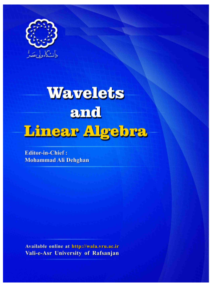
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۴۱-۱۵۴



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

ارتقاپذیری در جبرهای عملگری

محمد باقر اسدی*[آ]، رضا بهمانی[ب]

[آ]دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران، ایران

[ب]دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۲۲ آذر ۱۳۹۹

پذیرفته شده: ۱۳ دی ۱۳۹۹

دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: اصغر رحیمی

کلمات کلیدی:

ارتقاپذیری، C^*-جبرها ، هیلبرت C^*-مدول.

چکیده

در این نوشتار سعی بر آن داریم تا با معرفی قضایایی که درون مایه یکسانی دارند به معرفی نظریه ارتقاپذیری بپردازیم و نشان دهیم که این ایده در جبرهای عملگری و نظریه عملگرها تا چه حد قابل استفاده و تعمیم است. پس از آن به معرفی قضایا و تعمیم برخی از آن‌ها می‌پردازیم و به وجود ایده اثبات یکسانی برای این دست از قضیه‌ها اشاره می‌نماییم.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: mb.asadi@ut.ac.ir (محمدباقر اسدی)، reza.behmani@gmail.com (رضا بهمانی).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.521020.1315

۱. مقدمه

در این مقاله، طیف خاصی از قضیه‌های شناخته شده نظریه ارتقاپذیری، چرایی و چگونگی اثبات آنها مورد بررسی قرار گرفته است. قضیه نایمارک [۱] ، قضیه گلفاند [۲] -نایمارک، قضیه هالموس [۳] (برام [۴] -هالموس) و قضیه استینسپرینگ [۵] مهمترین قضیه‌هایی هستند که در مورد آنها بحث می‌کنیم. فارغ از طیف وسیع کاربردها و تاریخچه متفاوت هر کدام از این قضیه‌ها، استفاده از توابع ساده‌تر به جای توابع مورد مطالعه، ایده بنیادینی است که در تمام این قضیه‌ها مشترک است. اما منظور از ساده‌تر چیست؟ پاسخ این سوال در واقع چیزی نیست غیر از ایده اصلی ارتقاپذیری. این که چه چیزی ساده‌تر است بسته به اشیائ مورد نظر و ویژگی‌ای از آنها که مورد مطالعه قرار گرفته، متغیر است. برای روشن‌تر شدن موضوع، قضیه زیر که توسط بربرین [۶] [۳] بیان و ثابت شده است را در نظر بگیرید:

قضیه ۱.۱. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت است. برای C^*-جبر $B(H)$ $*$-نمایش $\pi : B(H) \to B(K)$ وجود دارد به طوری که π طولپا باشد و برای هر $T \in B(H)$*

$$\sigma_a(T) = \sigma_a(\pi(T)) = \sigma_p(\pi(T)). \tag{۱.۱}$$

که در آن $\sigma_a(T)$ طیف تقریبی عملگر T است و $\sigma_p(T)$ مجموعه مقادیر ویژه T است.

به عبارت دیگر اگر $T \in B(H)$ آنگاه یک فضای هیلبرت K و عملگر $S \in B(K)$ وجود دارند به طوری که $B(H) \subset B(K)$ و مقادیر ویژه تقریبی T دقیقا مقادیر ویژه S باشند. این قضیه مطالعه یک عملگر دلخواه را وقتی که در مورد طیف عملگر بحث می‌شود، به مطالعه عملگری که طیف ساده‌تری دارد، تحویل می‌کند. بنابراین در این حالت عملگر ساده‌تر عملگری است که طیف ساده‌تری دارد. اما در قضیه استینسپرینگ مطالعه تبدیلات خطی عملگری مقدارِ کاملاً مثبت به مطالعه نمایش‌های C^*-جبرها کاهش می‌یابد. هر چند در مورد اخیر، برخلاف قضیه بربرین، ویژگی مورد مطالعه کاملاً مشهود نیست

[1] M. A. Naimark
[2] I. M. Gelfand
[3] P. R. Halmos
[4] J. Bram
[5] W. F. Stinespring
[6] S. K. Berberian

اما نمایش‌ها و به طور کلی $*$-همریختی‌ها نه تنها نسبت به نگاشت‌های کاملاً مثبت، اشیائ شناخته شده‌تری هستند بلکه حالت خاصی از آنها محسوب می‌شوند. درنتیجه، این قضیه مطالعه‌ی خانواده بزرگی از نگاشت‌ها را به مطالعه یک زیرمجموعه (که به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از مجموعه اصلی است) تحویل و به تبع آن مطالعه نگاشت‌های کاملاً مثبت را تسهیل می‌کند. بنابراین ارتقاپذیری یک خانواده از نگاشت‌ها چیزی نیست غیر از قابلیت جایگزینی نگاشت‌های مورد مطالعه با نگاشت‌های ساده‌تر، به گونه‌ای که مجموعه نگاشت‌های ساده‌تر حالت خاصی یا به عبارت دیگر زیرمجموعه‌ای از مجموعه نگاشت‌های مورد مطالعه باشند. به طور دقیقتر اگر Γ یک خانواده از نگاشت‌ها باشد که روی اشیائ یک رسته تعریف شده‌اند، آنگاه Γ (یا اشیائ Γ) را ارتقاپذیر گویند هرگاه یک زیرمجموعه از Γ مانند Λ وجود داشته باشد به طوری که هر عضو Γ را بتوان به یک عضو از Λ نسبت داد به گونه‌ای که ویژگی‌های اعضای نظیر Λ و Γ متناظر باشند. هدف از این نوشتار این است که این تعریف بسیار کلی، غیررسمی و غیردقیق را برای خوانندگان در قالب مثال‌ها و توضیحاتی که در ادامه ارائه خواهد شد، شرح و بسط دهیم و در مورد ماهیت اثبات‌هایی که برای این مثال‌ها ارائه شده و همچنین تعمیم‌پذیری آنها بحث می‌کنیم.

۱.۱. *ایده ارتقاپذیری و اهمیت آن*

نایمارک با نشان دادن این که اندازه‌های مثبت به چه نحوی به اندازه‌های طیفی ارتقا پیدا می‌کنند، اولین بار ایده ارتقاپذیری را ارائه کرد. نایمارک در مرجع [۸] قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۱. *برای هر اندازهٔ مثبتِ جمعی‌شمارا $E : \mathcal{F} \to B(H)_+$ روی یک σ-جبر $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه دلخواه ناتهی X که $E(X) = I_H$، فضای هیلبرت K و اندازه طیفی $Q : \mathcal{F} \to B(K)_+$ وجود دارد به طوری‌که H زیرفضای K است و برای هر $Y \in \mathcal{F}$ رابطه زیر برقرار است:*

$$E(Y) = P_H Q(Y)|_H,$$

که در آن P_H تصویر متعامد روی زیرفضای H است.

اهمیت قضیه بالا نه تنها در تقدم تاریخی آن نسبت به سایر قضایای ارتقاپذیری، بلکه در ارتباط تنگاتنگی است که با سایر قضیه‌ها دارد. برای پی بردن به اهمیت قضیه بالا باید به این نکته توجه کرد که مجموعه تمام نمایش‌های یک C^*-جبر جابجایی در تناظر یک به یک با مجموعه اندازه‌های طیفی

عملگری-مقدار روی طیف آن C^*-جبر قرار دارد. به طور دقیقتر اگر Xیک فضای فشرده هاسدورف باشد و $\rho : C(X) \to B(H)$یک نمایش $C(X)$باشد، آنگاه اندازه طیفی یکتای Eروی زیرمجموعه‌های بورل Xوجود دارد به طوری که برای هر $f \in C(X)$

$$\rho(f) = \int f dE. \qquad (۲.۱)$$

حال ترکیب این نکته و قضیه بالا فرم کلی تمام تبدیلات خطی مثبت عملگری-مقدار روی یک C^*-جبر جابجایی را مشخص می‌کند که تعمیمی از قضیه گلفاند-نایمارک برای نگاشت‌های خطی مثبت عملگری مقدار روی C^*-جبرهای جابجایی است. به عبارت دیگر، قضیه زیر که شباهت بیشتری به قضیه گلفاند-نایمارک دارد، صورت‌بندی دیگری از قضیه ۲.۱ است.

قضیه ۳.۱. *اگر A یک C^*-جبر جابجایی یکدار باشد و $\varphi : A \to B(H)$ یک تبدیل خطی مثبت باشد که $\varphi(1) = I_H$ آنگاه نمایش $\rho : A \to B(K)$ وجود دارد به طوری که Kیک فضای هیلبرت است که H را در بر دارد و برای هر $f \in A$*

$$\varphi(f) = V^* \rho(f) V$$

که در آن $V : H \to K$ شمول H در K است.

همانطور که از بیان قضیه مشخص است، قضیه بالا صورتی از قضیه قبل است که شباهت زیادی به قضیه گلفاند-نایمارک دارد، از یک طرف این قضیه فقط محدود به C^*-جبرهای جابجایی است و از طرف دیگر در مورد ارتقاپذیری نگاشت‌های مثبت عملگری مقدار است (نه فقط تابعکهای خطی مثبت) و از این رو آن را می‌توان تعمیمی از قضیه گلفاند-نایمارک به حساب آورد. وجه مشترک هر دوی این قضیه‌ها در یک چیز نهفته است و آن مرتبط کردن یک نگاشت در یک رسته با یک نگاشت (احتمالا یک ریختار) ساده‌تر است. هر چند قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱ هم ارز هستند اما بیان جداگانه آنها از نقطه نظر ارتقاپذیری بسیار حائز اهمیت است چرا که هر کدام از آنها ارتقاپذیری خانواده‌ای از نگاشت‌ها را به ریختارها در دو رسته متفاوت نشان می‌دهند. قضیه اول متضمن ارتقاپذیری اندازه‌های مثبت عملگری مقدار به اندازه‌های طیفی است و قضیه دوم ارتقاپذیری نگاشت‌های خطیِ مثبتِ عملگری-مقدار روی یک C^*-جبر جابجایی به نمایش‌های آن C^*-جبر را تضمین می‌کند. اهمیت قضیه اول در این است

که مطالعه اندازه‌های مثبت را به مطالعه اندازه‌های طیفی که زیرمجموعه کوچکی از اندازه‌های مثبت را تشکیل می‌دهند، تقلیل می‌دهد. علاوه براین مطالعه اندازه‌های طیفی به واسطه داشتن ویژگی‌های بیشتری که نسبت به اندازه‌های مثبت دارند، ساده‌تر است و ما شناخت بهتری نسبت به آنها داریم. قضیه دوم همین ایده را در مورد مطالعه نمایش‌های یک C^*-جبر جابجایی به جای نگاشت‌های خطی مثبت عملگری مقدار روی C^*-جبرهای جابجایی القا می‌کند.

نمونه دیگری که در ادامه به آن می‌پردازیم از نظریه عملگرهاست. هالموس ریاضی دان شهیر مجارستانی با طرح این پرسش که شرط لازم و کافی برای این که یک تبدیل خطی T روی یک فضای هیلبرت H به یک تبدیل خطی نرمال S روی یک فضای هیلبرت بزرگتر K ارتقا یابد به طوری که $T = P_H S|_H$، چیست، پژوهش‌های خود را در زمینه ارتقاپذیری عملگرهای خطی روی فضاهای هیلبرت آغاز کرد. پیش از آن که بخواهیم به پاسخ این سوال بپردازیم (که در رهیافت ما به اثبات بسیاری از قضیه‌های از این دست بسیار مهم و حیاتی است) بهتر است در مورد اهمیت خود سوال بحث کنیم. در واقع اهمیت این سوال را همانند دو نمونه پیشین، باید در ایده اصلی ارتقاپذیری جستجو کرد که چیزی غیر از جایگزینی یک شیئ با یک شیئ ساده‌تر و شناخته شده‌تر نیست. تبدیلات خطی نرمال (و عملگرهای فشرده) به واسطه داشتن حساب تابعی (و نظریه طیفی) شاید شناخته شده ترین تبدیلات خطی کراندار در میان تمام تبدیلات خطی کراندار باشند. از این رو تقریبِ عملگرهای غیرنرمال (به معنای مناسب) به کمک عملگرهای نرمال می‌تواند راهکاری برای مطالعه عملگرهای غیرنرمال (که برای آنها حساب تابعی یا نظریه طیفی مناسبی در اختیار نداریم) فراهم کند. برای مثال می‌توان به عملگرهای شبه نرمال، عملگرهای ابرنرمال و عملگرهای زیرنرمال اشاره کرد که هر کدام با توجه به این که به چه نحوی به عملگرهای نرمال نزدیک هستند، تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حال برمی‌گردیم به سوال هالموس و پاسخ آن که توسط هالموس و برام (دانشجوی دکترای هالموس) ارائه شده است. هالموس عملگری را که قابل ارتقا به یک عملگر نرمال روی یک فضای هیلبرت بزرگتر است، عملگر زیرنرمال نامید و به کمک برام نشان داد که عملگر $T \in B(H)$ زیرنرمال است اگر و تنها اگر هسته‌ای که به صورت زیر القا می‌کند یک هسته مثبت معین باشد:

$$\Lambda_T : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to B(H), \qquad \Lambda_T(i, j) := (T^j)^* T^i. \tag{۳.۱}$$

همانطور که در بالا به آن اشاره کردیم، نه تنها صورت سوالی که هالموس مطرح کرده بود ماهیتی مربوط به ارتقاپذیری دارد بلکه پاسخی که آنها به این سوال دادند نیز از اهمیت به سزائی برخوردار است؛ چرا که بر خلاف دو نمونه پیشین که نقش هسته‌های مثبت معین در ارتقاپذیری نگاشت‌های مورد مطالعه (چه در پاسخ‌ها و چه در برهان‌های ارائه شده) آنچنان که شایسته توجه است، مشهود نیست، اما در سوال اخیر القا یک هسته مثبت معین خود پاسخ سوال است. این نکته کلیدی، یعنی نقش هسته‌های مثبت معین در ارتقاپذیری هر چند پیشینه‌ای حتی قدیمی‌تر از مقالات نایمارک و قضیه گلفاند-نایمارک-سگال دارد، اما به طرز عجیبی در مطالعه ارتقاپذیری نگاشت‌های خطی مرتبط با ساختارهای خطی مغفول مانده بود. پیش از این که به نقش اساسی هسته‌های مثبت معین در ارتقاپذیری نگاشت‌ها بپردازیم چند نمونه دیگر از قضیه‌های از این دست را بدون ارائه اثبات در اینجا ذکر می‌کنیم:

قضیه ۴.۱. *هالموس [۱۱] : فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T : H \to H$ عملگری طول‌پا است. آنگاه فضای هیلبرت K و عملگر یکانی $S : K \to K$ وجود دارد به طوری که H زیرفضای K است و برای هر عدد طبیعی n، $T^n = P_H S^n$، که در آن P_H تصویر متعامد روی زیرفضای H است.*

قضیه ۵.۱. *ناگی [7] [۱۱] : فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T : H \to H$ عملگری انقباضی است. آنگاه فضای هیلبرت K و عملگر طول‌پا $S : K \to K$ وجود دارد به طوری که H زیرفضای K است و برای هر عدد طبیعی n، $T^n = P_H S^n$، که در آن P_H تصویر متعامد روی زیرفضای H است.*

قضیه ۶.۱. *گلفاند-نایمارک : فرض کنید A یک C^*-جبر و $\tau : A \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی مثبت است، آنگاه نمایش (π, H) برای A و بردار $h \in H$ وجود دارد به طوری که*

$$\tau(a) = \langle \pi(a)h, h\rangle, \qquad (a \in A).$$

قضیه ۷.۱. *قضیهٔ ارتقاپذیری استینسپرینگ [۱۱، ۱۵] : برای هر نگاشت کاملاً مثبت $\phi : A \to B(H)$ سه‌تایی (π, K, V) شامل فضای هیلبرت K، $*$-نمایش $\pi : A \to B(K)$ وعملگر خطی و کراندار $V : H \to K$، وجود دارد به طوری که*

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V, \qquad (a \in A).$$

[7] B. Sz.-Nagy

۲.۱ . *نقش هسته‌های مثبت معین و نگاشت‌های خطی کاملا مثبت در ارتقاپذیری*

در میان قضیه‌های بالا قضیه استینسپرینگ ۷.۱ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، چرا که قضیه‌های بنیادینی مانند قضیه گلفاند-نایمارک ۶.۱ و قضیه نایمارک ۳.۱ به وضوح حالت خاصی از آن محسوب می‌شوند و سایر قضیه‌ها به عنوان نتیجه‌ای از آن به سادگی قابل حصول هستند. همانطورکه در بخش قبل به اهمیت و نقش اساسی هسته‌های مثبت معین در ارتقاپذیری نگاشت‌ها اشاره کردیم، باید به این نکته توجه کرد که اهمیت مقاله استینسپرینگ [۱۵] نه فقط در رده بندی نگاشت‌های کاملا مثبت بر حسب ارتقاپذیری بلکه در معرفی آنها است؛ چرا که نگاشت‌های خطی کاملا مثبت نسخه خطی هسته‌های مثبت معین هستند.

در ادامه هسته‌های مثبت معین را تعریف می‌کنیم و قضیه تجزیه کولموگوروف [8] را بیان می‌کنیم که در مورد ارتقاپذیری هسته‌های مثبت معین است و با استفاده از آن نشان می‌دهیم این قضیه هرچند ماهیتی خطی ندارد اما ابزارکافی برای تعمیم قضیه استینسپرینگ به رسته هیلبرت C^*-مدول‌ها را در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعریف ۸.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و H یک فضای هیلبرت است. یک تابع $B(H)$-مقدار روی مجموعهٔ $X \times X$ مانند ϕ را یک هسته مثبت معین می‌نامند هرگاه برای هر n عضو از X مانند $x_۱, ..., x_n$ و هر n بردار از اعضای H مانند $h_۱, ..., h_n$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\langle\phi(x_i, x_j)h_j, h_i\rangle \geq ۰.$$

به عبارت دیگر $[\phi(x_i, x_j)] \in B(H^n)^+$.

هسته‌های مثبت معین اسکالر مقداری در نظریه معادلات انتگرالی و فضاهای تابعی به وفور یافت می‌شوند. برای مطالعات بیشتر در این زمینه (که خالی از لطف نیست) می‌توان به مرجع [۱۰] مراجعه کرد، که در سال‌های اخیر توسط پاولسن [9] به رشته تحریر در آمده است. کتاب مذکور بسیار خواندنی و پر از مثال‌ها و کاربرهای زیبای این نظریه است، اما نگاه ما به این هسته‌ها در ادامه و راستای بحث

[8] A. N. Kolmogorov

[9] V. Paulsen

ارتقاپذیری است و متفاوت از چیزی است که در کتاب پاولسن به آن پرداخته شده است. بنابراین در این نوشتار فقط به آن جنبه‌ای از اهمیت و کاربرد این خانواده از هسته‌ها توجه می‌کنیم که در ارتقاپذیری نگاشت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۹.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، H یک فضای هیلبرت و $\phi : X \times X \to B(H)$ یک تابع دو متغیره است. جفت (Φ, K) متشکل از فضای هیلبرت K و تابع $\Phi : X \to B(H, K)$ را یک تجزیهٔ کولموگوروف تابع ϕ می‌نامند هرگاه $\phi(x, y) = \Phi(x)^*\Phi(y)$ برای هر $x, y \in X$ برقرار باشد. تجزیهٔ کولموگوروف را مینیمال گویند هرگاه $[\Phi(X)H] = K$.

واضح است که هر تابع دو متغیره که تجزیهٔ کولموگوروف داشته باشد یک هستهٔ مثبت معین است. عکس این موضوع نیز درست است که به قضیهٔ تجزیهٔ کولموگوروف مشهور است و هسته‌های مثبت معین عملگری‌مقدار را بر حسب این که دارای تجزیهٔ کولموگوروف هستند از سایر توابع دو متغیره متمایز می‌سازد.

قضیه ۱۰.۱. [7] *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، H یک فضای هیلبرت و $\phi : X \times X \to B(H)$ یک هستهٔ مثبت معین است. آنگاه*

آ. ϕ دارای تجزیهٔ کولموگوروف مینیمال است.

ب. اگر (Φ, K) یک تجزیهٔ کولموگوروف مینیمال ϕ باشد و (Ψ, L) یک تجزیهٔ کولموگوروف دلخواه دیگر برای ϕ باشد، آنگاه تبدیل خطی طولپا یکتایی مانند $T : K \to L$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$، $T\Phi(x) = \Psi(x)$.

پ. اگر (Φ, K) و (Ψ, L) دو تجزیهٔ مینیمال کولموگوروف برای هستهٔ مثبت معین ϕ باشند، آنگاه عملگر یکانی $U : K \to L$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$، $U\Phi(x) = \Psi(x)$.

هسته‌های مثبت معین در واقع نسخه غیرخطی نگاشت‌های کاملاً مثبت هستند و بیش از یک دهه قبل از این که استینسپرینگ نگاشت‌های کاملاً مثبت را معرفی کند، ریاضی دانان با آنها آشنا بودند. هرچند قضیه‌های گلفاند-نایمارک-سیگال [۱۰] و استینسپرینگ پس از قضیهٔ تجزیهٔ کولموگوروف ثابت

[10] I. E. Segal

شده‌اند و از آن نتیجه می‌شوند، اما در کمال تعجب این قضیه در اثبات قضیه‌هایی که در بخش قبل به آنها اشاره کردیم، مورد توجه قرار نگرفته است. برای نشان دادن اهمیت این موضوع ما از این قضیه استفاده می‌کنیم و تعمیمی از قضیه استینسپرینگ را برای خانواده‌ای از نگاشت‌ها (که برخی نویسندگان آنها را به عنوان تعمیمی از نگاشت‌های کاملا مثبت در نظر می‌گیرند) در رسته هیلبرت C^*-مدول‌ها ارائه می‌دهیم. می‌دانیم که نمایش‌های هیلبرت C^*-مدول‌ها حافظِ ضربِ سه‌تایی هستند، یعنی اگر $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک هیلبرت C^*-مدول چپ روی C^*-جبر A باشد و $\Psi : E \to B(H, K)$ یک نمایش E باشد آنگاه برای هر $x, y, z \in E$ رابطه $\Psi(x\langle y, z\rangle) = \Psi(x)\Psi(y)^*\Psi(z)$ برقرار است. علاوه بر این نمایشی از C^*-جبر A مانند $\pi : A \to B(H)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in E$ تساوی زیر برقرار باشد؛

$$\Psi(x)^*\Psi(y) = \pi(\langle x, y\rangle). \qquad (۴.۱)$$

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید E یک هیلبرت C^*-مدول چپ روی C^*-جبر A باشد و $T : E \to B(H, K)$ و $\varphi : A \to B(H)$ دو نگاشت باشند. آنگاه

آ. T یک نگاشت حافظِ ضربِ چهارتایی است هرگاه برای هر $x, y, x', y' \in E$ رابطه زیر برقرار باشد؛

$$\langle T(y), T(x\langle x', y'\rangle)\rangle = \langle T(x'\langle x, y\rangle), T(y')\rangle. \qquad (۵.۱)$$

ب. T یک φ-نگاشت است هرگاه رابطه

$$T(x)^*T(y) = \varphi(\langle x, y\rangle). \qquad (۶.۱)$$

برای هر $x \in E$ برقرار باشد.

پ. T را یک φ-نمایش گویند هرگاه φ یک نمایش A باشد و T یک φ-نگاشت باشد.

نکته جالب در مورد دو ویژگی که در این تعریف بیان کردیم، این است که علیرغم تفاوت ظاهری که دارند (برقراری رابطه (۵.۱) فقط به خود نگاشت T و ضرب داخلی هیلبرت C^*-مدول بستگی دارد اما

رابطه (۶.۱) ارتباط بین T و یک نگاشت مستقل از T را بیان می‌کند)، دو ویژگی هم ارز هستند (مانند رابطه بین نمایش‌های هیلبرت C^*-مدول‌ها و نگاشت‌هایی که ضربِ سه‌تایی را حفظ می‌کنند). اسکیده [11] -سوماش [12] [۱۴] نشان دادند که یک تبدیل خطی کاملا کراندار T حافظ ضرب چهارتایی است اگر و تنها اگر نگاشت کاملا مثبت φ وجود داشته باشد به طوری که T یک φ-نگاشت باشد. توجه کنید که هر نگاشتی که ضرب سه‌تایی را حفظ کند یک نگاشت حافظ ضرب چهارتایی است. اما عکس این مطلب برقرار نیست. ابتدا اسدی [۱]، و پس از آن بهات [13] -رامش [14] -سوماش [۴] و اسکیده [۱۳] تعمیمی از قضیه استینسپرینگ را برای نگاشت‌های چهارگانه یا به عبارت دیگر φ-نگاشت‌ها که φ یک نگاشت کاملا مثبت است ارائه کردند. در تمام مراجع بالا با تکنیکی مشابه قضیه استینسپرینگ ۷.۱ نشان داده شده است که هر نگاشت چهارتایی قابل ارتقا به یک نگاشت سه‌تایی است، یا به عبارت دیگر هر φ-نگاشتی که φ صرفا یک نگاشت کاملا مثبت است قابل ارتقا به یک نمایش هیلبرت C^*-مدول است. در ادامه صورت قضیه‌ای که بهات-رامش-سوماش ثابت کرده‌اند را می‌آوریم و آن را با قضیه‌ای که با استفاده از هسته‌های مثبت معین و قضیه تجزیه کولموگوروف ثابت شده مقایسه می‌کنیم تا با قدرت و اهمیت هسته‌های مثبت معین و نقش آنها در ارتقاپذیری نگاشت‌های خطی بیشتر آشنا بشویم:

قضیه ۱۲.۱. [۴، قضیه ۲.۱] *فرض کنید A یک C^*-جبر یک‌دار و E یک هیلبرت A-مدول است. اگر $\varphi : A \to B(H_1)$ یک نگاشت کاملاً مثبت و $\Phi : E \to B(H_1, H_2)$ یک φ- نگاشت باشد، آنگاه فضاهای هیلبرت K_1 و K_2، عملگر کراندار $V : H_1 \to K_1$، عملگر دوگان‌طول‌پا $W : H_2 \to K_2$ و نگاشت‌های $\rho : A \to B(K_1)$ و $\Psi : E \to B(K_1, K_2)$ وجود دارند به طوری که ρ یک $*$-نمایش یک‌دار C^*-جبر A و Ψ یک ρ-نمایش E است و رابطه‌های زیر برای هر $a \in A$ و هر $e \in E$ برقرارند:*

$$\varphi(a) = V^*\rho(a)V, \qquad \Phi(e) = W^*\Psi(e)V. \tag{۷.۱}$$

علاوه بر این ρ، Ψ و V را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که $[\rho(A)VH_1] = K_1$ و $[\Psi(E)VH_1] = K_2$.

در قضیه بالا وجود نمایش ρ و عملگر V در واقع نتیجه قضیه استینسپرینگ هستند و آنچه که در

---

[11] M. Skeide
[12] K. Sumesh
[13] B. V. R. Bhat
[14] G. Ramesh

این قضیه بدیع و نو است وجود نگاشت Ψ، عملگر W و رابطه‌ای است که بین Φ، Ψ و V و W برقرار است (که آن را ارتقاپذیری Φ به Ψ می‌نامند). حال با استفاده از قضیه تجزیه کلموگوروف نشان می‌دهیم که قضیه بالا را تا چه حد می‌توان تعمیم داد.

قضیه ۱۳.۱. *فرض کنید E یک هیلبرت C^*-مدول روی C^*-جبر یک‌دار A، $\varphi : A \to B(H)$ یک نگاشت کاملاً مثبت و (π, K, V) نمایش استینسپرینگ مینیمال φ است.*

آنگاه سه گانهٔ $((\Phi_\varphi, H_\varphi), (\Psi_\pi, K_\pi), W_\varphi)$ متشکل از فضاهای هیلبرت H_φ و K_π، یک عملگر یکانی $W_\varphi : H_\varphi \to K_\pi$، φ-نگاشت ناتباهیده $\Phi_\varphi : E \to B(H, H_\varphi)$ و π-نمایش ناتباهیده $\Psi_\pi : E \to B(K, K_\pi)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$

$$W_\varphi \Phi_\varphi(x) = \Psi_\pi(x)V. \tag{۸.۱}$$

قضیه بالا خود تعمیم قضیه بهات-رامش-سوماش ۱۲.۱ نیست، با این وجود قضیه ۱۲.۱ را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از آن به راحتی به دست آورد. نتیجه دیگری که از قضیه ۱۳.۱ به راحتی به دست می‌آید قضیه زیر است که تعمیم قضیه ۱۲.۱ محسوب می‌شود.

نتیجه ۱۴.۱. *فرض کنید E یک هیلبرت C^*-مدول روی C^*-جبر یک‌دار A، $\varphi : A \to B(H)$ یک نگاشت کاملاً مثبت، (π, K, V) نمایش استینسپرینگ مینیمال φ و سه‌گانهٔ $((\Phi_\varphi, H_\varphi), (\Psi_\pi, K_\pi), W_\varphi)$ همان است که در قضیهٔ ۱۳.۱ یافتیم. احکام زیر برقرارند:*

آ. نگاشت $\Phi : E \to B(H, H')$ یک φ-نگاشت است اگر و تنها اگر عملگر طولپا $S_\Phi : H_\varphi \to H'$، یا عملگر دوگان طولپا $W : H' \to K_\pi$ وجود داشته باشند به طوری که یکی از تساوی‌های زیر (که هم ارز هستند) برقرار باشد

آ۱. $S_\Phi \Phi_\varphi(\cdot) = \Phi(\cdot)$،

آ۲. $\Phi(\cdot) = W^* \Psi_\pi(\cdot) V$.

به علاوه، اگر Φ ناتباهیده باشد، می‌توان S_Φ یا W را یکانی در نظر بگیریم.

ب. *نگاشت $\Psi : E \to B(K, K')$ یک π-نگاشت است اگر و تنها اگر عملگر طول‌پای $S_\Psi : K_\varphi \to K'$، وجود داشته باشد به طوری‌که $S_\Psi \Psi_\pi(\cdot) = \Psi(\cdot)$. به‌علاوه، اگر Ψ ناتباهیده باشد، می‌توان عملگرهای مذکور را یکانی در نظرگرفت.*

پ. *اگر $\Psi : E \to B(K, K')$ و $\Phi : E \to B(H, H')$ به ترتیب یک π-نگاشت و یک φ-نگاشت باشند، آنگاه یک طول‌پای جزئی $W : H' \to K'$ وجود دارد به طوری‌که $\Phi(\cdot) = W^*\Psi(\cdot)V$. به‌علاوه، اگر Ψ ناتباهیده باشد، می‌توان W را دوگان طول‌پا انتخاب کرد و اگر Φ ناتباهیده باشد می‌توان W را طول‌پا انتخاب کرد. بنابراین اگر هر دو ناتباهیده باشند W را می‌توان عملگری یکانی انتخاب کرد.*

توجه کنید که در اثبات قضیه ۱۳.۱ و قضیه ۱۴.۱ از قضیه تجزیه کولموگروف برای هسته‌های مثبت معین حاصل از ترکیب نگاشت φ و π با ضرب داخلی هیلبرت C^*-مدول E استفاده کرده‌ایم (برای دیدن جزئیات اثبات می‌توانید به مرجع [۲] مراجعه کنید). قسمت آ از نتیجه بالا تعمیم قضیه ۱۲.۱ است زیرا برخلاف قضیه مذکور وجود نمایش هیلبرت C^*-مدول را به نگاشت Φ وابسته نمی‌کند و نشان می‌دهد که تمام φ-نگاشت‌ها قابل ارتقا به دقیقا یک π-نگاشت هستند. به عبارت دیگر اگر π نمایش مینیمال استینسپرینگ φ باشد آنگاه یک نگاشت حافظِ ضربِ سه‌تایی روی E وجود دارد که یک π-نمایش است و هر نگاشتِ چهارتایی که φ-نگاشت باشد به آن ارتقا می‌یابد. قسمت پ اما چیزی بیشتر ازتعمیم قضیه بهات-رامش-سوماش و حتی قضیه استینسپرینگ است، زیرا ارتقاپذیری هر φ-نگاشتی را به هر π نگاشت تضمین می‌کند. به عبارت دیگر روی هیلبرت C^*-مدول E، هر نگاشت حافظِ ضربِ چهارتاییِ متناظر با φ به هر نگاشتِ حافظِ ضربِ سه‌تایی متناظر با π ارتقا می‌یابد.

۳.۱. *اهمیت یک تعریف*

همانطور که در بخش‌های پیشین گفته شد، اهمیت مقاله استینسپرینگ تنها در رده‌بندی نگاشت‌های کاملا مثبت عملگری مقدار روی C^*-جبرها نیست. شاید مهمترین بخش مقاله استینسپرینگ معرفی نگاشت‌های کاملا مثبت باشد. برای اثبات این مدعا کافی است به وقفه ۱۲ ساله‌ای که بین اثبات قضیه گلفاند-نایمارک و قضیه استینسپرینگ وجود دارد، دقت کنیم. نایمارک قضیه ۲.۱ را در سال ۱۹۴۳ ثابت کرد، همزمان با آن گلفاند و نایمارک قضیه بنیادین گلفاند-نایمارک ۶.۱ را ثابت کردند و قضیه ۳.۱ به نحوی تعمیم قضیه گلفاند-نایمارک است که بیان دیگری از قضیه ۲.۱ به حساب می‌آید و حالت خاص

قضیه استینپرینگ است. با توجه به اثبات قضیه استینسپرینگ، تنها دلیلی که باعث شده بود نایمارک و گلفاند قضیه‌ای که ۱۲ سال بعدتر استینسپرینگ ثابت کرد را در همان سال ۱۹۴۳ ثابت نکنند، عدم اطلاع آنها از تعریف نگاشت‌های کاملا مثبت است. اگر چه گلفاند و نایمارک قضیه ۳.۱ را که حالت خاصی از قضیه استینسپرینگ است به دست آورده بودند اما دلیل اصلی برقراری این حکم بر آنها پوشیده بود. استینسپرینگ در سال ۱۹۵۵ در مقاله مشهورش [۱۵]، علاوه بر معرفی نگاشت‌های خطی کاملا مثبت و رده‌بندی آنها بر حسب ارتقاپذیری به نمایش‌های C^*-جبرها، نشان داد که نگاشت‌های خطی مثبت روی C^*-جبرهای جابجایی کاملا مثبت نیز هستند. با علم به این موضوع و الهام از قضیه ۳.۱، استینسپرینگ به صورت‌بندی قضیه ۷.۱ رسید که تعمیم درست و کاملی از قضیه گلفاند-نایمارک است.

مراجع

[1] M.B. Asadi, Stinespring's theorem for Hilbert C^*-modules, *J. Operator Theory*, **62**(2) (2008), 235–238.

[2] M.B. Asadi, R. Behmani, A.R. Medghalchi and H. Nikpey, Completely semi-φ-maps, *Complex Analysis and Operator Theory*, **13**(4) (2019), 1569–1582.

[3] S.K. Berberian, Approximate proper vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 111–114.

[4] B.V.R. Bhat, G. Ramesh and K. Sumesh, Stinespring's theorem for maps on Hilbert C^*-modules, *J. Operator Theory*, **68** (2012), 173–178.

[5] J. Bram, Subnormal operators, *Duke Math. J.*, **22**(1) (1955), 75–94.

[6] P.R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil*, **2** (1950), 125–134.

[7] A.N. Kolmogorov, Stationary sequences in Hilbert space, *Bull. Math. Univ. Moscow*, **2** (1941), 1–40.

[8] M.A. Naimark, On the representation of additive operator set functions, *C.R.(Dokl.) Acad. Sci. URSS*, **41** (1943), 359–361.

[9] W.L. Paschke, Inner Product Modules Over B^*-Algebras, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **182** (1973), 443–468.

[10] V. Paulsen, *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Camb. Stud. Adv. Math., vol. 152, Camb. Uni. Press, 2016.

[11] V. Paulsen *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Camb. Stud. Adv. Math., vol. 78, Camb. Uni. Press, 2002.

[12] I.E. Segal, Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 73–88.

[13] M. Skeide, Factorization of maps between Hilbert C^*-modules, *J. Operator Theory*, **68** (2012), 543-547.

[14] M. Skeide and K. Sumesh, CP-H-Extendable maps between Hilbert Modules and CPH-semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, **414** (2014), 886–913.

[15] W.F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 211–216.