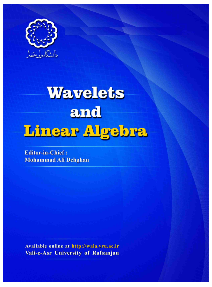
موجک‌ها و جبرخطی ۴(۳) (۱۳۹۷) ۴۵-۵۳



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

یک کران برای حدس فایتینگر

محمدعلی حسنخانی‌فرد[۱]

[۱]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۹ دی ۱۳۹۶
پذیرفته شده: ۱ خرداد ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: فرشید عبداللهی

کلمات کلیدی:

دنباله پایه ریس، قاب کیپ، حدس فایتینگر، دنباله (δ, r)-ریس‌پذیر.

چکیده

در الین مقاله با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در فضای با بعد متناهی $\mathbb{C}^n$، یک کلاس از قاب‌های کیپ هم‌نرم ریس ناپذیر معرفی می‌شود و با استفاده از کلاس مذکور یک کران برای حدس فایتینگر ارائه می‌شود. طبق حدس فایتینگر که البته اخیرا ثابت شده است، برای $A, C > 0$ داده شده یک ثابت کلی $\delta > 0$ مستقل از n وجود دارد به‌طوریکه هر قاب A-کیپ C-هم‌نرم در $\mathbb{C}^n$ می‌تواند به r دنباله پایه ریس با کران پایین پایه ریس δ افراز شود. در این مقاله نشان داده می‌شود که $r > \frac{A}{C^2}$.

آدرس ایمیلها: m.hasankhani@vru.ac.ir (محمدعلی حسنخانی‌فرد).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.79107.1147

۱. مقدمه

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر ثابت‌های $A > 0$، $B < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A\left\|f\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\left\|f\right\|^2, \qquad (1.1)$$

که در آن B, A به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. نامساوی دومی در شرط قاب (۱.۱) شرط بسل[1] برای دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است. اگر $A = B$، آنگاه قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کیپ و اگر $A = B = 1$ آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کیپ نرمال شده یا قاب پارسوال گویند.

اگر همه اعضای قاب دارای نرم یکسان باشند قاب را قاب هم‌نرم نامند، به ویژه اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب کیپ با کران قاب A باشد به‌طوریکه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|f_k\| = C$ آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب A-کیپ C-هم‌نرم گویند.

قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کراندار گویند اگر یک ثابت مثبت λ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|f_k\| \geq \lambda$. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله قاب نامیده می‌شود اگر یک قاب برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد.

عملگر خطی کراندار

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

را عملگر قاب اولیه و عملگر خطی کراندار

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Sf = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > f_k$$

را عملگر قاب برای قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ گویند.

[1] Bessel

یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ یک دنباله به صورت $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ و $U \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر معکوس پذیر است. هر پایه ریس یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس است اگر و تنها اگر کامل باشد و ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر دنباله متناهی $\{c_k\}_{k\in I}$ از اعداد مختلط داشته باشیم:

$$A\sum_{k\in I}\left|c_k\right|^2 \leq \Big\|\sum_{k\in I} c_k f_k\Big\|^2 \leq B\sum_{k\in I}\left|c_k\right|^2,$$

که در آن B, A به ترتیب کران پایه ریس پایین و کران پایه ریس بالای $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده می‌شوند. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله پایه ریس نامیده می‌شود اگر یک پایه ریس برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد.

برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ عملگر انتقال و عملگر مدولی روی $L_2(\mathbb{R})$ به ترتیب با

$$(T_a g)(x) = g(x-a), \quad (E_b g)(x) = e^{2\pi ibx} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

تعریف می‌شوند. یک قاب گابور یک قاب برای فضای هیلبرت $L_2(\mathbb{R})$ به صورت $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ است که در آن $a, b > 0$ و g یک تابع ثابت در $L_2(\mathbb{R})$ است. برای اطلاعات بیشتر درباره قاب‌ها به مراجع [۳، ۴، ۷] مراجعه کنید.

فایتینگر[2] در مطالعه قاب‌های گابور متوجه شد همه مثال‌های قاب‌های گابور دارای این خاصیت هستند که به صورت اجتماع متناهی از دنبالهای پایه ریس نوشته می‌شوند و این حدس را پیشنهاد داد:

حدس فایتینگر: هر قاب کراندار را می‌توان به صورت اجتماع متناهی از دنبالهای پایه ریس نوشت.

در مرجع [۱] نشان داده شده است که حدس فایتینگر با حدس فیچتنگر متناهی هم ارز است.

حدس فایتینگر متناهی: برای هر $B, C > 0$ یک عدد طبیعی $r = r(B, C)$ و یک عدد $A = A(B, C) > 0$ وجود دارد به‌طوریکه اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathbb{C}^n$ با کران بالای قاب B باشد و $\|f_i\| \geq C$ برای هر $i \in I$، آنگاه I را می‌توان به مجموعه‌های $\{I_j\}_{j=1}^{r}$ افراز کرد به‌طوریکه برای هر $1 \leq j \leq r$ دنباله $\{f_i\}_{i\in I_j}$ یک دنباله پایه ریس با کران پایه ریس پایین A و کران پایه ریس بالای B است.

[2] Feichtinger

حدس فایتینگر با مساله مشهور کیدیسون- سینگر[۳] هم ارز است و این مساله اخیرا ثابت شده است [۵، ۶]. بنابراین هر قاب کراندار را می‌توان به زیر مجموعه‌هایی که دنباله پایه ریس هستند، افراز کرد. در این مقاله روی تعداد این زیر مجموعه‌ها کار می‌کنیم و در واقع یک کلاس از قاب‌های A- کیپ C- هم‌نرم ارائه می‌دهیم که نمی‌توان آن را به r دنباله پایه ریس افراز کرد که در آن $r \leq \frac{A}{C^۲}$، $\delta > ۰$ و $C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}} := \left\{ \sqrt{\frac{A}{m}} | m \in \mathbb{N} \right\}$.

۲. قاب‌های ریس پذیر

در این بخش با استفاده ار تبدیل فوریه گسسته در $\mathbb{C}^n$ یک کلاس از قاب‌های کیپ هم‌نرم می‌سازیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $r \in \mathbb{N}$ ، $r \geq ۲$ و $\delta > ۰$. یک خانواده از بردارها $\{f_i\}_{i=۱}^m$ برای فضای هیلبرت n-بعدی $\mathcal{H}_n$ را (δ, r)-ریس پذیر گویند اگر یک افراز $\{I_j\}_{j=۱}^r$ از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای همه $j \in \{۱, ۲, \ldots, r\}$ و اسکالرهای $\{c_i\}_{i \in I_j}$ داشته باشیم:

$$\Big\| \sum_{i \in I_j} c_i f_i \Big\|^۲ \geq \delta \sum_{i \in I_j} \big| c_i \big|^۲.$$

چون حدس فایتینگر اکنون ثابت شده است لذا $\delta > ۰$ مستقل از n و $r \geq ۲$ وجود دارند به‌طوریکه هر قاب کراندار $\{f_i\}_{i=۱}^m$ برای فضای هیلبرت n-بعدی $\mathcal{H}_n$، (δ, r)-ریس پذیر است [۱].

اکنون این سوال مطرح است:

فرض کنید $r \geq ۲$ داده شده است، آیا یک $\delta > ۰$ مستقل از n وجود دارد به‌طوریکه هر قاب کراندار $\{f_i\}_{i=۱}^m$ برای فضای هیلبرت n-بعدی $\mathcal{H}_n$، (δ, r)-ریس پذیر باشد؟

در مرجع [۲] نشان داده شده است که یک قاب ۲-کیپ ۱-هم‌نرم وجود دارد به‌طوریکه برای هر $\delta > ۰$، $(\delta, ۲)$-ریس پذیر نیست.

درگزاره زیر قاب‌های A-کیپ در $\mathbb{C}^n$ کاملا مشخص می‌شوند.

گزاره ۲.۲. *[۳] یک دنباله $\{f_i\}_{i=۱}^m$ از بردارها در $\mathbb{C}^n$ یک قاب A-کیپ برای $\mathbb{C}^n$ است اگر و تنها اگر*

---
[3] Kadison-Singer

ماتریسی که سطرهای آن f_i ها است دارای ستونهای متعامد باشد و مجموع توان دوم اعداد ستونهای آنها برابر A شود.

فرض کنید D_n تبدیل فوریه گسسته $n \times n$ به صورت زیر باشد:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{n}} & e^{\frac{4\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{n}} & e^{\frac{8\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{4\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-1)}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-2)}{n}} & \cdots & e^{\frac{2\pi i(n-2)(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-2)(n-1)}{n}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-1)}{n}} & \cdots & e^{\frac{2\pi i(n-1)(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-1)(n-1)}{n}} \end{bmatrix}$$

تبدیل فوریه گسسته D_n یک ماتریس یکانی است که سطرهای (ستونهای) آن یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ تشکیل می‌دهند [۳، قضیه (۱.۴.۱)]. همچنین قدرمطلق همه درایه‌های D_n برابر $\frac{1}{\sqrt{n}}$ است. تبدیل فوریه گسسته D_n ابزار اساسی در اثبات قضیه اصلی این مقاله است. همچنین از لم زیر از جبر خطی استفاده می‌شود.

لم ۳.۲. *اگر A یک ماتریس $m \times n$ با $m < n$ باشد، آنگاه یک بردار ناصفر X با $\|X\| = 1$ در $\mathbb{C}^n$ وجود دارد به‌طوریکه $AX = 0$.*

در قضیه زیر با استفاده از تبدیل فوریه گسسته D_n یک کلاس از قاب‌های هم‌نرم ریس ناپذیر ساخته می‌شود.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ و $A > 0$. در این‌صورت یک کلاس از قاب‌های A-کیپ C-هم‌نرم وجود دارد که (δ, r)- ریس پذیر نیست برای هر $r \leq \frac{A}{C^2}$ و $\delta > 0$ که در آن $C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}}$.*

اثبات. فرض کنید $A > 0$، $C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}}$، $r \in \mathbb{N}$، $2 \leq r \leq \frac{A}{C^2}$ و $\delta > 0$. همچنین فرض کنید D_{rn} تبدیل فوریه گسسته $rn \times rn$ باشد. فرض کنید D^1_{rn} ماتریس $rn \times rn$ حاصل از ضرب $n-1$ ستون اول ماتریس D_{rn} در $\sqrt{rC^2}$ و $(r-1)n+1$ ستون باقیمانده در $\sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}$ باشد. برای $2 \leq i \leq \frac{A}{C^2}$،

فرض کنید D^i_{rn} ماتریس $rn \times rn$ حاصل از ضرب $n - ۱$ ستون اول ماتریس D_{rn} در $\sqrt{\frac{C^۲(A-rC^۲)}{A-C^۲}}$ و $(r - ۱)n + ۱$ ستون باقیمانده در $\sqrt{\frac{C^۲[A(r-۱)n+A-rC^۲]}{(A-C^۲)[(r-۱)n+۱]}}$ باشد، (جدول ۱ را ببینید).

اکنون فرض کنید D ماتریس $\frac{A}{C^۲}rn \times rn$ حاصل از چیدن $\frac{A}{C^۲}$ تا ماتریس $rn \times rn$، $\{D^i_{rn}\}_{i=۱}^{\frac{A}{C^۲}}$ روی همدیگر مطابق جدول ۱ باشد:

جدول ۱

	$(n-۱) - Columns$	$[(r-۱)n+۱] - Columns$
$D^۱_{rn}$	$\sqrt{rC^۲}$	$\sqrt{\frac{rC^۲}{(r-۱)n+۱}}$
$D^۲_{rn}$	$\sqrt{\frac{C^۲(A-rC^۲)}{A-C^۲}}$	$\sqrt{\frac{C^۲[A(r-۱)n+A-rC^۲]}{(A-C^۲)[(r-۱)n+۱]}}$
$D^۳_{rn}$	$\sqrt{\frac{C^۲(A-rC^۲)}{A-C^۲}}$	$\sqrt{\frac{C^۲[A(r-۱)n+A-rC^۲]}{(A-C^۲)[(r-۱)n+۱]}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$D^{\frac{A}{C^۲}}_{rn}$	$\sqrt{\frac{C^۲(A-rC^۲)}{A-C^۲}}$	$\sqrt{\frac{C^۲[A(r-۱)n+A-rC^۲]}{(A-C^۲)[(r-۱)n+۱]}}$

همچنین فرض کنید $\{f_i\}_{i=۱}^{\frac{A}{C^۲}rn}$ بردارهای سطری ماتریس D که عضو $\mathbb{C}^{rn}$ هستند، باشند و $\{g_i\}_{i=۱}^{rn}$ بردارهای ستونی ماتریس D که عضو $\mathbb{C}^{\frac{A}{C^۲}rn}$ هستند، باشند.

برای $۱ \le i \le rn$ داریم:

$$\begin{aligned}\left\|f_i\right\|^۲ &= \frac{۱}{rn}\Big[(n-۱)rC^۲ + [(r-۱)n+۱]\frac{rC^۲}{(r-۱)n+۱}\Big]\\ &= C^۲,\end{aligned}$$

و برای $rn+1 \leq i \leq \frac{A}{C^2}rn$ داریم:

$$\|f_i\|^2 = \frac{1}{rn}\Big[(n-1)\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2} + [(r-1)n+1]\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}\Big] \\ = C^2.$$

همچنین برای $1 \leq i \leq n-1$ داریم:

$$\|g_i\|^2 = rn(\frac{1}{rn})(rC^2) + (\frac{A}{C^2}-1)(rn)(\frac{1}{rn})(\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2}) \\ = A,$$

و برای $n \leq i \leq rn$ داریم:

$$\|g_i\|^2 = rn(\frac{1}{rn})(\frac{rC^2}{(r-1)n+1}) + (\frac{A}{C^2}-1)(rn)(\frac{1}{rn})\Big(\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}\Big) \\ = A.$$

بنابراین طبق گزاره ۲.۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\frac{A}{C^2}rn}$ یک قاب A-کیپ C-هم‌نرم است.

اکنون فرض کنید $\{I_i\}_{i=1}^{r}$ یک افراز از $\{1,2,\ldots,\frac{A}{C^2}rn\}$ باشد. بنابراین $1 \leq j \leq \frac{A}{C^2}rn$ وجود دارد به‌طوریکه مجموعه $I_j \cap \{1,2,\ldots,rn\}$ حداقل دارای n عضو است. چون I_j حداقل دارای n عضو است لذا طبق لم ۳.۲ اسکالرهای $\{c_i\}_{i\in I_j}$ وجود دارند به‌طوریکه $\sum_{i\in I_j}|c_i|^2 = 1$ و $P_{n-1}(\sum_{i\in I_j} c_i f_i) = 0$ که در آن P_{n-1} تصویر متعامد از $\mathbb{C}^{rn}$ به روی $n-1$ مختص اول است.

اکنون فرض کنید $I_j^n = I_j \cap \{1,2,\ldots,rn\}$ و $\{h_i\}_{i=1}^{rn}$ سطرهای تبدیل فوریه گسسته D_{rn} باشند. در این‌صورت برای هر $i \in I_j^n$ داریم $1 \leq i \leq rn$ و لذا

$$f_i = \Big[\sqrt{rC^2}h_{i1}, \sqrt{rC^2}h_{i2}, \ldots, \sqrt{rC^2}h_{i(n-1)}, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{in}, \ldots, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{i(rn)}\Big],$$

که در آن $h_i = [h_{i1}, \dots, h_{i(rn)}]$. چون $I - P_{n-1}$ تصویر متعامد از $\mathbb{C}^{rn}$ بروی $(r-1)n+1$ مختص دوم است لذا

$$\begin{aligned}
(I - P_{n-1})f_i &= \Big[0, 0, \dots, 0, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{in}, \dots, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{i(rn)}\Big] \\
&= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}\Big[0, 0, \dots, 0, h_{in}, \dots, h_{i(rn)}\Big] \\
&= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}(I - P_{n-1})\Big[h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}, \dots, h_{i(rn)}\Big] \\
&= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}(I - P_{n-1})h_i.
\end{aligned}$$

چون $\{h_i\}_{i=1}^{rn}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{C}^{rn}$ است، برای nهای به قدر کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i\in I_j^n} c_i f_i\Big\|^2 &= \Big\|(I - p_{n-1})(\sum_{i\in I_j^n} c_i f_i)\Big\|^2 \\
&= \frac{rC^2}{(r-1)n+1}\Big\|(I - p_{n-1})(\sum_{i\in I_j^n} c_i h_i)\Big\|^2 \\
&\le \frac{rC^2}{(r-1)n+1}\Big\|\sum_{i\in I_j^n} c_i h_i\Big\|^2 \\
&\le \frac{rC^2}{(r-1)n+1}\sum_{i\in I_j^n}\big|c_i\big|^2 \\
&< \delta \sum_{i\in I_j^n}\big|c_i\big|^2.
\end{aligned}$$

لذا $\{f_i\}_{i=1}^{\frac{A}{C^2}rn}$ یک دنباله (δ, r)-ریس‌پذیر نیست. □

قضیه بعدی فورا از حدس فایتینگر و قضیه ۴.۲ نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $A, C > 0$ داده شده باشند. یک ثابت کلی $\delta > 0$ مستقل از n وجود دارد به‌طوریکه هر قاب A-کیپ C-هم‌نرم برای $\mathbb{C}^n$ را می‌توان به $r > \frac{A}{C^2}$ دنباله پایه ریس با کران پایه ریس δ افرازکرد.*

مراجع

[1] P.G. Casazza, O. Christensen, A.M. Lindner, and R. Vershynin, A decomposition theorem for frames and the Feichtinger conjecture, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**(6) (2008), 2043–2053.

[2] P.G. Casazza, M. Fickus, D. Mixon and J.C. Tremain, The Bourgain-Tzafriri conjecture and concrete construction of non-pavable projections, *Operators and Matrices*, **5**(2) (2011), 353–363.

[3] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2002.

[4] C. Heil, D. Walnut, Continuous and discrete wavelet transform, *SIAM Rev.*, **31**(4) (1969), 628–666.

[5] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastave, Interlacing families II: Mixed Character-istic Polynomials and the Kadison-Singer Problem, *arXiv:1306.3969 [math.CO]*.

[6] N. Weaver, The Kadison-Singer Problem in discrepancy theory, *Discrete Math.*, **278**(1-3) (2004), 227–239.

[7] R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980.