌شود.

اکنون اگر $\{f_k\}_{k \in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A, B و عملگر قاب S باشد آن‌گاه با در نظر گرفتن معادله عملگری $Su = f$ و با قراردادن

$$u_0 = 0, \quad u_i = u_{i-1} + \frac{4}{A+B} \left(I - \frac{1}{A+B} S \right) S (f - u_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

رابطه بازگشتی خواهیم داشت که آن را الگوریتم قاب اصلاح‌شده بر اساس روش ریچاردسون می‌نامیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که این الگوریتم مربع نرخ همگرایی الگوریتم قاب (۴.۱) را داراست.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{f_k\}_{k \in I}$ یک قاب برای H با کران‌های A, B و عملگر قاب S باشد. برای

$f \in H$ ، دنباله $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$u_0 = 0, \quad u_i = u_{i-1} + \frac{\gamma}{A+B} \left(I - \frac{1}{A+B} S \right) (f - S u_{i-1}), \quad i \geq 1. \quad (3.2)$$

در این صورت

$$\|u - u_i\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right)^{\gamma i} \|u\|.$$

اثبات. از آنجا که $Su = f$ با توجه به تعریف u_i داریم:

$$\begin{aligned} u - u_i &= u - u_{i-1} - \frac{\gamma}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) (f - S u_{i-1}) \\ &= \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \right) (u - u_{i-1}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|u - u_i\| &= \left\| \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \right) (u - u_{i-1}) \right\| \\ &\leq \left\| I_H - \frac{\gamma}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S \right\| \|u - u_{i-1}\|, \end{aligned}$$

□

لذا طبق رابطه (۱.۲) حکم قضیه نتیجه می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نرخ همگرایی این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم قاب معمول مربع شده است و در نتیجه تعداد تکرارها به نصف کاهش می‌یابد. در واقع، در الگوریتم قاب معمول نرخ همگرایی برابر $\left(\frac{B-A}{B+A} \right)$ است در حالیکه با توجه به قضیه قبل، در الگوریتم قاب اصلاح شده این کمیت برابر $\left(\frac{B-A}{B+A} \right)^2$ می‌باشد.

این ویژگی به خصوص وقتی نمایان‌تر می‌شود که A, B نسبت به هم دور باشند و به عبارتی دیگر عدد شرطی قاب، یعنی $\frac{A}{B}$ ، بد وضع باشد. در واقع هرچه عدد شرطی نزدیک‌تر به ۱ باشد همگرایی الگوریتم سریع‌تر خواهد بود.

۳. استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف در تسریع همگرایی الگوریتم قاب اصلاح شده

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، همگرایی الگوریتم قاب اصلاح شده تحت تأثیر کران‌های بالا و پایین قاب یا به عبارتی عدد شرطی قاب می‌باشد. متأسفانه در بسیاری از قاب‌های مورد توجه، فقط یک کران بالای خام و وجود یک کران پایین $A > 0$ شناخته شده‌اند. بنابراین به منظور حفظ الگوریتم قاب اصلاح شده، سعی می‌کنیم قدرت همگرایی این الگوریتم را با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف تسریع بخشیم.

در این بخش با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف الگوریتمی را ارائه خواهیم کرد که نرخ همگرایی آن $\frac{2\sigma^i}{1+\sigma^2i}$ ، با $\sigma = \frac{\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{2AB}}$ می‌باشد. این نرخ همگرایی به مراتب قوی‌تر از نرخ همگرایی الگوریتم ارائه شده در بخش قبل می‌باشد.

برای شروع فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$ $h_i = \sum_{k=1}^i a_{i_k} u_k$ با این خاصیت که

$$\sum_{k=1}^i a_{i_k} = 1, \quad (1.3)$$

و دنباله $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ طبق رابطه (۳.۲) می‌باشد. توجه کنید که شرط (۱.۳) ایجاب می‌کند که اگر $u_1 = u_2 = \dots = u_i = u$ آنگاه $h_i = u$.

بنابراین با توجه به روابط

$$\begin{aligned}
 u - u_k &= u - u_{k-1} - \frac{\gamma}{A+B} \left(I - \frac{1}{A+B} S \right) S (f - u_{k-1}) \\
 &= u - u_{k-1} - \left(\frac{\gamma}{A+B} - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S \right) S (f - u_{k-1}) \\
 &= u - u_{k-1} - \left(\frac{\gamma}{A+B} - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S \right) S (u - u_{k-1}) \\
 &= \left(I - \frac{\gamma}{A+B} S + \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - u_{k-1}) \\
 &= \left(I - \frac{\gamma}{A+B} S \right)^2 (u - u_{k-1}),
 \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
 u - h_i &= \sum_{k=1}^i a_{i_k} u - \sum_{k=1}^i a_{i_k} u_k \\
 &= \sum_{k=1}^i a_{i_k} (u - u_k) \\
 &= \sum_{k=1}^i a_{i_k} \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} S \right)^{2k} (u - u_0).
 \end{aligned}$$

با قراردادن $R = \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} S \right)^2$ و $Q_i(x) = \sum_{k=1}^i a_{i_k} x^k$ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$u - h_i = Q_i(R)(u - u_0). \quad (2.3)$$

در نتیجه خطای ناشی از این تقریب، حاصل اعمال یک چندجمله‌ای برحسب R بر خطای اولیه $(u - u_0)$

است.

نکته ۱.۳. بنا بر لم ۱.۱ داریم:

$$-\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^2 \|f\|^2 \leq \left\langle \left(I - \frac{2}{A+B}S\right)^2 f, f \right\rangle \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^2 \|f\|^2,$$

لذا طیف R در بازه $[-\alpha, \alpha]$ قرار می‌گیرد که در آن $\alpha = \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^2$.

بنابراین

$$\|u - h_i\| \leq \|Q_i(R)\| \|u - u_0\| \leq \max_{|x| \leq \alpha} |Q_i(x)| \|u - u_0\|. \quad (3.3)$$

اکنون به منظور مینیمم کردن این خطا، باید به دنبال حل مسأله مینیمم‌سازی زیر باشیم:

$$\min_{Q \in \mathbb{Q}_i} \max_{|x| \leq \rho} |Q(x)|, \quad (4.3)$$

که در آن

$$\mathbb{Q}_i := \{Q(x) : \deg Q \leq i, Q(1) = 1\}.$$

جواب این مسأله را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های چیشف بیان کرد [۱]. در واقع چندجمله‌ای‌های چیشف به صورت دنباله بازگشتی زیر بیان می‌شوند:

$$c_0(x) = 1, \quad c_1(x) = x,$$

و برای $n \geq 2$

$$c_i(x) = 2xc_{i-1}(x) - c_{i-2}(x). \quad (5.3)$$

همچنین نشان داده می‌شود [۵، ۱] که

$$c_i(x) = \begin{cases} \cos(i \cos^{-1}(x)), & |x| \leq 1 \\ \cosh(i \cosh^{-1}(x)) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^i + (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-i}], & |x| > 1 \end{cases} \quad (۶.۳)$$

لم زیر بیانگر آن است که چگونه این چندجمله‌ای‌ها جواب مسأله مینیم‌سازی (۴.۳) را در اختیار ما قرار می‌دهد.

لم ۲.۳. [۵] برای $1 \leq b \leq a$ ، فرض کنید $P_i(x) = \frac{c_i\left(\frac{\sqrt{x-a-b}}{b-a}\right)}{c_i\left(\frac{\sqrt{-a-b}}{b-a}\right)}$. در این صورت برای هر $Q \in \mathbb{Q}_i$

$$\max_{a \leq x \leq b} |P_i(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |Q(x)|,$$

به‌علاوه

$$\max_{a \leq x \leq b} |P_i(x)| = \frac{1}{c_i\left(\frac{\sqrt{-a-b}}{b-a}\right)}.$$

نتیجه ۳.۳. چندجمله‌ای $\frac{c_i\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ ، اندازه خطای $h_i - u$ را مینیم می‌کند.

اثبات. برای اثبات کافی است در لم قبل قرار دهیم $a = -\alpha$ و $b = \alpha$. در نتیجه چندجمله‌ای

$$P_i(x) = \frac{c_i\left(\frac{\sqrt{x+\alpha-\alpha}}{\alpha+\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{\sqrt{-\alpha-\alpha}}{\alpha+\alpha}\right)} = \frac{c_i\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (۷.۳)$$

□

خطای مورد نظر را مینیم خواهد کرد.

اکنون به منظور به دست آوردن الگوریتمی مناسب بر اساس این چندجمله‌ای‌ها، ابتدا ثابت می‌کنیم یک رابطه بازگشتی به صورت زیر برای جواب‌های تقریبی h_i برقرار است.

گزاره ۴.۳. برای هر $i \geq 2$ ، جواب تقریبی h_i با کمترین خطای ممکن در رابطه زیر صادق است:

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{\gamma}{A+B} \left(I_H - \frac{1}{A+B} S \right) S (f - h_{i-1}) \right] + h_{i-2},$$

$$\beta_i = \frac{\gamma c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha} \right)}{c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right)} \text{ که در آن}$$

اثبات. ترکیب رابطه‌های (۵.۳) و (۷.۳) برای $i \geq 2$ نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_i(x) &= c_i \left(\frac{x}{\alpha} \right) = \frac{\gamma x}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right) - c_{i-2} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \\ &= \frac{\gamma x}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_{i-1}(x) - c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_{i-2}(x). \end{aligned}$$

با قراردادن R به جای x در این رابطه نتیجه می‌شود:

$$c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_i(R) = \frac{\gamma R}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_{i-1}(R) - c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) P_{i-2}(R).$$

حال با اعمال طرفین تساوی بر $(u - u_0)$ و با توجه به رابطه (۲.۳) داریم:

$$c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right) (u - h_i) = \frac{\gamma}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right) R (u - h_{i-1}) - c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) (u - h_{i-2}),$$

و با قراردادن $R = \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} S \right)^2$ داریم:

$$c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right) u - c_i \left(\frac{1}{\alpha} \right) h_i = \frac{\gamma}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(I_H - \frac{\gamma}{A+B} S \right)^2 (u - h_{i-1}) - c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) (u - h_{i-2}),$$

یا به‌طور معادل

$$c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right) u - c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right) h'_i = \frac{\gamma}{\rho} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) u$$

$$+ \frac{\gamma}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left[-h_{i-1} - \left(\frac{\gamma}{A+B} S - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - h_{i-1}) \right]$$

$$- c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right) u + c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right) h_{i-2}.$$

سرانجام با استفاده از رابطه (۷.۳) برای $i \geq 2$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right) h_i = \frac{\gamma}{\alpha} c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(h_{i-1} + \left(\frac{\gamma}{A+B} S - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - h_{i-1}) \right) - c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right) h_{i-2}.$$

بنابراین

$$h_i = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \left[h_{i-1} + \left(\frac{\gamma}{A+B} S - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - h_{i-1}) \right] - \frac{c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right)} h_{i-2}. \quad (۸.۳)$$

از طرفی بنا به رابطه (۷.۳) و با توجه به تعریف β_i داریم:

$$1 - \beta_i = 1 - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{c_{i-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right)} = - \frac{c_{i-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{c_i \left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

در این حالت می‌توان رابطه (۸.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} + \left(\frac{\gamma}{A+B} S - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - h_{i-1}) \right] + (1 - \beta_i) h_{i-2},$$

یا به‌طور معادل

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} - h_{i-2} + \left(\frac{\gamma}{A+B} S - \frac{\gamma}{(A+B)^2} S^2 \right) (u - h_{i-1}) \right] + h_{i-2}.$$

اکنون ترکیب این رابطه با $Su = f$ نتیجه می‌دهد:

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{\alpha}{A+B} \left(I - \frac{1}{(A+B)^2} S \right) (f - S h_{i-1}) \right] + h_{i-2},$$

□

و بدین ترتیب اثبات گزاره کامل می‌شود.

در این جا با کمی محاسبات ساده می‌توان دید:

$$\beta_i = \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} \beta_{i-1} \right)^{-1},$$

و در نتیجه می‌توان فرمول بازگشتی ساده‌تر زیر را برای محاسبه جواب تقریبی h_i به دست آورد:

$$h_i = \beta_i \left[h_{i-1} - h_{i-2} + \frac{\alpha}{A+B} \left(I - \frac{1}{(A+B)^2} S \right) (f - S h_{i-1}) \right] + h_{i-2}, \quad (9.3)$$

که در آن

$$h_0 = 0, \quad h_1 = \frac{\alpha}{A+B} \left(I - \frac{1}{(A+B)^2} S \right) f, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_i = \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} \beta_{i-1} \right)^{-1}.$$

قضیه زیر همگرایی این دنباله از جواب‌های تقریبی به جواب دقیق معادله $Su = f$ را ثابت می‌کند.

قضیه ۵.۳. اگر $\{f_k\}_{k \in I}$ یک قاب با کران‌های پایین و بالای A, B همراه با عملگر قاب S بوده و u جواب دقیق معادله $Su = f$ باشد، آنگاه دنباله $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ تعریف شده به صورت (۹.۳) در رابطه زیر صادق است:

$$\|u - h_i\| \leq \frac{\alpha \sigma^i}{1 + \sigma^{2i}} \frac{\|f\|}{A},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{2AB}} \text{ که در آن}$$

اثبات. با استفاده از لم (۲.۳) و رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \|u - h_i\| &\leq \frac{1}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \|u - h_0\| = \frac{1}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \|u\| \\ &\leq \frac{1}{c_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \frac{\|f\|}{A}, \end{aligned}$$

که در آن آخرین نامساوی با توجه به رابطه (۱.۱) به دست آمده است. از طرف دیگر، چون $\frac{1}{\alpha} > 1$ لذا بنا به رابطه (۶.۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} c_i\left(\frac{1}{\rho}\right) &= c_i\left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}\right)^i \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}\right)^{-i} \right] \\ &= \dots = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2} + \sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2} - \sqrt{2AB}}\right)^i + \left(\frac{\sqrt{A^2+B^2} + \sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2} - \sqrt{2AB}}\right)^{-i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^i} + \sigma^i \right) = \frac{1 + \sigma^{2i}}{2\sigma^i}, \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{A^2+B^2} - \sqrt{2AB}}{\sqrt{A^2+B^2} + \sqrt{2AB}} \text{ که در آن}$$

□

این تساوی همراه با رابطه (۱۰.۳)، اثبات قضیه را کامل می‌کند.

از آنجا که $\sigma < \alpha$ ، این قضیه نشان می‌دهد نرخ همگرایی دنباله $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ کمتر از نرخ همگرایی دنباله $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ می‌باشد. همچنین این نرخ همگرایی از نرخ همگرایی دنباله $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ حاصل از تسریع همگرایی

الگوریتم قاب ارائه شده در [۲، ۳] کمتر است.

مراجع

- [1] C.C. Cheny, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw Hill, NY., 1996.
- [2] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser, Boston, 2003.
- [3] K.H. Gröchenig, Acceleration of the frame algorithm, *IEEE Trans. Signal Process.*, **41**(12) (1993), 3331–3340.
- [4] H. Jamali and E. Afroomand, Applications of frames in Chebyshev and conjugate gradient methods, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **43**(5) (2017), 1265–1279.
- [5] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell Publishing Company, 1969.