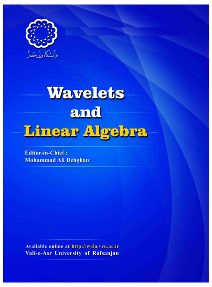
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۲۳-۱۴۰



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

بررسی K-قاب‌های پیوسته درهم‌تنیده در فضاهای هیلبرت

غلامرضا رحیم لو[*،آ]، وحید صدری[آ]

[آ]گروه ریاضی،دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۹ آبان ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۳۱ تیر ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: رجبعلی کامیابی‌گل

کلمات کلیدی:

قاب پیوسته، K-قاب پیوسته، قاب درهم تنیده.

چکیده

در این مقاله، قاب‌های پیوسته درهم تنیده برای عملگرها یا به‌اختصار، K-قاب‌های پیوسته درهم تنیده معرفی و مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. در ابتدا یک نتیجه مفید برای تولید این قاب‌ها معرفی می‌کنیم و سپس آنها را با تأثیر یک عملگر کراندار مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدلیل کاربرد اساسی و مفید انواع قاب‌ها در بازگرداندن برخی اطلاعات حذف شده در مباحث مربوط به انتقال داده‌ها، انتهای مقاله را اختصاص به شرایط استقرار قاب تحت حذف عده‌ای از اعضای فضای اندازه قرار داده و خواهیم دید که این موضوع با K-قاب‌های گسسته می‌تواند در ارتباط باشد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: grahimlou@gmail.com (غلامرضا رحیم لو)، vahidsadri57@gmail.com (وحید صدری).

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©
http://doi.org/10.22072/wala.2021.139495.1309

۱. مقدمه

در بین مفاهیم موجود در مبحث فضاهای برداری، به‌جرأت می‌توان گفت که پایه‌های هر فضای برداری، که مشخصه هر فضا می‌باشد، از کاربردی‌ترین مباحث آن به‌شمار می‌رود. با این‌حال، در حالت کلی، همواره نمی‌توان پایه‌های یک فضا و به‌خصوص، پایه‌های متعامد یکه آن را مشخص نمود و از سوی دیگر، بررسی استقلال خطی یک مجموعه نیز مشکلات مربوط به‌خود را دارد. قاب‌ها که توسط دوفین[۱] و شیفر[۲]([۹])، ضمن مطالعه در زمینه سری‌های فوریه غیرهارمونیک معرفی شدند، ابزاری هستند که توانستند بر مشکلات ذکر شده فایق آمده و همچنین امکان تولید اعضای فضا را (حتی نه به‌صورت منحصر به‌فرد) ایجاد نمایند. این موضوع به‌طور عمده در فضاهای هیلبرت (جدایی پذیر) و C^*-مدول‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند و قدر مسلم، بحث‌های مربوط به فضاهای هیلبرت کاربردی‌تر می‌باشند؛ که می‌توان به مباحث نظریه فیلتر بانک، پردازش سیگنال و تصویر، شبکه‌های بی‌سیم، فیزیک کوانتوم، رمز نگاری و انتقال داده‌ها اشاره نمود. حتی در چند مورد، برخی از محققین، قاب‌ها را در فضاهای باناخ نیز مورد بررسی قرار داده‌اند.

اما اهمیت ویژه قاب‌ها، مربوط به انواع تعمیم‌های آن می‌باشند که به‌طور عمده در هفت حوزه قرار دارند:

۱) قاب‌های پیوسته ([۱، ۱۰])، که برای فضاهای اندازه معرفی شدند.

۲) قاب‌های تعمیم‌یافته یا g-قاب‌ها ([۲۰])، برای عملگرهای کراندار بین فضاهای هیلبرت می‌باشند.

۳) قابهای ترکیب[۳] ([۷])، برای زیر فضاهای بسته یک فضای هیلبرت می‌باشند و البته، می‌توانند حالت خاصی از g-قاب‌ها قرار گیرند.

۴) قاب‌ها برای عملگرها یا K-قاب‌ها ([۱۳])، ضمن مطالعه روی دستگاه‌های اتمی نسبت به عملگر کراندار K معرفی شدند.

۵) قاب‌های کنترل‌شده ([۵])، که برای بهبود کارایی عددی الگوریتم‌های تعاملی[۴] برای وارونه‌سازی عملگر قاب معرفی شدند.

---

[1] R. J. Duffin
[2] A. C. Schaeffer
[3] fusion frames
[4] interactive algorithms

۶) قاب‌های درهم تنیده[5] ([۶]) که ضمن پاسخ به سؤالی در پردازش سیگنال بررسی شدند.

۷) ادغام موارد فوق با همدیگر، (مانند [۲، ۳، ۱۰، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲]).

در این مقاله، ما تلفیق قاب‌های پیوسته، K-قاب‌ها و قاب‌های درهم تنیده در فضاهای هیلبرت را که باختصار، K-قاب‌های پیوسته درهم تنیده می‌نامیم، مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بعد از معرفی این قاب‌ها، یک شرط لازم و کافی برای تولید آنها معرفی می‌کنیم. سپس، با اثردادن عملگری کراندار بر این قاب‌ها و تحمیل برخی شرایط، سعی در حفظ قاب موجود می‌کنیم و در برخی موارد، خواهیم دید که مجبور به کوچکتر کردن فضای اصلی می‌باشیم. در نهایت، با حذف تعدادی از فضای اندازه، شرایط ایجاد آن قاب‌ها را برای فضای اندازه جدید مطرح کرده و ارتباط آن را با حالت گسسته معرفی خواهیم کرد.

در سرتاسر این مقاله، H فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، μ اندازه مثبت و (X,μ) یک فضای اندازه σ-متناهی و $\mathcal{B}(H)$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از H به‌توی H می‌باشند.

ابتدای کار را مروری بر چند نتیجه مهم از عملگرها اختصاص داده‌ایم. فرض کنید $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ عملگری کراندار از فضای هیلبرت H_1 به‌توی فضای هیلبرت H_2 باشد. شبه معکوس راست عملگر U را با نماد $U^\dagger \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ نشان داده و برای هر $x \in \mathcal{R}(U)$ دارای خاصیت زیر است: $UU^\dagger x = x$. در لم زیر، اطلاعات مورد نیاز این عملگر را گردآوری کرده‌ایم.

لم ۱.۱. *[۸] اگر $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ آنگاه نتایج زیر برقرار هستند:*

۱. $(U^\dagger)^* = (U^*)^\dagger$.

۲. $\ker U^\dagger = \mathcal{R}(U)^\perp$ و همچنین $\mathcal{R}(U^\dagger) = \ker U^\perp$.

۳. *$UU^\dagger$ تصویر متعامد یکه از H_2 به‌روی $\mathcal{R}(U)$ می‌باشد.*

۴. *$U^\dagger U$ تصویر متعامد یکه از H_1 به‌روی $\mathcal{R}(U^\dagger)$ می‌باشد.*

---
[5] weaving frames

۲. قاب‌های پیوسته

نگاشت $F : X \to H$ را **به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر $h \in H$، نگاشت

$$X \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$x \longrightarrow \langle h, F(x)\rangle$$

اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۲. (K-قاب پیوسته) فرض کنیم $F : X \to H$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر بوده و $K \in \mathcal{B}(H)$ باشد. گوییم F یک K- قاب پیوسته برای H است اگر اعداد $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که برای هر $h \in H$ داشته باشیم

$$A\|K^*h\|^2 \leq \int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \leq B\|h\|^2. \tag{۱.۲}$$

ثابت‌های A و B را کران‌های قاب می‌نامیم. هرگاه $K = Id_H$ آنگاه F تبدیل به**قاب پیوسته** (معمولی) می‌شود. F را K-قاب تنگ [6] گوییم هرگاه

$$\int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) = A\|K^*h\|^2.$$

اگر $A = 1$، آنگاه K-قاب پیوسته F، پارسوال نامیده می‌شود. اگر فقط طرف راست نامساوی (۱.۲) برقرار باشد، F را نگاشت بسل پیوسته می‌نامیم. بالاخره، اگر μ اندازه شمارشی و $X = \mathbb{N}$، آنگاه K-قاب پیوسته تبدیل به K- قاب گسسته می‌شود (برای خواص این قاب‌ها، نگاه کنید به [۱۳، ۴]).

مثال ۲.۲. فرض کنیم $H = \ell^2(\mathbb{N})$، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. اگر $a > 0$ عددی ثابت باشد،

[6] tight frame

تعریف می‌کنیم

$$K : \ell^{۲}(\mathbb{N}) \to \ell^{۲}(\mathbb{N}),$$
$$K\delta_i = \delta_{i+۱}$$

و

$$F : X \longrightarrow H,$$
$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i + ۱ \\ \circ, & x < ۱ \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=۱}^{\infty}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^{۲}(\mathbb{N})$ است. با توجه به‌این‌که

$$K^*\delta_۱ = \circ\,, \qquad K^*\delta_i = \delta_i\,,\ i \geq ۲,$$

پس برای هر $h \in H$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle h, F(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) = a^{۲}\|h\|^{۲} \geq a^{۲}\|K^*h\|^{۲},$$

بنابراین F یک K-قاب برای H با کران‌های $A = B = a^{۲}$ می‌شود.

طبق روال همه انواع K-قابها، عملگرهای ترکیب و آنالیز مشابه قاب‌های معمولی هستند و برای K-قاب‌های پیوسته، این‌دو عملگر، به‌ترتیب، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند (برای جزئیات بیشتر، نگاه کنید به [۱۱]):

$$T_F : \mathscr{L}^{۲}(X) \longrightarrow H,$$
$$\langle T_F(G), h\rangle = \int_X G(x)\langle F(x), h\rangle\, d\mu,$$

و

$$T_F^* : H \longrightarrow \mathscr{L}^2(X),$$
$$T_F^*(h) = \langle h, F\rangle,$$

که در آنها

$$\mathscr{L}^2(X) = \left\{F : X \to \mathbb{C} :\ \|F\|_2^2 = \int_X \|F(x)\|^2\, d\mu < \infty\right\}.$$

این فضا، با تعریف ضرب داخلی زیر

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{L}^2} = \int_X \langle F(x), G(x)\rangle\, d\mu(x),$$

تبدیل به فضای هیلبرت می‌شود. درنتیجه، عملگر قاب پیوسته را، برای هر $h \in H$، به‌صورت زیر میتوان بدست آورد.

$$S_F(h) := T_F T_F^*(h) = \int_X \langle h, F\rangle F\, d\mu,$$

ونیز

$$\langle S_F h, h\rangle = \|T_F^*(h)\|^2 = \int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2\, d\mu.$$

می‌توان ثابت کرد که اگر F نگاشت بسل پیوسته باشد، آنگاه معکوس‌پذیربودن S_F معادل با پوشابودن T_F می‌باشد و همچنین S_F عملگری مثبت، کراندار و معکوس‌پذیر است ([۱۱]). اما همه خواص قاب‌های معمولی، به K-قابها منتقل نمی‌شوند. مثلاً، عملگر قاب در K-قابها همواره معکوس‌پذیر نمی‌باشد؛ درواقع، اگر K با برد بسته باشد، آنگاه S_F روی $\mathcal{R}_K$ معکوس‌پذیر بوده و برای هر $h \in \mathcal{R}_K$ داریم ([۲۳])

$$B^{-1}\|h\|^2 \le \langle (S_F|_{\mathcal{R}_K})^{-1} h, h\rangle \le A^{-1}\|K^\dagger\|^2\|h\|^2.$$

قضیه زیر، امکان تولید K-قاب‌های پیوسته را از روی یک قاب پیوسته ایجاد می‌کند.

لم ۳.۲. *[۱۵] فرض کنید $F : X \longrightarrow H$ یک قاب پیوسته برای H باشد. آنگاه KF، که در آن*

$K \in \mathcal{B}(H)$، یک K-قاب پیوسته برای H می‌شود.

مثال ۴.۲. [۸] فرض کنید $\psi \in \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$ پذیرفتنی باشد، یعنی:

$$C_{\psi} := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\gamma)|}{\gamma} d\gamma < \infty.$$

نگاشت F را برای هر $x \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$F : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$$
$$F(a,b)(x) = (T_b D_a)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{x-b}{a}),$$

که در آن T_b و D_a عملگرهای روی $\mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$ بوده و برابرند با

$$T_b : \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R}), \qquad D_a : \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R}),$$
$$(T_b f)(x) = f(x-b), \qquad (D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(\frac{x}{a}).$$

بنا به گزاره ۱.۱.۱۱ ونتیجه ۲.۱.۱۱ از [۸] داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, F(a,b)\rangle\langle F(a,b), g\rangle \frac{dadb}{a^{2}} = C_{\psi}(f,g), \quad \forall f,g \in \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$$

پس F یک قاب پیوسته برای $\mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$ وابسته به فضای اندازه $(\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}, \mu)$ می‌باشد که در آن $\mu = \frac{dadb}{a^{2}}$ است. حال، طبق لم ۳.۲، اگر $K \in \mathcal{B}(H)$ عملگر کراندار دلخواهی باشد، آنگاه نگاشت KF یک K-قاب برای $\mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$ می‌شود.

۳. K-قاب‌های پیوسته درهم تنیده

در این بخش، ابتدا K-قاب‌های درهم تنیده را تعریف کرده و سپس برخی نتایج درباره نحوه تولید این قاب‌ها را بررسی می‌کنیم. در سرتاسر این مقاله، نماد $[m]$ به‌معنی $\{1, 2, \cdots, m\}$ برای هر عدد

طبیعی m می‌باشد و همچنین، منظور از افرازهای فضای X به‌منزله افرازی از X توسط زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر ازهم جدای آن خواهد بود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathscr{F} := \{F_i\}_{i\in[m]}$ خانواده‌ای از K-قاب‌های پیوسته برای H وابسته به اندازه μ باشند. گوییم $\mathscr{F}$ درهم تنیده است هرگاه ثابت‌های $0 < A \le B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]}$ از X، خانواده $\cup_{i\in[m]}\{F_i\}$ یک K-قاب پیوسته برای H با کران‌های A, B باشد.

با توجه به گزاره ۴.۳ در [۲۱]، یافتن کران بالا برای قاب‌های پیوسته به‌سادگی میسر می‌شود؛ درواقع اگر

$$\{F_i\}_{h\in[m]}$$

دنباله‌ای از نگاشت‌های بسل پیوسته برای H با کران‌های B_i باشند، آنگاه برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]}$ از X، خانواده $\cup_{i\in[m]}\{F_i\}$ یک دنباله بسل پیوسته برای H با کران $\sum_{h\in[m]} B_i$ می‌شود.

در قضیه زیر، یک شرط لازم و کافی برای تولید K-قاب‌های پیوسته درهم تنیده معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنیم $F, G : X \to H$ دو K-قاب پیوسته برای H باشند. شرایط زیر باهم معادل هستند:*

۱. *F و G دو K-قاب پیوسته درهم تنیده هستند.*
۲. *عدد $\alpha > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر σ از X، عملگر کراندار*

$$\Gamma_\sigma : \mathscr{L}^2_\sigma(X) \longrightarrow H,$$
$$\langle \Gamma_\sigma \varphi, h\rangle = \int_\sigma \varphi(x)\langle F(x), h\rangle\, d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \varphi(x)\langle G(x), h\rangle\, d\mu(x),$$

وجود دارد که $\alpha KK^* \le \Gamma_\sigma \Gamma_\sigma^*$ و درآن،

$$\mathscr{L}^2_\sigma(X) = \left\{\varphi \in \mathscr{L}^2(X), \quad \varphi = F\big|_\sigma \cup G\big|_{\sigma^c}\right\}.$$

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم A کران پایین برای دو قاب F و G باشند. قرار می‌دهیم $\alpha := A$ و نیز برای هر زیر مجموعه اندازه‌پذیر $\sigma \subset X$ فرض می‌کنیم $\Gamma_\sigma = T_\sigma$، که درآن، T_σ عملگر ترکیب برای

قاب $F\big|_{\sigma} \cup G\big|_{\sigma^c}$ می‌باشد. حال، برای هر $\varphi \in \mathscr{L}^{۲}_{\sigma}(X)$ و $h \in H$ داریم

$$\langle \Gamma_\sigma \varphi, h\rangle = \langle T_\sigma \varphi, h\rangle = \int_\sigma \varphi(x)\langle F(x), h\rangle \, d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \varphi(x)\langle G(x), h\rangle \, d\mu(x),$$

و علاوه برآن،

$$\alpha \|K^* h\|^{۲} \leq \|T^*_\sigma h\|^{۲} = \|\Gamma^*_\sigma h\|^{۲},$$

که نتیجه می‌دهد $\alpha KK^* \leq \Gamma_\sigma \Gamma^*_\sigma$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱). می‌دانیم که کران بالا بدیهی است. فرض کنیم $\sigma \subset X$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر، $\varphi \in \mathscr{L}^{۲}_{\sigma}(X)$ و $h \in H$ دلخواه باشند. داریم

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma^*_\sigma h, \varphi\rangle &= \overline{\langle \Gamma_\sigma \varphi, h\rangle} \\
&= \int_\sigma \langle h, F(x)\rangle \overline{\varphi(x)} \, d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \langle h, G(x)\rangle \overline{\varphi(x)} \, d\mu(x) \\
&= \Big\langle \langle h, F\rangle\big|_{\sigma} \cup \langle h, G\rangle\big|_{\sigma^c}, \varphi \Big\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\Gamma^*_\sigma h = \langle h, F\rangle\big|_{\sigma} \cup \langle h, G\rangle\big|_{\sigma^c}.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}
\alpha \|K^* h\|^{۲} &= \langle \alpha KK^* h, h\rangle \\
&\leq \langle \alpha \Gamma_\sigma \Gamma^*_\sigma h, h\rangle \\
&= \|\Gamma^*_\sigma h\|^{۲} \\
&= \int_\sigma |\langle h, F(x)\rangle|^{۲} \, d\mu(x) + \int_{\sigma^c} |\langle h, G(x)\rangle|^{۲} \, d\mu(x).
\end{aligned}$$

پس α کران پایین برای F و G می‌شود. $\square$

مثال ۳.۳. فرض کنیم $H = \ell^{2}(\mathbb{N})$، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. با فرض $a, b > 0$، تعریف می‌کنیم

$$K : H \to H,$$
$$K\delta_i = \delta_{i+1}$$

و

$$F, G : X \longrightarrow H,$$

$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} b\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^{2}(\mathbb{N})$ است. با توجه مثال ۲.۲، F و G دو K-قاب برای H با کران‌های برابر، به‌ترتیب، a^{2} و b^{2} می‌شوند. با فرض $\sigma \subset \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_\sigma : \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R}) \longrightarrow H,$$
$$\Gamma_\sigma \varphi = \Big\{ \int_i^{i+1} a\varphi(x)\, dx \Big\}_{i\in\sigma} \cup \Big\{ \int_i^{i+1} b\varphi(x)\, dx \Big\}_{i\in\sigma^c}.$$

برای هر $\varphi \in \mathscr{L}^{2}(\mathbb{R})$ داریم

$$\|\Gamma_\sigma \varphi\|^{2} = a^{2} \sum_{i\in\sigma} \int_i^{i+1} |\varphi(x)|^{2} + b^{2} \sum_{i\in\sigma^c} \int_i^{i+1} |\varphi(x)|^{2} \leq \max\{a^{2}, b^{2}\} \|\varphi\|_2^{2}$$

که نشان می‌دهد Γ_σ کراندار است. با محاسبه‌ای سرراست، برای هر $h \in H$ داریم

$$\|\Gamma_\sigma^* h\|^۲ \geq \min\{a^۲, b^۲\}\|h\|^۲ \geq \min\{a^۲, b^۲\}\|K^* h\|^۲.$$

پس شرایط قضیه ۲.۳ برقرار شده و درنتیجه، F و G یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H می‌شوند.

در نتایج بعدی، هدف تولید K-قاب‌های پیوسته با استفاده از عملگری خطی و کراندار میباشد.

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم $\{F_i : X \to H\}_{i \in [m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ عملگری با برد بسته باشد طوری‌که $KU^\dagger = U^\dagger K$. آنگاه $\{UF_i\}_{i \in [m]}$ نیز یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(U)$ با کران‌های $A\|U^\dagger\|^{-۲}$ و $B\|U\|^۲$ می‌شود.*

اثبات. فرض کنید $i \in [m]$ دلخواه باشد و قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \phi &: X \longrightarrow \mathbb{C}, \\ \phi(x) &= \langle h, F_i(x) \rangle \qquad (h \in H). \end{aligned}$$

درنتیجه، نگاشت ϕ برای هر h اندازه‌پذیر است. پس نگاشت

$$x \to \langle U^* h, F_i(x) \rangle$$

نیز اندازه‌پذیر شده و درنهایت، UF_i به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر می‌شود.

اگر $U^{\dagger}$ را معکوس راست U بگیریم، آنگاه برای هر $h \in \mathcal{R}(U)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^{۲} &= A\|K^*(U^{\dagger})^*U^*h\|^{۲} \\ &= A\|(U^{\dagger})^*K^*U^*h\|^{۲} \\ &\leq A\|U^{\dagger}\|^{۲}\|K^*U^*h\|^{۲} \\ &\leq \|U^{\dagger}\|^{۲} \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) \\ &= \|U^{\dagger}\|^{۲} \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle h, UF_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x). \end{aligned}$$

کران بالا نیز بدیهی است. □

قضیه ۵.۳. *فرض کنیم K عملگری با برد بسته بوده، $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ به‌طوری‌که $\mathcal{R}(U^*) \subseteq \mathcal{R}(K)$. آنگاه $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H است اگر و تنها اگر عدد $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $h \in H$ داشته باشیم*

$$\|U^*h\| \geq \delta\|K^*h\|.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید که $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران پایین A باشد. برای هر $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^{۲} &\leq \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle Uh, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) \\ &= \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) \\ &\leq B\|U^*h\|^{۲}. \end{aligned}$$

بنابراین $\|U^*h\| \geq \sqrt{\frac{A}{B}}\|K^*h\|$. برای حالت عکس، برای $h \in H$ دلخواه داریم

$$\|U^*h\| = \|(K^\dagger)^*K^*U^*h\| \leq \|K^\dagger\|\,\|K^*U^*h\|.$$

اکنون فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i\in[m]} \subset X$ افرازی دلخواه باشد و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
A\delta^۲\|K^\dagger\|^{-۲}\|K^*h\|^۲ &\leq A\|K^\dagger\|^{-۲}\|U^*h\|^۲\\
&\leq A\|K^*U^*h\|^۲\\
&\leq \sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^۲\,d\mu(x)\\
&= \sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle h, UF_i(x)\rangle|^۲\,d\mu(x)\\
&\leq B\|U\|^۲\|h\|^۲.
\end{aligned}$$

پس $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های $A\delta^۲\|K^\dagger\|^{-۲}$ و $B\|U\|^۲$ می‌شود.
□

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\{F_i\}_{i\in[m]}$ خانواده‌ای از K-قاب‌های پیوسته برای H باشند. احکام زیر باهم معادل‌اند:*

۱. *$\{F_i\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H است.*
۲. *برای هر $U \in \mathcal{B}(H)$، خانواده $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک UK-قاب پیوسته درهم تنیده برای H است.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم A و B کران‌های $\{F_i\}_{i\in[m]}$ باشند. برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]} \subset X$ و $h \in H$ داریم

$$\sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle h, UF_i(x)\rangle|^۲\,d\mu(x) = \sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^۲\,d\mu(x) \leq B\|U\|^۲\|h\|^۲.$$

به‌طریق مشابه، برای کران پایین می‌توان نوشت

$$\sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle h, UF_i(x)\rangle|^۲\, d\mu(x) = \sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^۲\, d\mu(x) \geq A\|(UK)^*h\|^۲.$$

برای حالت عکس، کافی‌است تا U را عملگر همانی روی H گرفته و حکم بدیهی می‌شود. □

در نتایج بعدی، قصد داریم با حذف زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از فضای اندازه X، قاب درهم تنیده جدیدی تولید کنیم.

قضیه ۷.۳. *فرض کنیم K عملگری با برد بسته و $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های A و B باشد. اگر $Y \subset X$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر بوده و*

$$C := \sum_{i\in[m]}\int_Y \|F_i(x)\|^۲\, d\mu(x) < A\|K^\dagger\|^{-۲},$$

آنگاه، $\{F_i : X\backslash Y \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ با کران‌های $(A-C\|K^\dagger\|^۲)$ و B می‌شود.

اثبات. کران بالا بدیهی است. فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i\in[m]} \subset X \setminus Y$ افرازی دلخواه باشد، پس بدیهی‌است که

$$\{\tau_i\}_{i\in[m]} := \{\sigma_i\}_{i\in[m]} \cup Y$$

یک افراز برای X خواهد شد. برای هر $h \in \mathcal{R}(K)$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[m]}\int_{\sigma_i}|\langle h, F_i(x)\rangle|^۲\, d\mu(x) &= \sum_{i\in[m]}\int_{\tau_i}|\langle h, F_i(x)\rangle|^۲\, d\mu(x) - \sum_{i\in[m]}\int_Y|\langle h, F_i(x)\rangle|^۲\, d\mu(x)\\ &\geq A\|K^*h\|^۲ - \|h\|^۲\sum_{i\in[m]}\int_Y\|F_i(x)\|^۲\, d\mu(x)\\ &\geq (A - C\|K^\dagger\|^۲)\|K^*h\|^۲.\end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۸.۳. *فرض کنیم K عملگری با برد بسته باشد، هر زیرمجموعه تک‌عضوی X اندازه‌پذیر با اندازه ناصفر بوده و همچنین $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب تنگ پیوسته درهم تنیده برای H با کران A باشد. اگر به‌ازای $x_\circ \in X$، مجموعه $\{F_i(x_\circ)\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب گسسته برای $\mathcal{R}(K)$ با کران بالای B صادق در خاصیت $A > B\mu(\{x_\circ\})\|K^\dagger\|^۲$ باشد، آنگاه $\{F_i : X \setminus \{x_\circ\} \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ خواهد شد.*

اثبات. فرض کنیم B کران بالای قاب $\{F_i(x_\circ)\}_{i\in[m]}$ باشد. اگر $\{\sigma_i\}_{i\in[m]}$ افرازی از $X \setminus \{x_\circ\}$ باشد، آنگاه $\{\tau_i\}_{i\in[m]} := \{\sigma_i\}_{i\in[m]} \cup \{x_\circ\}$ یک افراز برای X می‌شود. حال برای هر $h \in \mathcal{R}(K)$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^۲ \, d\mu(x) &= \sum_{i\in[m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^۲ \, d\mu(x) - \sum_{i\in[m]} \mu(\{x_\circ\})|\langle h, F_i(x)\rangle|^۲ \\ &\geq A\|K^*h\|^۲ - B\mu(\{x_\circ\})\|h\|^۲ \\ &\geq (A - B\mu(\{x_\circ\})\|K^\dagger\|^۲)\|K^*h\|^۲.\end{aligned}$$

از طرف دیگر، با توجه به

$$\sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^۲ \, d\mu(x) \leq \sum_{i\in[m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^۲ \, d\mu(x) \leq A\|K\|^۲\|h\|^۲$$

حکم کامل می‌شود. $\square$

با اعمال تغییری جزئی، می‌توانیم عکس قضیه ۸.۳ را به‌صورت زیر نتیجه بگیریم.

قضیه ۹.۳. *فرض کنیم K عملگری با برد بسته باشد، هر زیرمجموعه تک‌عضوی X اندازه‌پذیر با اندازه ناصفر بوده و همچنین $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب تنگ پیوسته درهم تنیده برای H با کران A باشد. اگر برای عضوی چون $x_\circ \in X$، خانواده $\{F_i : X \setminus \{x_\circ\} \to H\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(K)$ با کران بالای B' باشد به‌طوری‌که $A > B'\|K^\dagger\|^۲$، آنگاه $\{F_i(x_\circ)\}_{i\in[m]}$ یک K-قاب گسسته برای $\mathcal{R}(K)$ می‌شود.*

اثبات. فرض کنید C و B' کران‌های قاب $\{F_i : X \setminus \{x_\circ\} \to H\}_{i\in[m]}$ باشد. با همان فرضیات اثبات قضیه ۸.۳، داریم

$$\begin{aligned} C\|K^*h\|^{۲} &\leq \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) \\ &= \sum_{i\in[m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) - \sum_{i\in[m]} \mu(\{x_\circ\})|\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲} \\ &= A\|K^*h\|^{۲} - \sum_{i\in[m]} \mu(\{x_\circ\})|\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲}. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\circ < C \leq A - \frac{\mu(\{x_\circ\})}{\|K\|^{۲}\, \|h\|^{۲}} \sum_{i\in[m]} |\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲},$$

ویا

$$\sum_{i\in[m]} |\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲} \leq \frac{A\|K\|^{۲}}{\mu(\{x_\circ\})}\|h\|^{۲}.$$

یعنی $\{F_i(x_\circ)\}_{i\in[m]}$ یک دنباله بسل برای $\mathcal{R}(K)$ شده و شرط کران بالا برقرار می‌شود. از سوی دیگر، با توجه به

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^{۲} - \sum_{i\in[m]} \mu(\{x_\circ\})|\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲} &= \sum_{i\in[m]} \int_{\tau_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) - \sum_{i\in[m]} \mu(\{x_\circ\})|\langle h, F_i(x_\circ)\rangle|^{۲} \\ &= \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, F_i(x)\rangle|^{۲}\, d\mu(x) \\ &\leq B'\|h\|^{۲} \\ &\leq B'\|K^\dagger\|^{۲}\|K^*h\|^{۲} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{(A - B'\|K^{\dagger}\|^{۲})}{\mu(\{x_{\circ}\})}\|K^{*}h\|^{۲} \leq \sum_{i\in[m]} |\langle h, F_{i}(x_{\circ})\rangle|^{۲}.$$

حکم کامل می‌شود. $\square$

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از پیشنهادهای مفید و ارزشمند داوران محترم مجله، که باعث بهبود و ارتقاء سطح کیفی مقاله شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[1] S.T. Ali, J.P. Antoine and J.P. Gazeau, Continuous frames in Hilbert spaces, *Annals. of Physics*, **222** (1993), 1–37.

[2] E. Alizadeh and V. Sadri, On Continuous weaving G-frames in Hilbert spaces, *Wavelets and Linear Algebra*, **7**(1) (2020), 23–36.

[3] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamal, Characterization and Construction of K-Fusion Frames and Their Duals in Hilbert Spaces, *Results in Math.*, **73**(47) (2018), Doi:10.1007/s00025-018-0781-1.

[4] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamal, Some constructions of K-frames and their duals, *Rocky Mt. J. Math.*, **47**(6) (2017), 1749–1764.

[5] P. Balazs, J.P. Antoine and A. Grybo´s, Weighted and controlled frames: mutual relationship and first numerical properties, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **8**(1), (2010), 109–132.

[6] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenic, M.C. Lammers and R.G. Lynch, Weaving frames, *Operators and Matrices*, **10**(4) (2016), 1093–1116.

[7] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of Subspaces, *Contemp. Math., **345** (2004), 87–114.*

[8] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, 2016.*

[9] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**(1) (1952), 341–366.*

[10] *M.H. Faroughi and R. Ahmadi, Some Properties of C-Frames of Subspaces,* J. Nonlinear Sci. Appl.*, **1**(3) (2008), 155–168.*

[11] *M.H. Faroughi and E. Osgooei, C-Frames and C-Bessel Mappings, Bull. Iranian Math. Soc., **38**(1) (2012), 203–222.*

[12] *H.G. Feichtinger and T. Werther, Atomic Systems for Subspaces,* Proceedings SampTA. Orlando, FL.*, (2001), 163–165.*

[13] *L. Găvruţa, Frames for Operators,* Appl. Comp. Harm. Annal.*, **32** (2012), 139–144.*

[14] *D. Hua and Y. Huang, Controlled K-g-frames in Hilbert spaces,* Results. Math.*, **72** (2017), 1227–1238.*

[15] *Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, Some properties of Continuous K-frames in Hilbert spaces,* Sahand Comm. Math. Anal.*, **15**(1) (2019), 169–187.*

[16] *Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, Continuous k-frames and their dual in Hilbert spaces,*Sahand Comm. Math. Anal.*, **17**(3) (2020), 145–160.*

[17] *V. Sadri, Gh. Rahimlou and R. Ahmadi, Continuous weaving fusion frames in Hilbert spaces,* Int. J. Wavelets Multi. Info. Proc.*, **18**(5) (2020), (1–17).*

[18] *V. Sadri, Gh. Rahimlou, R. Ahmadi and R. Zarghami Farfar, Construction of K-g-fusion frames and their dual in Hilbert spaces,* Bull. Transilvania Un. Braşov, Series III*, **13**(62) (2020), 17–32.*

[19] *V. Sadri, R. Ahmadi, M.A. Jafarizadeh and S. Nami, Continuous k-fusion frames in Hilbert spaces,* Sahand Comm. Math. Anal.*, **17**(1) (2020), 39–55.*

[20] *W. Sun, G-Frames and G-Riesz bases,* J. Math. Anal. Appl.*, **326** (2006), 437–452.*

[21] *L.K. Vashisht and Deepshikha, On continuous weaving frames, Adv. Pure Appl. Math., **8**(1) (2017), 15–31.*

[22] *L.K. Vashisht, S. Garg, Deepshikha and P.K. Das, On generalized weaving frames in Hilbert spaces, Rocky Mountain J. Math., **48**(2) (2018), 661–685.*

[23] *X. Xiao, Y. Zhu and L. Găvruţa, Some Properties of K-Frames in Hilbert Spaces,* Results. Math.*, **63** (2013), 1243–1255.*