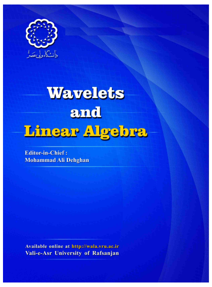
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۰۹-۱۲۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

C^*-پوشش کوانتومی سیستم‌های عملگری کوانتومی

محمد باقر اسدی[*][۱]

[۱]دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۹ مهر ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۶ خرداد ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:

عملگرهای بیکران،
سیستم عملگری، سیستم
عملگری کوانتومی.

چکیده

در این مقاله، ضمن مرور مفهوم سیستم‌های عملگری کوانتومی و قضیه نمایش آنها، به مطالعه C^*- پوشش کوانتومی یک سیستم عملگری کوانتومی می‌پردازیم.

[*]نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: mb.asadi@ut.ac.ir (محمدباقر اسدی).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.138411.1308

۱. مقدمه

در نظریه مکانیک کوانتومی، هر مشاهده‌پذیری را می‌توان به صورت یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت نمایش داد که مجموعه مقادیر آن با طیف عملگر متناظر یکی است. مشاهده‌پذیرهای کراندار یک سیستم مکانیک کوانتومی با $*$-زیرجبر بسته ای از $B(H)$، مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H متناظر است. از طرف دیگر، بنابر قضیه نمایش گلفاند و نیمارک این زیرجبرها شکل عینی C^*-جبرها هستند. از اینرو، C^*-جبرها نقش پررنگی در مطالعه مکانیک کوانتومی ایفا می کنند. البته، در بسیاری از سیستم‌های مکانیک کوانتومی یک مشاهده‌پذیر می‌تواند مقادیر دلخواه بگیرد، در حالی که طیف یک عملگر کراندار چنین نیست. بنابراین، معمولا مشاهده‌پذیرها توسط عملگرهای بیکران نمایش داده می‌شوند و لذا، امروزه عملگرهای بیکران یکی از ابزارهای مهم در مکانیک کوانتومی هستند. برای مثال، برای بیان مدل ریاضی توصیف کننده رابطه هایزنبرگ [1]، $QP - PQ = i\hbar I$ ، لازم است از عملگرهای بیکران استفاده شود.

در طول هفتاد سال گذشته، در کنار مطالعه زیرجبرها، زیرفضاهای $B(H)$ نیز مورد بررسی قرار گرفته اند. از جمله، زیرفضاهای مهم $B(H)$ زیرفضاهای خطی، خودالحاق و یکدار $B(H)$ هستند که به سیستم‌های عملگری عینی معروف هستند. در سال ۱۹۷۷ ، چوی و افراس، مفهوم سیستم عملگری مجرد را به عنوان یک $*$-فضای برداری ماتریسی مرتب دارای واحد ترتیبی ارشمیدسی معرفی و سپس قضیه نمایشی را برای سیستم‌های عملگری به عنوان یک سیستم عملگری عینی [2] بیان و اثبات نمودند [۴].

در ۱۹۷۱، اینو مفهوم C^*-جبرهای کوانتومی را مطالعه کرده است. وی نشان داده که هر C^*-جبر کوانتومی را می‌توان به عنوان یک $*$-زیرجبر فضای عملگرهای پیوسته روی یک فضای هیلبرت کوانتومی نمایش داد [۹] . همچنین، در سال‌های اخیر دوسیف نسخه موضعاً محدب سیستم‌های عملگری عینی با عنوان ” سیستم های کوانتومی عینی” را به صورت زیرفضاهای خطی، خود الحاق و یکدار از مجموعه عملگرهای بیکران روی یک فضای هیلبرت، معرفی نمود. وی سیستم‌های کوانتومی مجرد [3] را تعریف و نمایش سیستم‌های کوانتومی مجرد را به عنوان یک سیستم کوانتومی عینی اثبات نمود [۷، ۸]. همچنین، در[۲] اثباتی متفاوت از این قضیه بیان شده است. لازم به ذکر است که هر C^*-جبر کوانتومی و سیستم

[1]Heisenberg relation
[2]concrete
[3](abstract) local operator system

عملگری کوانتومی در واقع حد معکوسی از C^*-جبرها و سیستم‌های عملگری هستند [۱۴، ۲].

با توجه به اینکه هر سیستم عملگری کوانتومی را می توان در یک C^*-جبر کوانتومی نشاند، لذا می‌توان از C^*-پوشش کوانتومی برای یک سیستم عملگری کوانتومی صحبت کرد. در واقع، منظور از C^*- پوشش کوانتومی برای یک سیستم عملگری کوانتومی V یک C^*-جبر کوانتومی شامل V است که دارای یک خاصیت جهانی ماکسیمال می باشد (تعریف ۲.۴). در این مقاله، ضمن مرور مفهوم سیستم‌های عملگری کوانتومی، به مطالعه C^*- پوشش کوانتومی یک سیستم کوانتومی می‌پردازیم.

۲. مفاهیم مقدماتی

حد معکوس در یک رسته دلخواه به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲. [۱۴] رسته $\mathfrak{C}$ و مجموعه جهتدار $(I, \leq)$ را در نظر بگیرید. منظور از یک سیستم معکوس از اشیا و مورفیسم‌ها در رسته $\mathfrak{C}$، زوج $(\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{f_{\alpha\gamma}\}_{\alpha\leq\gamma})$ است، که در آن خانواده $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$، خانواده‌ای از اشیای رسته $\mathfrak{C}$ و خانواده $f_{\alpha\gamma} : A_\gamma \to A_\alpha$ $(\alpha \leq \gamma)$ خانواده‌ای از مورفیسم‌های رسته $\mathfrak{C}$ هستند، به‌طوری‌که:

۱. برای هر $\alpha \in I$، $f_{\alpha\alpha}$ همانی A_α است.

۲. برای هر $\alpha \leq \gamma \leq \beta$، $f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma} \circ f_{\gamma\beta}$.

منظور از حد معکوس یک سیستم معکوس از اشیا و مورفیسم‌ها، زوج $(A, \{\pi_\alpha\}_{\alpha\in I})$ است که در آن A یک شی در رسته $\mathfrak{C}$ و برای هر $\alpha \in I$، $\pi_\alpha : A \to A_\alpha$ یک مورفیسم است به طوری که ویژگی‌های زیر نیز برقرار هستند:

۱. برای هر $\alpha \leq \gamma$، $\pi_\alpha = f_{\alpha\gamma} \circ \pi_\gamma$.

۲. برای هر $(B, \{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I})$، که در آن B یک شی در رسته $\mathfrak{C}$ و هر نگاشت $\psi_\alpha : B \to A_\alpha$ در تساوی زیر صدق می کند

$$\psi_\alpha = f_{\alpha\gamma} \circ \psi_\gamma \qquad (\alpha \leq \gamma),$$

مورفیسم یکتای $u : B \to A$ وجود دارد که برای هر $\alpha \in I$، $\psi_\alpha = \pi_\alpha \circ u$.

حد معکوس یک سیستم معکوس $(\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{f_{\alpha\gamma}\}_{\alpha\leq\gamma})$ را با $A = \varprojlim A_\alpha$ نشان می‌دهیم. حد معکوس [۴] در رسته هایی مانند مجموعه ها، فضاهای برداری، جبرهای توپولوژیک وجود دارند و می توان نشان داد در این رسته ها،

$$\varprojlim A_\alpha = \{a \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha : \forall\gamma \geq \alpha, f_{\alpha,\gamma}(a(\gamma)) = a(\alpha)\}. \qquad (۱.۲)$$

حد معکوس C^*-جبرها در رسته C^*-جبرها یک C^*-جبر است. اما در این مقاله به مطالعه حد معکوس C^*-جبرها در رسته $*$-جبرهای توپولوژیک می پردازیم. در واقع، در رسته $*$-جبرهای توپولوژیک که مورفیسم های آن $*$-همومورفیسم های پیوسته هستند، حد معکوس C^*-جبرها، یک $*$-جبر توپولوژیک هاوسدورف و کامل است که توپولوژی آن توسط همه C^*-نیم‌نرم‌های پیوسته روی آن تعیین می‌شود، به چنین $*$-جبری یک *C^*-جبر کوانتومی* گفته می‌شود [۱۴]. C^*-جبر کوانتومی $\mathcal{A}$ مجهز به خانواده C^*-نیم‌نرم های $\{p_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را با زوج مرتب $(\mathcal{A}, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I})$ نشان می دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک C^*-نیم‌نرم روی $\mathcal{A}$، نیم‌نرم p است که

$$p(a^*a) = p(a)^۲, \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

لازم به ذکر است که بنا بر [۱۵] ، چنین نیم‌نرمی لزوماً زیرضربی است، یعنی

$$p(ab) \leq p(a)p(b) \qquad (a, b \in \mathcal{B}).$$

لم ۲.۲. *فرض کنید $(\mathcal{A}, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I})$ یک C^*-جبر کوانتومی باشد. قرار دهید $K_\alpha = ker(p_\alpha)$. در این صورت، $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}/K_\alpha$ یک C^*-جبر است. به‌علاوه، $\mathcal{A} = \varprojlim \mathcal{A}_\alpha$.*

اثبات. به ازای هر $\alpha \in I$و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، قرار می‌دهیم

$$\|a + K_\alpha\|_\alpha = p_\alpha(a). \qquad (۲.۲)$$

[4] inverse limit

به وضوح، برای هر $\alpha \in I$، $\|.\|_\alpha$ یک C^*-نرم روی A_α است. به‌علاوه، بنابر [۱۴، گزاره ۱۲.۰۱]، برای هر $\alpha \in I$، A_α یک C^*-جبر است. حال، از آنجا که $\{p_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را می‌توان یک خانواده صعودی از نیم‌نرمها در نظر گرفت، بنابراین، نگاشت $f_{\alpha\gamma} : A_\gamma \to A_\alpha$ با ضابطه

$$f_{\alpha\gamma}(a + K_\gamma) = a + K_\alpha, \qquad (\alpha \leq \gamma, a \in \mathcal{A})$$

خوش تعریف است. به این ترتیب، زوج $(\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{f_{\alpha\gamma}\}_{\alpha\leq\gamma})$ یک سیستم معکوس از C^*-جبرهاست. به علاوه، C^*-جبرکوانتومی $\mathcal{A}$ ، به همراه مورفیسم‌های $\pi_\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\alpha$ با ضابطه

$$\pi_\alpha(a) = a + K_\alpha \qquad (\alpha \in I) \qquad (a \in \mathcal{A})$$

برای هر $\alpha \leq \gamma$، در رابطه $\pi_\alpha = f_{\alpha\gamma} \circ \pi_\gamma$ صدق می‌کند. بنابراین، $\mathcal{A} \simeq \varprojlim \mathcal{A}_\alpha$. $\square$

تعریف ۳.۲. C^*-جبرهای کوانتومی $(\mathcal{A}, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I})$ و $(\mathcal{B}, \{q_\alpha\}_{\alpha\in I})$ را در نظر بگیرید. $*$-همومورفیسم $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را یک $*$-همومورفیسم *کراندار سازگار* می‌نامیم، هرگاه برای هر $\alpha \in I$، عدد نامنفی C_α وجود داشته باشد که

$$q_\alpha(\Phi(a)) \leq C_\alpha p_\alpha(a), \qquad (\alpha \in I)$$

لم ۴.۲. *نگاشت خطی $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک $*$-همومورفیسم کراندار سازگار است، اگر وتنها اگر نگاشت خطی متناظر $\Phi_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ یک $*$-همومورفیسم باشد.*

۳. سیستم عملگری کوانتومی

تعریف ۱.۳. [۱، تعریف ۱.۳] فرض کنید V یک $*$-فضای برداری باشد. خانواده $\mathfrak{C} = \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}$ *ترتیب موضعی ماتریسی* [5] روی V نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times I$، $C_{n,\alpha}$ یک مخروط روی عناصر هرمیتی $M_n(V)$ است.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $M_n(V)^+ \cap -M_n(V)^+ = \{0\}$، که در آن $M_n(V)^+ = \cap_{\alpha\in I} C_{n,\alpha}$.

---
[5] matrix local ordering

ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $\alpha, \beta \in I$، $\gamma \in I$ وجود دارد که $C_{n,\gamma} \subseteq C_{n,\alpha} \cap C_{n,\beta}$، یعنی خانواده $\{C_{n,\alpha}\}_{\alpha \in I}$ یک خانواه فیلتر شده معکوس است.

د) برای هر $n, m \in \mathbb{N}$، $\alpha \in I$ و $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$، داریم $X^* C_{n,\alpha} X \subseteq C_{m,\alpha}$.

در این حالت، $(V, \mathfrak{C})$ (یا $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times I})$) را یک *سیستم برداری مرتب ماتریسی*[۶] می‌نامیم.

فرض کنید $(V, \mathfrak{C})$ یک سیستم برداری مرتب ماتریسی باشد. برای هر $e \in V_h$ ماتریس قطری متناظر، $e_n := diag(e, \cdots, e) \in M_n(V)$ را در نظر بگیرید. هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، e_n یک واحد به طور موضعی ترتیبی ماتریسی (ارشمیدسی) برای $(M_n(V), \{C_{n,\alpha}\}_{\alpha \in I})$ باشد، e یک *واحد به طور موضعی ترتیبی ماتریسی (ارشمیدسی)* [۷] برای V نامیده می شود.

تعریف ۲.۳. [۱، تعریف ۲.۳] سه تایی $(V, \mathfrak{C}, e)$ را یک *سیستم عملگری کوانتومی* مجرد می‌نامیم، هرگاه V یک $*$-فضای برداری مختلط، $\mathfrak{C}$ یک ترتیب موضعی ماتریسی روی V و e یک واحد به طور موضعی ترتیبی ماتریسی ارشمیدسی برای V باشد. در این حالت، $\mathfrak{C}$ یک ترتیب کوانتومی روی V نامیده می‌شود.

نکته ۳.۳. یادآوری می‌کنیم که عملگر T یک عملگر بیکران روی فضای هیلبرت H گفته می‌شود، هرگاه T روی یک زیرفضای خطی چگال $D(T)$ از H که دامنه نگاشت T گفته می‌شود، تعریف شده باشد و همچنین $T : D(T) \to H$ یک نگاشت خطی باشد. فضای هیلبرت ثابت H را در نظر بگیرید و فرض کنید که $\mathcal{E} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ یک خانواده صعودی از زیرفضاهای بسته در H باشد، که اجتماع آنها $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{E}$ در H چگال است. چنین خانواده‌ای از زیرفضاهای فضای هیلبرت H یک دامنه کوانتومی گفته می‌شود. جبر همه تبدیل‌های خطی روی $\mathcal{D}$ با $L(\mathcal{D})$ نمایش داده می‌شود. مجموعه

$$C_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}) = \{T \in L(\mathcal{D}) \ : \ TP_\alpha = P_\alpha T P_\alpha \in B(H), \alpha \in \Lambda\},$$

که در آن برای هر $\alpha \in \Lambda$، P_α تصویر متعامد از H به روی H_α است را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که هر عملگر T در $C_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$، جبر توابع ناجابه جایی پیوسته روی دامنه کوانتومی، یک عملگر بیکران روی

[6] matrix local ordered $*$-vector space

[7] *(Archimedean) matrix local order unit*

H با دامنه $\mathcal{D}$ است. همچنین، $*$-جبر توابع پیوسته ناجابجایی روی دامنه کوانتومی $\mathcal{E}$

$$C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}) = \{T \in C_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}) \;:\; P_\alpha T \subset T P_\alpha, \alpha \in \Lambda\},$$

یک $*$-جبر یکدار است، که در آن تناظر $T \mapsto T^*$ یک نگاشت الحاقی است. فرض کنید V یک زیرفضای خود الحاق و یکدار فضای $C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ است. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $M_n(C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})) = C^*_{\mathcal{E}^n}(\mathcal{D}^n)$. پس $M_n(V)$ یک زیر فضای خودالحاق و یکدار زیرفضای خود الحاق $C^*_{\mathcal{E}^n}(\mathcal{D}^n)$ است([۵]). قرار می‌دهیم

$$C_{n,\alpha} := \{T \in M_n(V)_h : T|_{H^n_\alpha} \in B^+(H^n_\alpha)\} \qquad (n,\alpha) \in \mathbb{N} \times I.$$

پس $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, id)$ یک سیستم عملگری کوانتومی است [۶].

در[۱]، چند همریختی در رسته سیستم‌های عملگری کوانتومی به صورت زیر تعریف شده است. فرض کنید نگاشت $\varphi : V \to W$ یک نگاشت خطی بین فضاهای برداری باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، متناظر با φ یک نگاشت خطی $\varphi^n : M_n(V) \to M_n(W)$، با ضابطه $\varphi^n\left([v_{ij}]\right) = \left[\varphi(v_{ij})\right]$، برای هر $[v_{ij}] \in M_n(V)$ تعریف می‌شود. حال فرض کنید $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, e)$ و $(W, \{D_{n,\beta}\}_{(n,\beta)\in\mathbb{N}\times J}, e')$ سیستم‌های عملگری کوانتومی باشند. برای نگاشت خطی یکانی $\phi : V \to W$ تعاریف زیر را داریم.

الف) نگاشت ϕ *به طور موضعی مثبت سازگار* نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha \in I$، $\phi(C_{1,\alpha}) \subseteq D_{1,\alpha}$.

ب) نگاشت ϕ *کاملاً به طور موضعی مثبت سازگار*[۸] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، ϕ_n به طور موضعی مثبت سازگار باشد.

ج) نگاشت ϕ *ایزومورفیسم کاملاً به طور موضعی مرتب*[۹] نامیده می‌شود هرگاه هر دو نگاشت ϕ و ϕ^{-1} کاملاً به طور موضعی مثبت سازگار باشند.

د) نگاشت ϕ *نشاننده کاملاً به طور موضعی مرتب*[۱۰] نامیده می‌شود هرگاه ϕ بعنوان نگاشتی از V بروی $\phi(V)$ یک ایزومورفیسم کاملاً به طور موضعی مرتب باشند.

---

[8] *(admissible) completely local positive*
[9] *complete local order isomorphism*
[10] *complete local order embedding*

توجه داشته باشید که یک سیستم عملگری کوانتومی $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, e)$ تمام شرایط یک سیستم عملگری را دارد و تنها شرط $C_{n,\alpha} \cap -C_{n,\alpha} = \circ$ در آن برقرار نیست. به این جهت، برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم،

$$N_{n,\alpha} = Span_{\mathbb{C}}(C_{n,\alpha} \cap -C_{n,\alpha}).$$

مشابه [۱۳، لم ۱۴.۳]، می‌توانیم نشان دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $N_{n,\alpha} = M_n(N_{1,\alpha})$. $N_{1,\alpha}$ یک $*$-زیرفضای V است، بنابراین خارج قسمتِ $V_\alpha := V/N_{1,\alpha}$ یک $*$-فضای برداری است. همچنین

$$(e + N_{1,\alpha})_n = e_n + M_n(N_{1,\alpha})$$

و $M_n(V_\alpha)$ را می‌توان با $M_n(V)/M_n(N_{1,\alpha})$ مشخص کرد. قرار می‌دهیم

$$\widetilde{C}_{n,\alpha} := \{A + M_n(V)/M_n(N_{1,\alpha}) : A \in C_{n,\alpha}\}.$$

گزاره زیر برقرار است.

لم ۴.۳. *[۲] فرض کنید $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, e)$ یک سیستم عملگری کوانتومی باشد.*

۱. *برای هر $\alpha \in I$، سه‌تایی $(V_\alpha, \{\widetilde{C}_{n,\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}, e + N_{1,\alpha})$ یک سیستم عملگری (مجرد) است.*

۲. $V \simeq \varprojlim V_\alpha$.

بنابه قضیه چویی-افراس، برای هر $\alpha \in I$، یک ایزومورفیسم مرتب کامل $\varphi_\alpha : V_\alpha \to S'_\alpha \subseteq B(H'_\alpha)$ وجود دارد که در آن، H'_α یک فضای هیلبرت و $S'_\alpha \subseteq B(H'_\alpha)$ یک سیستم عملگری است.

فرض کنید $H_\alpha = \bigoplus_{\beta\leq\alpha} H'_\beta$. در این صورت، هرگاه $\beta \leq \alpha$، H_β را می توان یک زیرفضای بسته H_α در نظر گرفت. قرار می‌دهیم $\mathcal{D} = \cup_{\alpha\in I} H_\alpha$ و فضای هیلبرت H را کامل‌شده $\mathcal{D}$ در نظر می‌گیریم. خانواده روبه‌جلو فیلترشده $\mathcal{E} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک دامنه کوانتومی در فضای هیلبرت H است. همان‌طور که در ملاحظه ۳.۳ بیان شده، $(C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}), \{D_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, id)$، که

$$D_{n,\alpha} := \{T \in M_n(C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}))_h = C^*_{\mathcal{E}^n}(\mathcal{D}^n)_h : T|_{H^n_\alpha} \in B^+(H^n_\alpha)\},$$

یک سیستم عملگری کوانتومی است. قرار می‌دهیم $\Phi_\alpha(v) = \oplus_{\beta\leq\alpha}\varphi_\beta(v + N_{1,\beta})$ برای هر $v \in V$. درواقع، نگاشت Φ یک ایزومورفیسم کاملاً به طور موضعی مرتب بروی بردش است و قضیه زیر برقرار است [۷، ۸]. همچنین، در [۲، قضیه ۳.۶] اثبات متفاوتی از این قضیه بیان شده است.

قضیه ۵.۳. *فرض کنید $(V, \{C_{n,\alpha}\}_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times I}, e)$ یک سیستم عملگری کوانتومی مجرد باشد. در این صورت، یک دامنه کوانتومی $\mathcal{E} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ در یک فضای هیلبرت H، یک سیستم عملگری کوانتومی عینی S در $C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ و یک ایزومورفیسم کاملاً به طور موضعی مرتب یکدار $\Phi : V \to S$ وجود دارد.*

۴. C^*-پوشش کوانتومی سیستم‌های عملگری کوانتومی

C^*-پوشش برای یک سیستم عملگری در [۳، ۱۱، ۱۲] مورد مطالعه قرار گرفت. در این بخش به ارایه نسخه کوانتومی مفهوم C^*-پوشش می‌پردازیم. درواقع، C^*-پوشش کوانتومی برای یک سیستم عملگری کوانتومی V، یک C^*-جبر کوانتومی شامل V است که دارای یک خاصیت جهانی ماکسیمال می باشد.

نکته ۱.۴. برای هر سیستم عملگری S یک C^*-جبر یکدار $C^*_u(S)$ و یک نشاننده کاملا مثبت یکانی $J_S : S \to C^*_u(S)$ وجود دارد که C^*-جبر تولید شده توسط $J_S(S)$ برابر $C^*_u(S)$ است و برای هر C^*-جبر یکدار A و هر نگاشت خطی کاملا مثبت یکانی $\phi : S \to A$، یک $*$-هومورفیسم یکانی منحصربفرد $\pi : C^*_u(S) \to A$ وجود دارد به طوری که $\pi \circ J_S = \phi$.

با توجه به خاصیت بیان شده برای C^*-جبر $C^*_u(S)$، براحتی می توان ثابت کرد که هر نگاشت کاملاً مثبت یکانی بین دو سیستم عملگری مانند $\psi : S \to S'$ قابل توسیع به یک $*$-هومورفیسم یکانی منحصربفرد

$$\tilde{\psi} : C^*_u(S) \to C^*_u(S')$$

است به طوری که $\tilde{\psi} \circ J_S = J_{S'} \circ \psi$. بنابراین، هرگاه $(\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\psi_{\alpha,\beta}\})$ یک سیستم معکوس از سیستم های عملگری باشد، آنگاه $(\{C^*_u(S_\alpha)\}_{\alpha\in I}, \{\tilde{\psi}_{\alpha,\beta}\})$ یک سیستم معکوس از C^*-جبر ها است به طوری که

$$\tilde{\psi}_{\alpha,\beta} \circ J_{S_\beta} = J_{S_\alpha} \circ \psi_{\alpha,\beta} \qquad (\alpha \leq \beta).$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه ۵.۳، هر سیستم عملگری کوانتومی را می‌توان به صورت زیرفضای یک C^*-جبر کوانتومی در نظر گرفت.

تعریف ۲.۴. فرض کنید V یک سیستم عملگری کوانتومی است. زوج مرتب $(J_V, \mathcal{B})$ را یک C^*-*پوشش کوانتومی* برای V می‌نامیم، هرگاه

۱. $\mathcal{B}$ یک C^*-جبر کوانتومی یکدار و $J_V : V \to \mathcal{B}$ یک نشاننده کاملاً به‌طور موضعی مرتب یکانی باشد به طوری که $\mathcal{B} = C^*(J_V(V))$، به این معنی که C^*-جبر کوانتومی تولید شده توسط $J_V(V)$ برابر $\mathcal{B}$ است.

۲. اگر C یک C^*-جبر کوانتومی یکدار و $\psi : V \to C$ یک نگاشت کاملاً مثبت موضعی سازگار باشد، آنگاه $*$-همومورفیسم کراندار سازگار $\pi : \mathcal{B} \to C$ موجود باشد به طوری که $\pi \circ J_V = \psi$.

در ادامه نشان می دهیم C^*-پوشش کوانتومی برای هر سیستم عملگری کوانتومی مانند V موجود و منحصر بفرد است. لذا می‌توانیم آن را با یک نماد مشخص، مانند $C^*_{qu}(V)$ نشان دهیم.

قضیه ۳.۴. *C^*-پوشش کوانتومی یک سیستم عملگری کوانتومی، منحصر بفرد است.*

اثبات. فرض کنید V یک سیستم عملگری کوانتومی است و زوج های $(J_V, \mathcal{B})$ و $(J'_V, \mathcal{B}')$، C^*-پوشش های کوانتومی برای V باشند. با توجه به تعریف $*$-همومورفیسم های کراندار سازگار $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ و $\pi' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ وجود دارند به طوری که

$$\pi \circ J_V = J'_V, \qquad \pi' \circ J'_V = J_V.$$

بنابراین، $\pi' \circ \pi \circ J_V = J_V$ و این یعنی $*$-همومورفیسم $\pi' \circ \pi$ روی $J_V(V)$ همانی است. حال، از آنجا که $\mathcal{B} = C^*(J_V(V))$، $*$-همومورفیسم $\pi' \circ \pi$ روی کل $\mathcal{B}$ نیز همانی است. بطور مشابه، می توان نتیجه گرفت $*$-همومورفیسم $\pi \circ \pi'$ روی $\mathcal{B}'$ همانی است. بنابراین، C^*-جبر های کوانتومی $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ با هم ایزومورف هستند. □

قضیه ۴.۴. *فرض کنید $V = \varprojlim(\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\phi_{\alpha,\beta}\})$ یک سیستم عملگری کوانتومی است. در این صورت، C^*-جبر کوانتومی $\mathcal{B} = \varprojlim C^*_u(V_\alpha)$، یک C^*-پوشش کوانتومی برای سیستم عملگری کوانتومی V است. به بیان دیگر، $C^*_{qu}(\varprojlim V_\alpha) = \varprojlim C^*_u(V_\alpha)$.*

اثبات. با توجه به ملاحظه ۱.۴، برای هر $(\alpha,\beta) \in I \times I$ که $\alpha \leq \beta$، یک $*$-همومورفیسم یکانی $\tilde{\phi}_{\alpha,\beta} : C^*_u(V_\beta) \to C^*_u(V_\alpha)$ وجود دارد به طوری که

$$\tilde{\phi}_{\alpha,\beta} \circ J_{V_\beta} = J_{V_\alpha} \circ \phi_{\alpha,\beta}.$$

بنابراین، نگاشت $\phi : V = \varprojlim V_\alpha \to \mathcal{B} = \varprojlim C^*_u(V_\alpha)$ با ضابطه

$$\phi(v) = (J_{V_\alpha}(v_\alpha))_{\alpha\in I}, \qquad (v = (v_\alpha)_{\alpha\in I}),$$

خوش تعریف است. در واقع، از آنجا که نگاشت J_{V_α} یک نشاننده کاملاً بطور موضعی مرتب یکانی است، نگاشت ϕ یک نشاننده کاملاً بطور موضعی مرتب یکانی است و $\mathcal{B} = C^*(\phi(V))$.

حال فرض کنیم $\psi : V \to \mathcal{A}$ یک نگاشت کاملاً مثبت موضعی سازگار از V به C^*-جبر کوانتومی $\mathcal{A} = \varprojlim(\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\theta_{\alpha,\beta}\})$ باشد. برای هر $\alpha \in I$، نگاشت القایی $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathcal{A}_\alpha$ یک نگاشت کاملاً مثبت است و

$$\theta_{\alpha,\beta} \circ \psi_\beta = \psi_\alpha \circ \theta_{\alpha,\beta} \qquad (\alpha \leq \beta).$$

بنابر خاصیت C^*-پوشش سیستم های عملگری، برای هر $\alpha \in I$، $*$-همومورفیسم یکانی $\tilde{\psi}_\alpha : C^*_u(V_\alpha) \to \mathcal{A}_\alpha$ وجود دارد که $\tilde{\psi}_\alpha \circ J_{V_\alpha} = \psi_\alpha$. از دو تساوی آخر، نتیجه می شود

$$\tilde{\psi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_{\alpha,\beta} = \theta_{\alpha,\beta} \circ \tilde{\psi}_\beta \qquad (\alpha \leq \beta).$$

لذا، نگاشت $\Psi : \mathcal{B} = \varprojlim C^*_u(V_\alpha) \to \mathcal{A} = \varprojlim A_\alpha$ با ضابطه

$$\Psi(b) = (\tilde{\psi}_\alpha(b_\alpha))_{\alpha\in I}, \qquad (b = (b_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{B}),$$

خوش تعریف است. در واقع، نگاشت Ψ یک $*$-همومورفیسم یکانی است. به علاوه، $\Psi \circ \phi = \psi$. زیرا

برای هر $V \ni v = (v_\alpha)_{\alpha\in I}$ داریم:

$$\Psi \circ \phi(v) = \Psi((J_{V_\alpha}(v_\alpha))_{\alpha\in I}) = (\tilde{\psi}_\alpha(J_{V_\alpha}(v_\alpha)))_{\alpha\in I} = (\psi_\alpha(v_\alpha))_{\alpha\in I} = \psi((v_\alpha)_{\alpha\in I}) = \psi(v).$$

بنابراین، اثبات کامل است. □

مراجع

[1] M.B. Asadi, Z. Hassanpour-Yakhdani and S. Shamloo, A locally convex version of Kadison's representation theorem, *Positivity*, (2020), 1–12.

[2] M.B. Asadi, Z. Hassanpour-Yakhdani and S. Shamloo, Unbounded operator algebras, *Annals of Functional Analysis*, **12**(2) (2021), 1–15.

[3] W.B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, *Acta Mathematica*, **123** (1969), 141–224.

[4] M.D. Choi and E.G. Effros, Injectivity and operator spaces, *J. Func. Anal.*, **24**, (1997), 156–219.

[5] A. Dosiev, A representation theorem for local operator spaces, *Funct. Anal. its Appl.*, **41** (2007), 306–307.

[6] A. Dosi, Local operator spaces, unbounded operators and multinormed C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **255** (2008), 1724–1760.

[7] A. Dosiev, Quantum systems and representation theorem, *Positivity*, **17** (2013), 841–861.

[8] A. Dosiev, Quantum system structures of quantum spaces and entanglement breaking maps, *Sbornik Math.*, **210**(7) (2019), 21–93.

[9] A. Inoue, locally C^*-algebra, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, **25** (1971), 197–235.

[10] R.V. Kadison, *A Representation Theory for Commutative Topological Algebra*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 7, 1951.

[11] E. Kirchberg and S. Wassermann, C^*-algebras generated by operator systems, *J. Funct. Anal.*, **155**(2) (1998), 324–351.

[12] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Vol. 78, Cambridge University Press, 2002.

[13] V.I. Paulsen and M. Tomford, Vector spaces with an order unit, *Indi. Univ. Math. J.*, **58** (2009), 1319–1359.

[14] N.C. Philips, Inverse limit of C^*-algebras, *J. Operator Theory*, **19** (1988), 159–195.

[15] Z. Sebestyén, Every C^*-seminorm is automatically submultiplicative, *Periodica Mathematica Hungrica*, **10** (1979), 1–8.