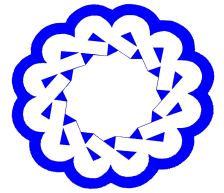


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

یک روش جدید موجک-گلرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول

فرشید عبدالهی، جهانگیر چشم‌آور*ب

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران

چکیده

روش موجک-گلرکین یک ابزار قوی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. هدف اصلی این مقاله، ترکیب روش تفاضلات متناهی و روش موجک-گلرکین برای حل بعضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم این روش برای جواب‌های تحلیلی چنین معادلاتی می‌تواند مفید باشد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۵ تیر ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۲۵ مهر ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: اصغر رحیمی

کلمات کلیدی:

روش موجک-گلرکین،
معادلات با مشتقات
جزئی، موجک، آنالیز چند
ریزه ساز.

۱. مقدمه

مقالات زیادی در خصوص جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وجود دارد. برخی از روش‌های مشهور که برای حل چنین معادلاتی استفاده می‌شوند، روش تفاضلات متناهی، روش عناصر محدود و روش‌های چند شبکه‌ای است [۸، ۹، ۱۰]. روش گلرکین که توسط ریاضیدان روسی بوریس-گلرکین معرفی شد، نوع دیگری از روش‌های عددی برای حل چنین معادلاتی است [۵]. در این روش، فرض می‌شود که جواب مسئله عضوی از فضای هیلبرت \mathcal{H} با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد و به دنبال جواب تقریبی مسئله به شکل $\phi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k(x)$ می‌گردیم، که در آن $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$ پایه‌ای برای یک زیر فضای N -بعدی از توابع، مانند S است. توابع $\psi_k(x)$ ، $(k = 1, 2, \dots, N)$ ، توابع آزمون و فضای S ، فضای آزمون نامیده می‌شوند. نکته حائز اهمیت این است که روشی ترکیبی وجود دارد که از موجک‌ها به عنوان توابع آزمون استفاده می‌شود. این روش عموماً، روش موجک-گلرکین^۱ نامیده می‌شود. بر اساس این روش، جواب آزمایشی $u_j(x, t) \approx u(x, t)$ با استفاده از توابع مقیاس $\phi_{j,k}(x)$ توابع آزمون به شکل زیر معرفی می‌شوند:

$$u_j(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(t) \phi_{j,k}(x).$$

محققان زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از روش موجک-گلرکین استفاده کرده‌اند، برای مشاهده جزئیات بیشتر به منابع [۱، ۳، ۶، ۷، ۱۲، ۱۳، ۱۵] مراجعه کنید.

هدف اصلی این مقاله، ترکیب روش تفاضلات متناهی با روش موجک-گلرکین برای حل معادلات به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu = \eta(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

آدرس ایمیلها: abdollahi@shirazu.ac.ir (فرشید عبداللهی)، j_cheshmavar@pnu.ac.ir (جهانگیر چشم آورا).
 موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) © <http://doi.org/10.22072/wala.2021.534144.1335>
¹Wavelet-Galerkin

با شرط اولیه:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.1)$$

که در آن a, b ثابت‌های حقیقی و t زمان است.

ترکیب این دو روش به ما اجازه می‌دهد تا مسئله یاد شده را به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول تقلیل دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که این تکنیک می‌تواند برای جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول مفید باشد. در ادامه‌ی این بخش، نیازهای لازم مرور شده‌اند. در بخش ۲، کاربردهایی از روش‌های عددی و آنالیز همگرایی آنها ارائه شده است. به منظور آزمون الگوریتم‌های عددی، یک مثال عددی در بخش ۳ آورده شده است. در پایان، نتیجه‌گیری را در بخش ۴ خواهیم داشت.

۱.۱. موجک‌های با تکیه‌گاه فشرده

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع متعامد یکه هستند که یک پایه برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند. آنها که توسط انتقال و اتساع تابعی مانند $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ تولید و با $\psi_{j,k}(x)$ نشان داده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

کلاس مهمی از موجک‌ها که کاربردهای وسیعی در علوم کاربردی و مهندسی دارند، موجک‌هایی با تکیه‌گاه فشرده هستند. خانواده پایه‌های موجکی با تکیه‌گاه فشرده توسط دوشی معرفی گردید [۴]. این خانواده، پایه‌های متعامد یکه برای توابع در $L^2(\mathbb{R})$ هستند که ساختار آنها با تابع مقیاس $\phi(x)$ از مرتبه

²Scaling function

N و یک مجموعه از ضرایب α_k ، $(k \in \mathbb{Z})$ شروع می‌گردد و در معادله دو مقیاسی^۳ زیر صدق می‌کنند:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \phi(2x - k). \quad (4.1)$$

با توجه به تابع مقیاس، تابع موجک به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\psi(x) = \sum_{k=2-N}^1 (-1)^k \alpha_{1-k} \phi(2x - k), \quad (5.1)$$

که در آن ضرایب α_k ها $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ ، در رابطه‌های دو مقیاسی (۴.۱) و (۵.۱)، ضرایب موجک فیلتر نامیده می‌شوند. تکیه گاه تابع مقیاس دوشبی $\phi(x)$ فاصله $[0, N-1]$ و تکیه گاه تابع موجک متناظر آن فاصله $[\frac{N}{4}, 1 - \frac{N}{4}]$ می‌باشد. بعلاوه،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

۲.۱. آنالیز چند ریزه‌ساز

یکی از مهمترین روشهای ساخت توابع موجکی، استفاده از آنالیز چند ریزه‌ساز^۴ است. یک آنالیز چند ریزه‌ساز برای $L^2(\mathbb{R})$ دنباله‌ای صعودی از زیر فضاهای بسته $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ در $L^2(\mathbb{R})$ هستند به گونه‌ای که:

$$(1) \text{ برای هر } j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1},$$

$$(2) \text{ } \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ در } L^2(\mathbb{R}) \text{ چگال است، و } \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$(3) \text{ اگر } f(\cdot) \in V_j \text{ و فقط اگر } f(2(\cdot)) \in V_{j+1}$$

³Two-scale equation

⁴Multiresolution Analysis

(۴) تابع $\varphi \in V$ موجود است به گونه‌ای که $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد. تابع ϕ را تابع مقیاس (یا موجک مولد) می‌نامند، برای مشاهده جزئیات بیشتر به [۱۱] مراجعه کنید.

حال فرض کنید زیرفضای W_j ، مکمل متعامد زیرفضای V_j در V_{j+1} باشد، به عبارت دیگر:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (۶.۱)$$

در این صورت فضای $L^2(\mathbb{R})$ به صورت مجموع مستقیم از W_j ها به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (۷.۱)$$

برای j ثابت، موجک‌های

$$\{\psi_{i,j}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\},$$

تشکیل یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای V_j و

$$\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\},$$

تشکیل یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای W_j می‌دهند. بنابراین هر تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_{n \geq j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{n,k} \psi_{n,k}(x), \quad (۸.۱)$$

که در آن $c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ و $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. مجموعه زیرفضاهای V_j ، یک آنالیز چند ریزه‌ساز برای $L^2(\mathbb{R})$ می‌باشند. این فضاها برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش گلرکین استفاده خواهند گردید.

۳.۱. روش موجک-گلرکین تفاضلات متناهی

به بیان ساده، در روش موجک-گلرکین معمولاً از تقریب تابع که یک سری موجکی است مشتق گرفته و در معادله دیفرانسیل مورد بحث به جای مشتق تابع مجهول قرار داده می‌شود که در این صورت ضرایب نامشخص این سری موجکی را به روش‌های مختلف، مانند روش ضرایب اتصال^۵ می‌توان بدست آورد [۲] و البته جهت کنترل پایداری و دقت جواب‌ها در سری موجکی سطح j -ام، j را به اندازه کافی بزرگ در نظر می‌گیرند. برای $x \in \mathbb{R}$ داده شده و عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ j با استفاده از توسعه سری تیلور u نسبت به متغیر x داریم:

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} + O(h), \quad (9.1)$$

که در آن $h = \frac{1}{j}$. با استفاده از این تقریب در معادلات به شکل (۱۰.۱)، برای پیدا کردن تابع u ، مسئله اصلی به حل مسئله زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$\mathcal{L}u(x, t) + aO(h) = \eta(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10.1)$$

با شرط اولیه:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (11.1)$$

که در آن

$$\mathcal{L}u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} + bu. \quad (12.1)$$

و باقیمانده بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$R(x, t) = \mathcal{L}u(x, t) - \eta(x, t). \quad (13.1)$$

⁵Connection coefficients

روش موجک- گلرکین متعلق به خانواده روش‌های باقیمانده وزنی است که در آن جواب $u(x, t)$ از معادله دیفرانسیل توسط سری موجک سطح j -ام زیر تقریب زده می‌شود:

$$u_j(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(t) \phi_{j,k}(x), \quad (14.1)$$

که در آن ضرایب نامشخص $\alpha_k(t)$ ($k \in \mathbb{Z}$)، طوری برآورد می‌شوند که جواب‌های تقریبی در معادله دیفرانسیل صدق کنند. روش باقیمانده وزنی، مینیم سازی $R(x, t)$ با هدف صفرکردن آن در دامنه $(-\infty, \infty)$ با استفاده از توابع وزنی $\phi_{j,k}(x)$ انجام می‌پذیرد، به گونه‌ای که برای هر $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{R}} R(x, t) \phi_{j,k}(x) dx = 0. \quad (15.1)$$

با جایگزینی تقریب سری موجکی (جواب اولیه) $u_j(x, t)$ در معادله (۱۳.۱) داریم:

$$R(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha'_k(t) \phi_{j,k}(x) + a \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(t) \frac{\phi_{j,k}(x+h) - \phi_{j,k}(x)}{h} + b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(t) \phi_{j,k}(x) - \eta(x, t).$$

چون $h = 1/2^j$ داریم: $\phi_{j,k}(x+h) = \phi_{j,k-1}(x)$ و بنابراین

$$R(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha'_k(t) - (a2^j - b)\alpha_k(t) + a2^j \alpha_{k+1}(t)) \phi_{j,k}(x) - \eta(x, t). \quad (16.1)$$

با جایگزینی (۱۶.۱) در معادله (۱۵.۱)، برای هر $l \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\alpha'_l(t) = (a2^j - b)\alpha_l(t) - a2^j \alpha_{l+1}(t) + \int_{\mathbb{R}} \eta(x, t) \phi_{j,l}(x) dx,$$

سیستم فوق یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل است و می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\dot{X} = AX + g(t), \quad (17.1)$$

که در آن $g(t) = [g_l(t)]_{l \in \mathbb{Z}}$ با $g_l(t) = \int_{\mathbb{R}} \eta(x, t) \phi_{j,l}(x) dx$ و $X = [\alpha_l(t)]_{l \in \mathbb{Z}}$ یک ماتریس توپلیتز^۶ به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & c_0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots \\ \cdots & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & c_0 & c_1 & \vdots & 0 \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & c_0 & c_1 \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = c_0 I + c_1 N, \quad (18.1)$$

که در آن، $c_1 = -a^{2j}$ ، $c_0 = a^{2j} - b$ ، I ماتریس همانی و N ماتریس جردن با عناصر قطر اصلی صفر و عناصر زبر قطری^۷ یک می‌باشد. ماتریس A یک ماتریس توپلیتز دو قطری است که باعث ساده شدن جواب دستگاه می‌گردد. دستگاه (۱۷.۱) دارای جواب به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At} [X(0) + \int_0^t e^{-As} g(s) ds] \\ &= e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s) ds. \end{aligned}$$

^۶Toeplitz matrix

^۷Super diagonal

از طرفی با توجه به ساختار ماتریس A ، e^{At} به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$e^{At} = e^{(c_0 I + c_1 N)t} = e^{c_0 t I} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & 1 & c_1 t & \frac{(c_1 t)^2}{2!} & \frac{(c_1 t)^3}{3!} & \frac{(c_1 t)^4}{4!} & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & c_1 t & \frac{(c_1 t)^2}{2!} & \frac{(c_1 t)^3}{3!} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & c_1 t & \frac{(c_1 t)^2}{2!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}, \quad (19.1)$$

در این صورت ضرایب $\alpha_k(t)$ ($k \in \mathbb{Z}$)، به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\langle u_j(x, t), \phi_{j,m}(x) \rangle = \alpha_m(t) = e^{c_0 t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(c_1 t)^l}{l!} \alpha_{l+m}(0) + G(t, m), \quad (20.1)$$

که در آن

$$G(t, m) = \int_0^t e^{c_0(t-s)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(c_1(t-s))^l}{l!} g_{l+m}(s) ds. \quad (21.1)$$

بنابراین هدف پیدا کردن ضرایب نامشخص $\alpha_k(t)$ ($k \in \mathbb{Z}$) بود که از رابطه (۲۰.۱) به دست می‌آیند.

۲. آنالیز همگرایی

در این بخش آنالیز همگرایی روش یاد شده که جواب تقریبی u_j را برآورد می‌کند، را بررسی کرده و یک کران بالا برای خطای این روش بدست می‌آوریم.

قضیه ۱: عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f \in C^N(\mathbb{R})$ و $f^{(N)} \in L^\infty$. همچنین،

فرض کنید تابع $\psi(x)$ با تکیه گاه فشرده باشد، به طوری که:

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq m \leq N-1,$$

و برای هر $1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k}(x)|^2 dx$ ، آنگاه ثابت $C > 0$ که فقط به N و f وابسته است وجود دارد، به طوری که برای هر $j, k \in \mathbb{Z}$:

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq C 2^{-jN} 2^{-j/2}. \quad (1.2)$$

اثبات: برای مشاهده جزئیات اثبات به [۱۴] مراجعه کنید.

قضیه ۲: فرض کنید $\eta(x, t) = k(x)h(t)$ در رابطه (۱۰.۱) باشد، که در آن $k(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ یک چند جمله ای از درجه m است. همچنین فرض کنید $u_j(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(t) \phi_{j,k}(x)$ که در آن $u_j(x, t) = P_j u(x, t)$ تصویر $u(x, t)$ به روی زیرفضای V_j است و ϕ تابع مقیاس دوبشی (در بخش ۱-۱ به آن اشاره گردید) از مرتبه N با $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ باشد. آنگاه برای j های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\|u - P_j u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1 2^{-jN}, \quad (2.2)$$

که در آن $C_1 > 0$.

اثبات: به عنوان نتیجه ای از معادله نمایش (۸.۱) و قضیه ۱، ثابت $C > 0$ که فقط به N و u وابسته

است، وجود دارد به طوری که:

$$\begin{aligned} \|u - P_j u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \left\| \sum_{l \geq j} \sum_k \langle u, \psi_{l,k} \rangle \psi_{l,k} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{l \geq j} \sum_k |\langle u, \psi_{l,k} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{l \geq j} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} |\langle u, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq \sum_{l \geq j} C(2^l + N) 2^{-2lN} 2^{-l}. \end{aligned}$$

در نتیجه عدد ثابت C_1 وجود دارد به طوری که برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ $j \in \mathbb{Z}$ که $N \leq 2^j$ داریم:

$$\|u - P_j u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_1 2^{-jN}. \quad \blacksquare$$

در مثال زیر یک مسئله مقدار اولیه را در نظر می‌گیریم و آن را با استفاده از روش معرفی شده فوق به صورت تحلیلی حل می‌کنیم.

مثال ۱: برای $-\infty < x < +\infty$ و $0 \leq t \leq T$ ، مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0,$$

با شرط اولیه:

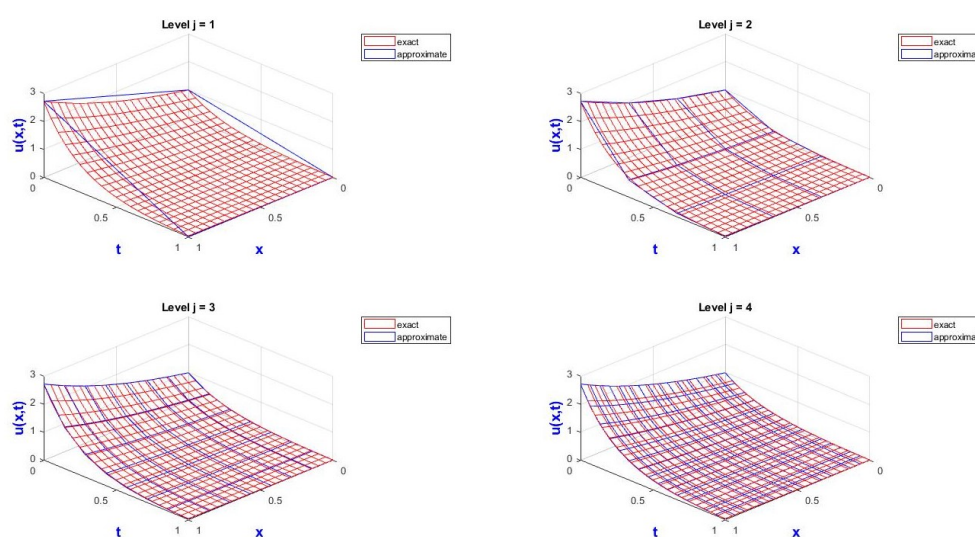
$$u(x, 0) = e^{\beta x}.$$

می‌دانیم که جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = e^{-t} e^{\beta(x-3t)}$ می‌باشد. حال روش خود را برای حل این

معادله بکار می‌بریم. با استفاده از ایده ارائه شده در بخش ۲ خصوصا رابطه (۲۰.۱) داریم:

$$\langle u_j(x, t), \phi_{j,m}(x) \rangle = \alpha_m(t) = e^{c_0 t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(c_1 t)^l}{l!} \alpha_{l+m}(\circ),$$

که در آن، $c_0 = 3 \times 2^j - 1$ و $c_1 = -3 \times 2^j$. توجه کنید که طرف دوم معادله اصلی در این مثال صفر است و در نتیجه $G(t, m) = 0$.



شکل ۱: مقایسه جواب دقیق و جواب‌های تقریبی در چهار سطح

در این حالت جواب $u_j(x, t)$ بعنوان j -امین سطح جواب اصلی، می‌تواند به شکل زیرتقریب زده

شود:

$$\begin{aligned} u_j(x, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{c_0 t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(c_1 t)^l}{l!} \alpha_{l+m}(\circ) \phi_{j,m}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} e^{c_0 t} \frac{(c_1 t)^l}{l!} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\beta \frac{l}{2^j}} \alpha_m(\circ) \phi_{j,m}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} e^{c_0 t} \frac{(c_1 t)^l}{l!} e^{\beta \frac{l}{2^j}} u_j(x, \circ) \\ &= u_j(x, \circ) e^{-t} (e^{3 \times 2^j t})^{1 - e^{\frac{\beta}{2^j}}}. \end{aligned}$$

چون $\lim_{s \rightarrow \infty} (e^{3st})^{-e^{\frac{\beta}{s}}} = e^{-3\beta t}$ داریم:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t) = e^{\beta x} e^{-t} (e^{-3\beta t}).$$

که همان جواب دقیق مسئله می‌باشد، به عبارت دیگر $u_j(x, t) \rightarrow u(x, t)$ وقتی که $j \rightarrow \infty$. در شکل ۱ جواب دقیق معادله مثال ۱ با جواب‌های تقریبی برای سطح‌های $j = 1, 2, 3, 4$ مقایسه شده‌اند. در جدول ۱، جواب‌های تقریبی و دقیق و همچنین خطاهای مطلق و نسبی برای سطح‌های $j = 0, 10, 20, 30$ ارائه شده‌اند. نتایج محاسباتی با استفاده از نرم افزار متلب بدست آمده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود مزیت استفاده از این روش ترکیبی با افزایش سطح وضوح j مشخص می‌گردد، به عبارت دیگر این مقایسه نشان می‌دهد که راه حل‌های تقریبی، منطقی و معقول هستند.

	۲/۰	۱/۵	۱/۰	۰/۵	t
	$1.831564e-002$	$6.392786e-002$	$2.231302e-001$	$7.788008e-001$	E-Sol
	$7.503936e-003$	$3.273712e-002$	$1.428209e-001$	$6.230790e-001$	j=0, A-Sol
	$1.081170e-002$	$3.119074e-002$	$8.030925e-002$	$1.557217e-001$	j=0, A-Err
	$1.440804e+000$	$9.527638e-001$	$5.623074e-001$	$2.499229e-001$	j=0, R-Err
	$1.830223e-002$	$6.389275e-002$	$2.230484e-001$	$7.786582e-001$	j=10, A-Sol
	$1.341205e-005$	$3.511269e-005$	$8.171104e-005$	$1.426128e-004$	j=10, A-Err
	$7.328095e-004$	$5.495568e-004$	$3.663376e-004$	$1.831520e-004$	j=10, R-Err
	$1.831563e-002$	$6.392783e-002$	$2.231301e-001$	$7.788006e-001$	j=20, A-Sol
	$1.310036e-008$	$3.429357e-008$	$7.979755e-008$	$1.392604e-007$	j=20, A-Err
	$7.152560e-007$	$5.364419e-007$	$3.576279e-007$	$1.788140e-007$	j=20, R-Err
	$1.831564e-002$	$6.392786e-002$	$2.231302e-001$	$7.788008e-001$	j=30, A-Sol
	$3.469447e-018$	$0.000000e+000$	$0.000000e+000$	$0.000000e+000$	j=30, A-Err
	$1.894254e-016$	$0.000000e+000$	$0.000000e+000$	$0.000000e+000$	j=30, R-Err

جدول ۱: سطوح $j = 0, 10, 20, 30$ و $x = 2$

جواب‌های دقیق: E-Sol، جواب‌های تقریبی: A-Sol
خطاهای مطلق: A-Err، خطاهای نسبی: R-Err

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از روش موجک-گلرکین به بررسی مدل ریاضی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول پرداختیم. برای حل اینگونه معادلات، یک تحلیل نظری از روش‌های موجکی را ارائه داده و همچنین

برآورد خطایی را برای روش موجک-گلرکین بدست آوردیم. این روش همچنین می‌تواند برای حل معادلات جالب‌تری شبیه معادله بکار گرفته شده اما با ضرایب متغیر و حالت‌های غیرخطی، شبیه معادله برگر، استفاده شود. مثال ارائه شده بالا به همراه نتایج عددی، دقت و کارایی این روش تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد زیرا با افزایش n مقدار جواب به جواب اصلی مسئله نزدیک تر می‌گردد.

مراجع

- [1] F. Bulut, An alternative approach to compute wavelet connection coefficients, *Appl. Math. Letters*, **53** (2016), 1–9.
- [2] A. Cohen, M. Hoffmann and M. Reiss, Adaptive wavelet-Galerkin methods for linear inverse problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **42**(4) (2004), 1479–1501.
- [3] W. Dahmen, Wavelet methods for PDEs-some recent developments, *J. Comput. Appl. Math.*, **128** (2001), 133–185.
- [4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBS-NSF Regional conference series in applied and mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA. 1992.
- [5] B.G. Galerkin, Beams and plates, Series in some questions of elastic equilibrium of beams and plates (in Russian), *Vestnik Ingenerov*, **19** (1915), 897–908.
- [6] M. El-Gamel, Wavelet algorithm for the numerical solution of nonhomogeneous time dependent problems, *Int. J. Differ. Eqn. Appl.*, **9** (2004), 169–185.
- [7] X.J. Liu, Y.H. Zhou, L. Zhang and J.Z. Wang, Wavelet solutions of Burgers equation with high reynolds numbers, *Sci. China Technol. Sci.*, **57** (7) (2014), 1285–1292.
- [8] T. Liu, A multigrid–homotopy method for nonlinear inverse problems, *Comput. Math. Appl.*, **79**(6) (2020), 1706–1717.
- [9] L. Lopez and G. VaccaSpectral, Spectral properties and conservation laws in Mimetic Finite Difference methods for PDEs, *J. Comput. Appl. Math.*, **292** (2016), 760–784.
- [10] E. Love and W.J. Rider, On the convergence of finite difference methods for PDE under temporal refinement Computers, *Mathematics with Applications*, **66**(1) (2013), 33–40.
- [11] S. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **315** (1989), 69–87.
- [12] S. Suk-In and E. Schulz, Wavelet-Galerkin solution of a partial differential equation with nonlinear viscosity, *Appl. Math. Sci.*, **7**(38) (2013), 1849–1880.

- [13] V. Vampa, M.T. Martin and E. Serrano, A hybrid method using wavelets for the numerical solution of boundary value problems on the interval, *Appl. Math. Comput.*, **217**(7) (2010), 3355–3367.
- [14] D.F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhauser, 2004.
- [15] L. Zhang, J.Z. Wang and Y.H. Zhou, Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates, *Arch. Appl. Mech.*, **85**(3) (2015), 355–365.